ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 1784

Г.В. Ефимов

О НЕЛИНЕЙНЫХ ЛАГРАНЖИАНАХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1964

P – 1784

Г.В. Ефимов

О НЕЛИНЕЙНЫХ ЛАГРАНЖИАНАХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

1. Введение

Недавно была предпринята попытка [1-4] построения конечной локальной квантовой теории скалярного поля путем введения существенно нелинейного лагранжиана взаимодействия, удовлетворяющего определенным требованиям. Оказалось возможным построить S -матрицу по степеням лагранжиана взаимодействия, причем в каждом порядке отсутствуют ультрафиолетовые расходимости. Унитарность была проверена только во втором порядке [4] теории возмущений и для функции Грина–в третьем [3].

При получении радиационных операторов S -матрицы в работах [1-3] использовались формальные математические операции, так что механизм, приводящий к устранению ультрафиолетовых расходимостей, по нашему мнению, остался невыясненным до конца.

В настоящей работе на примере модели скалярных мезонов взаимодействующих с точечным фиксированным источником делается попытка понять, что происходит при введении существенно нелинейного взаимодействия.

Модель описывается гамильтонианом

$$H = H_0 + H_I \tag{1.1}$$

$$H_0 = \tfrac{1}{2}\int d\vec{x}\,:[\pi^2(\vec{x}) + (\vec{\Delta}\phi(\vec{x}))^2 + \mu^2\phi^2(\vec{x})]: \tag{1.2}$$

$$H_I = g\int d\vec{x}\,\delta(\vec{x}):U(\phi(\vec{x})): = g:U(\phi(0)):\,, \tag{1.3}$$

где $\phi(\vec{x})$ и $\pi(\vec{x})$ –операторы бозонного поля. $U(\phi)$ – некоторая функция от ϕ. Если $U(\phi) = \phi^n$, где $n \geq 2$, то гамильтониан (1.1) описывает нетривиальную теорию, где есть рассеяние и другие физические процессы. Основное, что будет нас интересовать, это наличие ультрафиолетовых расходимостей в случае точечного взаимодействия при $n \geq 2$. Заметим, что модели с $n \geq 3$ являются неперенормируемыми теориями.

Эта модель привлекательна тем, что позволяет поставить квантово-полевую задачу в полном соответствии с обычным уравнением Шредингера с потенциалом, общий анализ которого нам известен.

Наша задача заключается в следующем: возможно ли найти такие функции $U(\phi)$, для которых ультрафиолетовые расходимости отсутствуют в каждом порядке теории возмущений. Интуитивно может показаться, что трудности теории возникают в области, где поля ϕ велики. Казалось бы, что если взаимодействие выбрать в форме, когда оно мало при больших ϕ, то такие теории не должны были бы содержать трудностей, связанных с большими энергиями. Наличие конечной теории возмущений говорило бы о том, что стационарные состояния полного гамильтониана H разлагаются по стационарным состояниям H_0.

Однако оказывается, что это не так. Эффект бесконечного числа степеней свободы квантованного поля оказывается более существенным. В этом наш результат согласуется с результатом Ван Хова [5], который показал для модели с $U(\phi) = \phi$, что пространство векторов состояний полного и свободного гамильтонианов образуют ортогональные подпространства в едином гильбертовом пространстве.

С другой стороны, методы работ [1-3] позволяют в предлагаемой модели для определенного класса функций взаимодействия $U(\phi)$ построить ряд теорий возмущений для полной S-матрицы, свободный от расходимостей. В то же самое время оказывается, что для этого класса лагранжианов нельзя поставить квантово-полевое уравнение Шредингера с потенциалом, так как, во-первых, взаимодействие не может быть потенциалом, как увидим ниже, и, во-вторых, ряды теории возмущений очень сильно расходятся. Значит методы [1,2] по своему существу являются методами суммирования расходящихся рядов, поэтому проверка таких свойств S-матрицы как унитарность и причинность имеет первостепенное значение. Это согласуется с результатом аксиоматического подхода в квантовой теории поля, когда возможно существование унитарной S-матрицы перехода между асимптотическими полями ϕ_{in} и ϕ_{out}, а существование половинной унитарной матрицы $S(t,-\infty)$ для конечных t запрещено теоремой Хаага [6].

Из всего вышесказанного следует, что построение по теории возмущений конечной S-матрицы по нелинейному лагранжиану имеет мало общего с идеологией теории возмущений в классической лагранжевой формулировке теории, когда считается, что малое возмущение мало изменяет состояния свободного поля. Существует лишь метод построения конечной S-матрицы как унитарного оператора, отображающего гильбертово пространство in-состояний в гильбертово пространство out-состояний по степеням константы связи, и главную роль в проверке метода играют унитарность и причинность.

2. Квантово-полевое уравнение Шредингера

Приступим к формулировке проблемы. Будем предполагать, что система заключена в кубический ящик объема V. Вектор импульса $\vec{k}$ бозонов имеет тогда компоненты кратные $2\pi V$. Введем операторы рождения $a^+_{\vec{k}}$ и уничтожения $a_{\vec{k}}$ для свободных бозонов с помощью фурье-разложения:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left(a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}} + a^+_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\vec{x}} \right), \tag{2.1}$$

где $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{\mu^2 + \vec{k}^2}$ и $[a_{\vec{k}}, a^+_{\vec{k}'}] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}$.

Тогда для H_0 и H_I получим

$$H_0 = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}}$$
$$H_I = g : U\left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} (a_{\vec{k}} + a^+_{\vec{k}}) \right): . \tag{2.2}$$

Гамильтониан взаимодействия H_I взят в нормальной форме. Что это означает для функций $U(\phi)$ сложного вида обсудим ниже.

Формула $a_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_{\vec{k}} + ip_{\vec{k}})$ определяет эрмитовы операторы $q_{\vec{k}}$ и $p_{\vec{k}}$, подчиняющиеся соотношением коммутации

$$[q_{\vec{k}}, q_{\vec{k}'}] = [p_{\vec{k}}, p_{\vec{k}'}] = 0 ; \quad [q_{\vec{k}}, p_{\vec{k}'}] = i\delta_{\vec{k},\vec{k}'} .$$

В представлении, где переменные $q_{\vec{k}}$ диагональны, можно положить

$$p_{\vec{k}} = -i \frac{\partial}{\partial q_{\vec{k}}}, \tag{2.3}$$

и вектор состояния поля будет функцией $\phi = \phi(q_{\vec{k}})$ с различными числовыми $q_{\vec{k}}$ (в бесконечном числе). Включение $q_{\vec{k}}$ и $p_{\vec{k}}$ в (2.2) даст

$$H_0 = \sum_{\vec{k}} \tfrac{1}{2} \omega_{\vec{k}} (p^2_{\vec{k}} + q^2_{\vec{k}} - 1), \tag{2.4}$$

$$H_I = g : U\left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{q_{\vec{k}}}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}}} \right): . \tag{2.5}$$

Квантово-полевое уравнение Шредингера на стационарные состояния взаимодействующей системы запишется в виде:

$$\left\{ \tfrac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega \left(-\frac{\partial^2}{\partial q^2_{\vec{k}}} + q^2_{\vec{k}} - 1 \right) + g : U\left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum \frac{q_{\vec{k}}}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}}} \right): \right\} \Phi = E \Phi . \tag{2.6}$$

Это уравнение является полным аналогом обычного уравнения Шредингера только с бесконечным числом степеней свободы.

Наша задача - решить уравнение (2.6) по теории возмущений (разлагая по константе g) и попытаться найти класс функций $U(\phi)$, для которых существует конечный предел при $V \to \infty$.

Свободный гамильтониан представляет собой набор несвязанных между собой осцилляторов. Собственные функции H_0 есть бесконечные произведения

$$\Phi(\{n_{\vec{k}}\}) = \prod_{\vec{k}} h_{n_{\vec{k}}}(q_{\vec{k}}), \tag{2.7}$$

где

$$h_n(q) = \frac{H_n(q)\, e^{-\frac{q^2}{2}}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}, \tag{2.8}$$

h_n – ортонормированные функции Эрмита. Собственные функции $\Phi(\{n_{\vec{k}}\})$ зависят от системы целых чисел $\{n_{\vec{k}}\}$, каждому импульсу $\vec{k}$ привязывается целое неотрицательное число $n_{\vec{k}}$, которое является числом бозонов с импульсом $\vec{k}$. Собственное значение, соответствующее $\Phi(\{n_{\vec{k}}\})$, равно $E = \sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}$. Для основного состояния (бозонный вакуум) все $n_{\vec{k}} = 0$.

Рассмотрим теперь гамильтониан взаимодействия (2.5). В нашем представлении он является функцией от числовых переменных $q_{\vec{k}}$, так что может рассматриваться как обычный потенциал. Мы хотим рассматривать H_I как малое возмущение. Разумно априори требовать, что поскольку H_0 представляет собой набор осцилляторов, то возмущение не должно расти при $q_{\vec{k}} \to \infty$ быстрее $q_{\vec{k}}^2$. Будем даже считать, что

$$\lim_{\phi \to \infty} :U(\phi): = 0. \tag{2.9}$$

Кроме того, необходимо рассматривать гамильтониан взаимодействия в нормальной форме. Обычно, когда имеют дело с $H_I(\phi)$, который является только конечной суммой вида:

$$H_I(\phi) = \sum_{m=1}^{N} c_m \phi^m,$$

под нормальным произведением $:\phi^m:$ понимают такую расстановку операторов рождения $a^+_{\vec{k}}$ и уничтожения $a_{\vec{k}}$, когда все операторы $a_{\vec{k}}$ стоят правее операторов $a^+_{\vec{k}}$. Эквивалентным этому будет следующее определение. Пусть рассматривается матричный элемент

$$\langle 0 | :H_I(\phi): | n \rangle,$$

где $|0\rangle = \Phi(\{0\})$ и $|n\rangle = \Phi(\{n_{\vec{k}}\})$, где $n = \sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}}$, тогда под нормальной формой $:H_I(\phi):$ понимается такая его форма, что при любых n выполнено равенство:

$$\langle 0 | :H_I(\phi): | n \rangle = c_n \langle 0 | :\phi^n: | n \rangle = c_n \langle 0 | \phi^n | n \rangle. \tag{2.10}$$

Пусть теперь задана некоторая функция: $U(\phi)$, которая разлагается в ряд Тейлора в окрестности точки $\phi = 0$:

$$U(\phi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_m}{m!} \phi^m. \tag{2.11}$$

Тогда под нормальной формой оператора $U(\phi)$ будем понимать функцию $:U(\phi):$ удовлетворяющую равенству

$$\langle 0 | :U(\phi): | n \rangle = \frac{u_n}{n!} \langle 0 | :\phi^n: | n \rangle. \tag{2.12}$$

Подставляя в (2.12) явное выражение для $|0\rangle$ и $|n\rangle$ по (2.7) и (2.8) и проводя интегрирование, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu :U(\nu): \frac{H_n\left(\frac{\nu}{\sqrt{2D}}\right) e^{-\frac{\nu^2}{2D}}}{(\sqrt{2D})^n} = u_n, \tag{2.13}$$

где

$$D = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}},$$

причем D считается на этой стадии расчета конечной величиной и должна автоматически выпасть из выражений для амплитуд физических процессов.

Из (2.13) функция $:U(\phi):$ может быть найдена, если воспользоваться тем обстоятельством, что полиномы Эрмита образуют полную ортогональную систему

$$:U(\phi): = \pi^{1/4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_m}{\sqrt{m!}} (\sqrt{D})^m h_m\left(\frac{\phi}{\sqrt{2D}}\right) e^{\frac{\phi^2}{4D}}. \tag{2.14}$$

Так как при нашей постановке задачи $:U(\phi):$ должна рассматриваться как функция от ϕ, то ряд (2.14) должен сходиться при любых D. Из теории ортогональных рядов (см., например, [7]) известно, что для этого необходимо:

$$\lim_{m \to \infty} \frac{u_m}{\sqrt{m!}} (\sqrt{D})^m = 0, \tag{2.15}$$

откуда следует, что u_m должно удовлетворять неравенству

$$|u_m| < A^m m^{\sigma m}, \tag{2.16}$$

где $0 < \sigma < \frac{1}{2}$ и A –некоторая константа. Это означает, что функция $U(\phi)$ (2.11) является целой аналитической функцией в комплексной плоскости ϕ и принадлежит к классу S^{σ} в классификации И.М. Гельфанда и Г.Е. Шилова[8].

Примером такой функции, которая еще удовлетворяет (2.9), может служить

$$U(\phi) = \int_0^{\infty} d\alpha\, e^{-\alpha} \sin\phi\alpha^{\sigma}, \quad (0<\sigma<\tfrac{1}{2}). \tag{2.17}$$

Легко получить, что

$$:U(\phi): = \int_0^{\infty} d\alpha\, e^{-\alpha + \frac{1}{2} D\alpha^{2\sigma}} \sin\phi\alpha^{\sigma}. \tag{2.18}$$

Важно отметить, что для рассматривавшихся лагранжианов взаимодействия, для которых функция $U(\phi)$ имела разрезы в комплексной плоскости ϕ, условие (2.16) не выполнено, так как там $u_m \approx m!$ при $m \to \infty$ и поэтому ряд (2.14) для $:U(\phi):$ расходится всюду и, следовательно, не представляет собой никакой функции от ϕ.

Подсчитаем поправку к энергии основного состояния источника по теории возмущений. Первая неисчезающая поправка имеет второй порядок и дается, как известно, формулой

$$E_0^{(2)} = \sum{}' \frac{|(\Phi(\{0\}), H_I \Phi(\{n_{\vec{k}}\})|^2}{E_0^{(0)} - \sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}}, \tag{2.19}$$

где штрих у суммы означает, что при суммировании по промежуточным состояниям $\{n_{\vec{k}}\}$ опущен член с квантовыми числами вакуума (все $n_{\vec{k}} = 0$). Выберем $E_0^{(0)} = 0$. Воспользовавшись (2.7), (2.8), (2.11) и (2.12), получим

$$(\Phi(\{0\}), H_I \Phi(\{n_{\vec{k}}\})) = g u_n \prod_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}}!\,(2V\omega_{\vec{k}})^{n_{\vec{k}}}}}, \tag{2.20}$$

где $n = \sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}}$.

Подставляя (2.20) в (2.19) и проводя некоторые простые преобразования, можно получить

$$E_0^{(2)} = -g^2 \int_0^{\infty} dt\, R(t), \tag{2.21}$$

$$R(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n^2}{n!} \Delta^n(t), \tag{2.22}$$

где

$$\Delta(t) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{e^{-t\omega_{\vec{k}}}}{2\omega_{\vec{k}}} \xrightarrow[V\to\infty]{} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{k}\, e^{-t\omega}}{2\omega} \underset{t\to 0}{\approx} \frac{1}{t^2}.$$

Ряд для функции $R(t)$ сходится при любом t в силу условия (2.16), но при $t \to 0$ очень сильно растет; так, для гамильтониана взаимодействия (2.17)

$$R(t) \underset{t\to 0}{\approx} \exp\left\{ a \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{1-2\sigma}} \right\},$$

где a – некоторая положительная константа.

Таким образом, для класса лагранжианов, для которых $:U(\phi):$ является функцией ϕ; при точечном взаимодействии ультрафиолетовые расходимости в теории возмущений не только не устраняются, но и являются существенно более сильными, чем в обычных неперенормируемых термах с $H_I(\phi)$, имеющими вид полинома.

Итак, получен отрицательный ответ на вопрос, возможно ли в квантовой теории поля считать H_I аналогом обычного потенциала в уравнении Шредингера. Это означает, что влияние бесконечного числа степеней свободы поля чрезвычайно велико и таково, что стационарные состояния полного гамильтониана H не разлагаются по стационарным состояниям H_0.

В случае же гамильтонианов, рассматриваемых в[1-3], где $u_m \approx m!$ при $m \to \infty$ ряд (2.22) для $R(t)$ расходится при любых t, но оказывается, что он суммируем к функции, которая убывает при $t \to 0$, так что поправка к энергии $E_0^{(2)}$ оказывается конечной.

3. Функциональные методы и "конечные" лагранжианы взаимодействия

В этом разделе применим к исследуемой модели функциональные методы работ[1-3], где было показано, что возможно построить теорию возмущений без ультрафиолетовых расходимостей для класса гамильтонианов взаимодействия $H_I(\phi) = g\,U(\phi)$, где $U(\alpha)$, рассматриваемая как функция комплексного α, обладает следующими свойствами:

I. $U(\alpha)$ аналитическая в комплексной плоскости α с конечным числом разрезов, причем интеграл от $|U(\alpha)|$ существует по любой ограниченной области.

II. $U(\alpha)$ действительна, не имеет особенностей на действительной оси и разлагается в ряд Тейлора (2.11) в точке $a = 0$.

III. $U(a)$ на бесконечности удовлетворяет условию

$$\lim_{|a| \to \infty} \frac{U(a)}{a^2} = 0 .$$

Как следует из проведенного выше рассмотрения, для этого класса лагранжианов не существует функции: $U(\phi)$:, т.е. в уравнении Шредингера (2.6) стоит не потенциал $: U(\phi):$, а некоторый расходящийся формальный ряд (2.14).

Рассматривается выражение для S -матрицы в представлении взаимодействия

$$S = T \exp\{-ig \int_{-\infty}^{\infty} dt\, U(\phi(t))\} , \tag{3.1}$$

где

$$\phi(t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2\omega}} \left(a_{\vec{k}} e^{i\omega t} + a^{+}_{\vec{k}} e^{-i\omega t} \right) ; \quad [a_{\vec{k}}, a^{+}_{\vec{k}'}] = \delta(\vec{k} - \vec{k}') .$$

Предполагается, что лагранжиан взаимодействия $U(\phi)$ стоит в нормальной форме. Как это учитывается, увидим ниже.

Основная задача теории – найти S -матрицу, разложенную в ряд по нормальным произведениям оператора поля $\phi(t)$, т.е.

$$S = \sum_m \frac{1}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int dt_m\, S_m(t_1, \dots, t_m) : \phi(t_1) \dots \phi(t_m): . \tag{3.2}$$

Если известны коэффициенты разложения $S_m(t_1, \dots, t_m)$, то амплитуды различных физических процессов будут фурье-образами этих функций

$$F_m(E_1, \dots, E_m) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int dt_m\, e^{i(E_1 t_1 + \dots + E_m t_m)} S_m(t_1, \dots, t_m) . \tag{3.3}$$

Переход к нормальному произведению в (3.1) осуществим при помощи теоремы Вика, записанной в функциональной форме /9/:

$$S = \exp\{ \tfrac{1}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2\, \Delta_o(t_1 - t_2) \frac{\delta^2}{\delta\phi(t_1)\delta\phi(t_2)} \} \exp\{-ig \int_{-\infty}^{\infty} dt\, U(\phi(t))\} , \tag{3.4}$$

где

$$\Delta_o(t_1 - t_2) = \langle 0 | T(\phi(t_1)\phi(t_2)) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{k}}{2\omega} e^{-i\omega|t_1 - t_2|} \tag{3.5}$$

Разложим S -матрицу в ряд по g, так как наша задача – построить конечную теорию возмущений. Имеем:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ig)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int dt_n\, R_n(t_1, \dots, t_n) , \tag{3.6}$$

где

$$R_n(t_1, \dots, t_n) = \exp\{ \tfrac{1}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} dr_1 dr_2\, \Delta_o(r_1 - r_2) \frac{\delta^2}{\delta\phi(r_1)\delta\phi(r_2)} \} U(\phi(t_1)) \dots U(\phi(t_n)) =$$

$$= \exp\{ \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \Delta_o(t_i - t_j) \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j} \} U(a_1) \dots U(a_n) \Big|_{a_j = \phi(t_j)} . \tag{3.7}$$

Диагональные члены в сумме, стоящей в экспоненте, $\sum_{i=1}^{n} \Delta_o(0) \frac{\partial^2}{\partial a_i^2}$ отбрасываются. Именно в этом пункте формально учитывается, что $U(\phi)$ взято в нормальной форме. На языке обычной теории возмущений отбрасываются спаривания между операторами $\phi(t)$ в один и тот же момент времени. Окончательно

$$R_n(t_1, \dots, t_n) = \exp\{ \sum_{1 \le i < j \le n} \Delta_o(t_i - t_j) \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j} \} U(a_1) \dots U(a_n) \Big|_{a_j = \phi(t_j)} . \tag{3.8}$$

Задача сводится к отысканию радиационных операторов $F^{(n)}_{m_1 \dots m_n}$ в разложении

$$R_n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{m_1 \dots m_n} F^{(n)}_{m_1 \dots m_n}(\Delta_o(t_i - t_j)) : \frac{\phi^{m_1}(t_1) \dots \phi^{m_n}(t_n)}{m_1! \dots m_n!} : . \tag{3.9}$$

При дальнейших выкладках чрезвычайно существенно считать, что функции $\Delta_o(t_i - t_j)$ являются вещественными и положительными, в то время как причинная функция $\Delta_o(t)$ является комплексной достаточно сложного вида (3.5). К счастью, существует единственная возможность, при которой функции $\Delta_o(t)$ становятся вещественными и положительными, – это переход к "эвклидовой" метрике, основанный на том факте, что для любой амплитуды любого физического процесса $F_n(E_1, \dots, E_n)$ всегда существует такая область переменных $(E_1, \dots, E_n)$, где эта амплитуда вещественна. В ралятивистской теории эта область называется эвклидовой. В рассматриваемой модели амплитуды будут определяться фурье-интегралами от радиационных операторов $F^{(n)}_{m_1 \dots m_n}(\Delta_o(t_i - t_j))$ в (3.9)

$$\tilde{F}^{(n)}_{m_1 \dots m_n}(E_1, \dots, E_n) = -2\pi(-i)^{n+1} \delta(E_1 + \dots + E_n) f^{(n)}_{m_1 \dots m_n}(E_1, \dots, E_n) , \tag{3.10}$$

$$f^{(n)}_{m_1\dots m_n}(E_1,\dots,E_n) = n\, i^{n-1}\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int dt_n\, \delta(t_1+\dots+t_n)\, e^{i(E_1 t_1+\dots+E_n t_n)}\, F^{(n)}_{m_1\dots m_n}(\Delta_0(t_i-t_j)). \quad (3.11)$$

"Эвклидова" область в этом случае – это область достаточно малых E_j. Переход к вещественному выражению осуществляется заменой $t_j \to -it_j$ и

$$f^{(n)}_{m_1\dots m_n}(E_1,\dots,E_n) = n\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int dt_n\, \delta(t_1+\dots+t_n)\, e^{E_1 t_1+\dots+E_n t_n}\, F^{(n)}_{m_1\dots m_n}(\Delta(t_i-t_j)), \quad (3.12)$$

$$\Delta(t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d\vec{k}}{2\omega}\, e^{-\omega|t|}, \quad (3.13)$$

$\Delta(t)$ – вещественна и положительна.

Существенно, что формулу (3.12) нельзя получить из (3.11) сдвигом контура $t_j \to -it_j'$ при $F^{(n)}_{m_1\dots m_n}(\Delta_{ij})$, имеющих существенную особенность при $\Delta_{ij} = 0$. Поэтому будем рассматривать (3.12) как исходное выражение для амплитуды, а переход в физическую область будем осуществлять аналитическим продолжением по переменным E_j.

Таким образом, мы видим, что переход к "эвклидовой" метрике не является только вопросом удобства рассмотрения, а внутренне присущ применяемому методу исследования нелинейных взаимодействий.

Итак, будем считать, что в (3.8) вместо причинных функций $\Delta_0(t)$ стоят $\Delta(t)$ (3.13). Чтобы найти разложение (3.9) из (3.8), воспользуемся операторным равенством:

$$\exp\left\{\Delta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial a_i\, \partial a_j}\right\} = \frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} d\sigma_{ij}\, d\sigma_{ji}\, \exp\left\{-\sigma_{ij}^2-\sigma_{ji}^2+\sqrt{\Delta(t_i-t_j)}\left[(\sigma_{ij}+i\sigma_{ji})\frac{\partial}{\partial a_i} + (\sigma_{ij}-i\sigma_{ji})\frac{\partial}{\partial a_j}\right]\right\}. \quad (3.14)$$

Подставляя (3.14) в (3.8) и учитывая, что в (3.14) под интегралом стоят операторы сдвига по переменным a_j, получим

$$R_n(t_1,\dots,t_n) = \pi^{-\frac{n(n-1)}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int \prod_{1\le i<j\le n} d\sigma_{ij}\cdot \exp\left\{-\sum_{1\le i<j\le n}\sigma_{ij}^2\right\}\times$$
$$\times\prod_{\ell=1}^{n} U\left(a_\ell + \sum_{1\le j<\ell}\sqrt{\Delta(t_\ell-t_j)}(\sigma_{j\ell}+i\sigma_{\ell j}) + \sum_{\ell<j\le n}\sqrt{\Delta(t_i-t_\ell)}(\sigma_{\ell j}-i\sigma_{j\ell})\right)\Big|_{a_\ell=\phi(t_\ell)}. \quad (3.15)$$

Полученное выражение достаточно сложно, однако можно убедиться, что свойства (I) и (III) обеспечивают сходимость этого интеграла при любых n. Разлагая R_n в ряд по $a = \phi(t)$, можно получить радиационные операторы $F^{(n)}_{m_1\dots m_n}(\Delta(t_i-t_j))$. Ультрафиолетовые расходимости также будут отсутствовать в силу условия (III). Таким образом, задача разложения S -матрицы в ряд по степеням нормальных произведений оператора поля $\phi(t)$ выполнена в рамках теории возмущений.

Однако существенно отметить, что операторы (3.14) не определены на рассматриваемом классе функций $U(a)$, так что операция сдвига, приведшая к (3.15) математически некорректна. Это означает, что ряды для радиационных операторов $F^{(n)}_{m_1\dots m_n}(\Delta(t_i-t_j))$ по $\Delta(t_i-t_j)$ расходятся при любых значениях $\Delta(t_i-t_j)$, т.е. являются асимптотическими. Предлагаемый функциональный метод является просто некоторым способом суммирования этих расходящихся рядов. Известно [10], что любая процедура суммирования расходящихся рядов неоднозначна, причем различные методы суммирования могут приводить к различным функциям[x]. Однозначность может быть восстановлена, если накладывать дополнительные условия на получаемые функции. Это существенный вопрос, так как заранее не ясно, являются ли условия унитарности и причинности достаточными условиями для однозначного определения радиационных операторов $F^{(n)}_{m_1\dots m_n}$.

В качестве примера приведем амплитуду рассеяния бозона на источнике во втором порядке теории возмущений в случае взаимодействия

$$H_I = g\int d\vec{x}\,\delta(\vec{x})\frac{\phi(x)}{\sqrt{1+f\phi^2(\vec{x})}}. \quad (3.16)$$

Согласно (3.12) получим

$$f^{(2)}_{11}(E) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{Et}\, F^{(2)}_{11}(\Delta(t)). \quad (3.17)$$

Явное выражение для радиационного оператора $F^{(2)}_{11}(\Delta(t))$ следует из результатов работы [1].

$$F^{(2)}_{11}(\Delta) = g^2\int_0^{\infty}\frac{dx\,\mathcal{J}_0(x)[1-2x^2f^2\Delta^2(t)]}{(1+x^2f^2\Delta^2(t))^{5/2}} \quad (3.18)$$

и

$$f^{(2)}_{11}(E) = g^2\int_0^{\infty} dt\,\mathrm{Ch}\,Et\int_0^{\infty}\frac{dx\,\mathcal{J}_0(x)[1-2x^2f^2\Delta^2(t)]}{[1+x^2f^2\Delta^2(t)]^{5/2}}. \quad (3.19)$$

---

x/ Раскрытие оператора (3.8) переходом к диагональной форме [2] в $\sum_{i<j}\Delta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial a_i\partial a_j} = \sum_j \lambda_j\frac{\partial^2}{\partial\beta_j^2}$ и использование затем формул типа (3.14) в силу сказанного выше может привести к тому, что полученные таким способом функции $F^{(n)}_{m_1\dots m_n}$ будут отличаться от (3.15).

Полученный интеграл сходится для $|E| < 2\mu$, т.е. амплитуда действительна до порога рождения второго мезона. Аналитическое продолжение по E может быть сделано также, как и в релятивистском случае /4/ и для мнимой части $f_{11}^{(2)}(E)$ можно получить

$$\Im_m f_{11}^{(2)}(E) = g^2 \sum_{n=1}^{\left[\frac{E}{2}\right]} \frac{u_{n+1}^2}{n!} \Omega_n(E),$$

где

$$\Omega_n(E) = \frac{1}{(2\pi)^{3n}} \int \frac{d\vec{k}_1}{2\omega_1} \ldots \int \frac{d\vec{k}_{2n}}{2\omega_{2n}} \delta(E - \omega_1 - \ldots - \omega_{2n}).$$

Унитарность выполнена в этом порядке, а асимптотика мнимой части может быть найдена методом, аналогичным использованному в /4/

$$\Im m\, f_{11}^{(2)}(E) \approx e^{\frac{E \ln E}{2}} a(E) \qquad (E \ln E > 1),$$

где $a(E)$ -функция более слабого роста, E - в единицах массы μ.

Заключение

Проведенное исследование показало, что в рассмотренной модели, как и в релятивистской теории, имеет место теорема Хаага, т.е. не существует $S(t,-\infty)$ матрицы для конечных t, и стационарные состояния полного гамильтониана не разлагаются в ряд по стационарным состояниям свободного. Однако это не противоречит существованию полной S -матрицы перехода между асимптотически свободными состояниями. Оказалось возможным построить конечную S -матрицу по степеням взаимодействия для определенного класса лагранжианов, хотя еще не доказана унитарность в высших порядках. При этом используемые математические методы не корректны. Весьма вероятно, что по одному и тому же лагранжиану возможно получить различные конечные S -матрицы, используя различные методы расчета. Вопрос однозначности чрезвычайно важен. Однако нам представляется существенным показать, что в рамках какого-либо метода возможно построить по нелинейному локальному лагранжиану S -матрицу, которая во всех порядках теории возмущений удовлетворяла бы физическим условиям унитарности и причинности.

В заключение автор выражает благодарность проф. Д.И. Блохинцеву, И.Т. Тодорову и Е.С. Фрадкину за полезные обсуждения.

Литература

1. Г.В. Ефимов. ЖЭТФ, 44, 2107 (1963).
2. F.S. Fradkin. Nucl. Phys., 49, 624 (1963).

3. J.V. Efimov. Nuovo Cimento., 32, 1046 (1963).
4. М.К. Волков, Г.В. Ефимов. Препринт ОИЯИ, Р-1638, Дубна, 1964.
5. L. Van Hove. Physica, 18, 145 (1952).
6. R. Haag. Mat., Fys. Medd, 29, N 12 (1955).
7. С. Качмаж, Г. Шнейнгауз. Теория ортогональных рядов, Физматгиз, Москва (1958).
8. И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. Обобщенные функции, Вып. 2, Физматгиз, Москва (1958).
9. S. Hori. Progr. Theor. Phys., 7, 578 (1952).
перев. ПСФ, 3, (1953).
10. Г. Харди. Расходящиеся ряды, ИИЛ, Москва (1951).

Рукопись поступила в издательский отдел
17 июля 1964 г.