ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-1777

Д.Ц. Стоянов

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

О РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

1964

Р-1777

Д.Ц. Стоянов

О РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

В работе[3] рассматривалась нерелятивистская задача трех тел, когда частицы взаимодействуют между собой парным потенциалом и получены системы уравнений для амплитуды рассеяния вне энергетической поверхности, а также для волновых функций в случае рассеяния трех частиц без образования трехчастичных связанных состояний. Одним из главных достоинств этих уравнений является то обстоятельство, что их коэффициенты выражаются только через двухчастичные амплитуды рассеяния вне энергетической поверхности.

В этой работе мы сделаем попытку показать, каким образом можно получить аналогичные уравнения в релятивистской задаче трех тел. Исходным пунктом наших рассмотрений будет трехчастичное уравнение Бете-Сальпетера, к обсуждению которого мы и переходим.

1. Уравнение Бете-Сальпетера для трех частиц

Рассмотрим три поля $\psi_1(x_1)$, $\psi_2(x_2)$ и $\psi_3(x_3)$ с массами m_1, m_2 и m_3, соответственно, взаимодействующие между собой посредством поля с массой μ. Полная функция Грина этих частиц (с соответствующими полями ψ_1, ψ_2 и ψ_3) по определению есть сумма вкладов всех диаграмм Фейнмана с тремя входящими и тремя выходящими линиями с массами m_1, m_2 и m_3, соответственно. При этом будем считать, что линия каждой частицы с массой m_i в каждой диаграмме Фейнмана является непрерывной, и что среди частиц m_1, m_2 и m_3 нет античастиц. Вклад каждой диаграммы в полную функцию Грина представим через

$$\tilde{G}^{(3)}(x_1 x_2 x_3 y_1 y_2 y_3) = \int du_1 du_2 du_3 dv_1 dv_2 dv_3 S_1(x_1 - u_1) S_2(x_2 - u_2) S_3(x_3 - u_3) \times \tag{1.1}$$
$$\times \bar{G}^{(3)}(u_1 u_2 u_3 v_1 v_2 v_3) S_1(v_1 - y_1) S_2(v_2 - y_2) S_3(v_3 - y_3),$$

где $S_i(x_i - y_i)$ функция Грина голой частицы с массой m_i. Назовем $\bar{G}^{(3)}(u_1 u_2 u_3 v_1 v_2 v_3)$ ядром диаграммы. Ядро $\bar{G}^{(3)}$ назовем тривиальным, если оно является ядром диаграммы, описывающей распространение трех голых частиц. Если в диаграмме $\tilde{G}^{(3)}$ имеется несвязанная часть, описывающая распространение голой частицы с массой m_i, то как нетрудно видеть, ядро такой диаграммы можно представить в виде:

$$\bar{G}^{(3)}(x_1x_2x_3y_1y_2y_3) = S_i^{-1}(x_i - y_i)\,\bar{G}^{(2)}(x_k x_\ell y_k y_\ell), \qquad (i \neq k \neq \ell) = 1,2,3 \tag{1.2}$$

где $S_i^{-1}(x_i - y_i)$ – функция, обратная функции $S_i(x_i - y_i)$ т.е.

$$\int dy_i\, S_i^{-1}(x_i - y_i)\, S_i(y_i - z_i) = \delta(x_i - z_i). \tag{1.3}$$

Диаграмму $\bar{G}^{(3)}$ назовем приводимой, если ее можно представить в виде

$$\begin{aligned} \bar{G}^{(3)}(x_1x_2x_3y_1y_2y_3) = &\int (du_i)(dv_i)(dw_i)(dw_i')\, S_1(x_1-u_1)\, S_2(x_2-u_2)\, S_3(x_3-u_3)\times \\ &\times \bar{G}_1^{(3)}(u_1u_2u_3v_1v_2v_3)\, S_1(v_1-w_1)\, S_2(v_2-w_2)\, S_3(v_3-w_3)\times \\ &\times \bar{G}_2^{(3)}(w_1w_2w_3w_1'w_2'w_3')\, S_1(w_1'-y_1)\, S_2(w_2'-y_2)\, S_3(w_3'-y_3). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Представление (1.4) нетривиально, если ни $\bar{G}_1^{(3)}$ ни $\bar{G}_2^{(3)}$ не являются тривиальными ядрами. Наоборот, если все представления (1.4) данной диаграммы являются тривиальными, то такую диаграмму назовем неприводимой. Если мы знаем совокупность всех неприводимых диаграмм, то каждую приводимую диаграмму можно получить, пользуясь многократным применением равенства (1.4), где $\bar{G}_i^{(3)}$ уже будут ядра некоторых неприводимых диаграмм. Таким образом, если $g(x_1x_2x_3y_1y_2y_3)$ – сумма всех трехчастичных диаграмм, то каждая неприводимая или приводимая диаграмма получится как член ряда, полученный итерированием равенства

$$\begin{aligned} g(x_1x_2x_3y_1y_2y_3) = &\, g_0(x_1x_2x_3y_1y_2y_3) + \\ &+ \int (du_i)(dv_i)\, g_0(x_1x_2x_3u_1u_2u_3)\, K(u_1u_2u_3v_1v_2v_3)\, g(v_1v_2v_3y_1y_2y_3), \end{aligned} \tag{1.5}$$

где $K(u_1u_2u_3v_1v_2v_3)$ – сумма ядер всех неприводимых диаграмм и $g_0(x_1x_2x_3y_1y_2y_3)$ – гриновая функция трех голых частиц $- g_0(x_1x_2x_3y_1y_2y_3) = S_1(x_1-y_1)\, S_2(x_2-y_2)\, S_3(x_3-y_3)$.

Поскольку в K не содержится всей совокупности трехчастичных диаграмм, то очевидно, что равенство (1.5) представляет собой уравнение для $g(x_1x_2x_3y_1y_2y_3)$, которое является аналогом уравнения Бете–Сальпетера /1,2/.

В дальнейшем мы будем пользоваться уравнением (1.5), записанным в символической форме

$$g = g_0 + g_0 K g. \tag{1.6}$$

Теперь покажем, как из уравнения (1.6) получать другие формы этого уравнения. Пусть $K = K_1 + K_2$. Тогда рассмотрим величину g', удовлетворяющую уравнению

$$g' = g_0' + g_0' K_2 g', \tag{1.7}$$

где g_0' – решение уравнения

$$g_0' = g_0 + g_0 K_1 g_0'. \tag{1.8}$$

Непосредственной подстановкой (1.8) в (1.7) убеждаемся, что g' удовлетворяет уравнение (1.6). Поэтому $g' = g$. Можно поступить и по-другому. Непосредственно можно убедится, что если g и g_0' являются решениями уравнений (1.6) и (1.8), соответственно, то величина $g - g_0' \cdot K_2 g$ удовлетворяет уравнение (1.8) и, следовательно, $g - g_0' \cdot K_2 g = g_0'$, которое в свою очередь совпадает с (1.7). Такой подход позволяет получить разные модификации уравнения (1.6).

2. Случай парных взаимодействий

В дальнейшем нами будет рассмотрено приближение для полной трехчастичной функции Грина, в котором учитываются только парные взаимодействия трех частиц. В этом случае ядро уравнения (1.6) представляется в виде:

$$K = K_{23} + K_{31} + K_{12} , \tag{2.1}$$

где

$$K_{ij} = S_\ell^{-1}(x_\ell - y_\ell)\, \bar{G}_{ij}(x_i x_j y_i y_j) \quad (i \neq j \neq \ell) = 1,2,3, \tag{2.2}$$

а $\bar{G}_{ij}$ - бете-сальпетеровское ядро для i -той и j -той частиц. Если (2.1) подставить в (1.6), то получим

$$g = g_0 + g_0 K_{23} g + g_0 K_{31} g + g_0 K_{12} g = g_0 + g_1 + g_2 + g_3 , \tag{2.3}$$

где

$$g_1 = g_0 K_{23} g \; ; \qquad g_2 = g_0 K_{31} g \; ; \qquad g_3 = g_0 K_{12} g \; . \tag{2.4}$$

Если ввести гринообразные функции, удовлетворяющие уравнения

$$g_{ik} = g_0 + g_0 K_{ik} g_{ik} \quad (i \neq k) = 1,2,3, \tag{2.5}$$

то можно получить три разные модификации уравнения (1.6) в случае (2.1)

$$\begin{aligned} g &= g_{23} + g_{23}(K_{31} + K_{12})\, g = g_{31} + g_{31}(K_{12} + K_{23})\, g = \\ &= g_{12} + g_{12}(K_{23} + K_{31})\, g \; . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Введем величины T_{ik} , удовлетворяющие уравнениям

$$T_{ik} = K_{ik} + K_{ik}\, g_0\, T_{ik} \qquad (i \neq k) = 1,2,3. \tag{2.7}$$

Имея в виду (2.2), (2.5) и то, что

$$g_{ik} = S_\ell(x_\ell - y_\ell)\, K_F(x_i x_k y_i y_k) \quad (i \neq k \neq \ell) = 1,2,3, \tag{2.8}$$

получаем, что

$$g_{ik} = g_0 + g_0 T_{ik} g_0 \, , \tag{2.9}$$

и, следовательно, T_{ik} совпадает с амплитудой рассеяния i -той и k -той частицы, причем ℓ -тая частица "голая". Легко получить, что

$$T_{ik} = S_\ell^{-1}(x_\ell - y_\ell)\, T_{ik}^{(2)}(x_i x_k y_i y_k) , \tag{2.10}$$

где $T^{(2)}_{ik}$ – двухчастичная амплитуда рассеяния. Таким образом, если допустить, что мы умеем решать двухчастичную задачу, то следует считать g_{ik} и T_{ik} известными. Теперь мы можем получить уравнения для g_1, g_2 и g_3, определенные равенствами (2.4). Так, например, если в первое из (2.4) подставить g из первого равенства (2.6), то получим

$$g_1 = g_0 K_{23} g_{23} + g_0 K_{23} g_{23} (K_{31} + K_{12}) g \ . \tag{2.11}$$

Если теперь в первый член правой части равенства (2.11) подставить g_{23} из (2.5), а во второй – g_{23} из (2.9) и воспользоваться равенствами (2.7) и (2.4), то получим

$$g_1 = g_{23} - g_0 + g_0 T_{23} (g_2 + g_3) \ . \tag{2.12}$$

Таким же образом получаем и два других уравнения:

$$\begin{aligned} g_2 &= g_{31} - g_0 + g_0 T_{31} (g_3 + g_1) \ , \\ g_3 &= g_{12} - g_0 + g_0 T_{12} (g_1 + g_2) \ . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Систему уравнений (2.13) и (2.12) можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{23} - g_0 \\ g_{31} - g_0 \\ g_{12} - g_0 \end{pmatrix} + g_0 \begin{pmatrix} 0 & T_{23} & T_{23} \\ T_{31} & 0 & T_{31} \\ T_{12} & T_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} . \tag{2.14}$$

Система (2.14) определена, поскольку мы допустили, что умеем решать двухчастичную задачу. Та же система получается, если не пользоваться равенствами (2.6), а только применить метод итерации уравнения (2.3) с последующей перестройкой получившегося ряда.

3. Уравнения для волновых функций

Прежде всего отметим, что волновые функции, которые будут вводиться, не следует понимать как таковые в обычном смысле. Их введение нам кажется удобным, для того чтобы с их помощью получить те величины поля, которые имеют определенный физический смысл. Волновую функцию определим (как это делается обычно) через равенства:

$$\chi_k (x_1 x_2 x_3) = \langle 0 | \ T \ \psi_1 (x_1) \ \psi_2 (x_2) \ \psi_3 (x_3) \, | k \rangle \ , \tag{3.1}$$

где T означает хронологическое произведение операторов поля $\psi_1(x_1)$, $\psi_2(x_2)$ и $\psi_3(x_3)$ в гейзенберговском представлении, а $\langle 0|$ и $\langle k|$ суть состояние вакуума и состояние полного оператора энергии-импульса соответственно. В п. 5 мы еще раз вернемся к этим состояниям, чтобы их конкретизировать. Состояние $\langle k|$ зависит, очевидно, и от дискретных квантовых чисел, которые мы здесь опускаем. Мы также не будем явным образом выписывать суммы по этим числам в формулах, где они появляются, – мы будем их подразумевать. Тогда, исходя из обычного определения полной функции Грина, имеем:

$$g(x_1 x_2 x_3 y_1 y_2 y_3) = \langle 0|\ T\ \psi_1(x_1)\,\psi_2(x_2)\,\psi_3(x_3)\,\bar{\psi}_1(y_1)\bar{\psi}_2(y_2)\,\bar{\psi}_3(y_3)|0\rangle, \tag{3.2}$$

где $\bar{\psi}_i(x_i)$ означает какое-нибудь сопряжение.

$$\bar{\psi}_i(x_i) = \psi_i^*(x_i)\ O_i, \tag{3.3}$$

где $\psi_i^*(x_i)$– оператор, эрмитово-сопряженный с оператором $\psi_i(x_i)$, а O_i – какая-либо матрица. В случае $x_{10}\, x_{20} x_{30} > y_{10} y_{20} y_{30}$

$$g(x_1 x_2 x_3 y_1 y_2 y_3) = \sum_k \chi_k(x_1 x_2 x_3)\ \chi_k^+(y_1 y_2 y_3). \tag{3.4}$$

Здесь через $\chi_k^+(y_1 y_2 y_3)$ мы обозначили выражение

$$\chi_k^+(y_1 y_2 y_3) = \langle k|\ T\ \bar{\psi}_1(y_1)\ \bar{\psi}_2(y_2)\ \bar{\psi}_3(y_3)|0\rangle = \tag{3.5}$$

$$= (\langle 0|\ \overset{*}{T}\ \psi_1(y_1)\ \psi_2(y_2)\ \psi_3(y_3)|k\rangle)^* O_1 O_2 O_3,$$

где $\overset{*}{T}$ означает антихронологическое произведение операторов ψ_1, ψ_2 и ψ_3. В дальнейшем мы уже не будем выписывать матрицы O_i, поскольку от них можно избавиться умножением на матрицу, обратную к матрице $O_1 O_2 O_3$. В частности, можно считать, что эти матрицы единичные. Рассмотрим теперь выражение для $\chi_k^+(x_1 x_2 x_3)$. Если $x_{20}\, x_{30} < x_{10}$, тогда

$$\chi_k^+(x_1 x_2 x_3) = \sum_p \langle 0|\ \overset{*}{T}\ \psi_2(x_2)\ \psi_3(x_3)|p\rangle^* \langle p|\psi_1(x_1)|k\rangle^*. \tag{3.6}$$

Поскольку выражение $\langle 0|\ \overset{*}{T}\ \psi_2(x_2)\,\psi_3(x_3)|p\rangle^*$ совпадает с $\chi_p^{(2)+}(x_2 x_3)$, являющейся волновой функцией двух частиц (бете-сальпетеровская функция), то $\langle p|$ будут содержать такие состояния, в которых имеется связанное состояние второй и третьей частицы (СС-2,3). Если имеется другое соотношение времен x_{10}, x_{20} и x_{30}, то промежуточные состояния, по которым χ_k^+ будет раскладываться, уже не будут содержать СС-2,3. Это следует из законов сохранения, например, какого-нибудь заряда (непрерывность линии каждой частицы). Так, например, из этих законов следует, что $\langle 0|\ T\ \psi_3(x_3)\psi_1(x_1)|p\rangle = 0$, если состояние $|p\rangle$ содержит СС-2,3. Тогда, если СС-2,3 характеризуется массой μ_{23}, то воспользовавшись трансляционной инвариантностью теории, можно выделить в (3.6) вклад СС-2,3:

$$\chi_k^+(y_1 y_2 y_3) = \int dp\ \frac{e^{ip Y_{23}} f_p(y_2 - y_3)\ e^{i(k-p)y_1} \langle p|\psi_1(0)|k\rangle^*}{2E_{23}(\vec{p})(p_0 - E_{23}(\vec{p}) + i\epsilon)} \tag{3.7}$$

+ члены не содержащие СС-2,3,

где $E_{23}(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + \mu_{23}^2}$ $\qquad Y_{23} = \dfrac{m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_2 + m_3}$.

Здесь $f_p^+(y_2 - y_3)$ связано с двухчастичной волновой функцией формулой

$$\chi_p^{(2)^+}(y_2 y_3) = e^{ip Y_{23}} f_p^+(y_2 - y_3) , \tag{3.8}$$

которая непосредственно следует из формулы преобразования $\chi_p^{(2)^+}(y_2 y_3)$, если сдвинуть аргументы y_2 и y_3 на $-Y_{23}$.

Если теперь в системе (2.14) устремить все аргументы y_{10} , y_{20} и y_{30} к $-\infty$ так, чтобы $y_{20} - y_{30}$ осталась конечной, то тогда в этой системе (после того как g_1, g_2 и g_3 мы выразили через (2.4)) вместо g будет стоять равный ему член из (3.4) так как, поскольку y_{10} , y_{20} и $y_{30} \to -\infty$, всегда выполняется

$$x_{10} x_{20} x_{30} > y_{10} y_{20} y_{30} . \tag{3.9}$$

Нам необходимо знать как ведет себя $\chi_k^+(y_1 y_2 y_3)$, когда y_{10} , y_{20} и $y_{30} \to -\infty$. Если считать, что в начальном состоянии имеется СС-2,3 и одна свободная частица с положительной энергией, то следует положить:

$$\langle p \mid \psi_1(0) \mid k \rangle = \theta(k_0 - p_0)\,\delta((k-p)^2 - m_1^2) . \tag{3.10}$$

Если в таком пределе вводить переменные по формулам

$$X = M^{-1}(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3); \qquad \xi_1 = (m_2 + m_3)^{-1}(m_2 x_2 + m_3 x_3) - x_1 = \tag{3.11}$$

$$= X_{23} - x_1 ; \qquad \xi_{23} = x_2 - x_3 ; \qquad M = m_1 + m_2 + m_3 ,$$

то для $g(X - Y \xi_{23} \xi_1 \eta_{23} \eta_1)$ получаем выражение

$$g(X - Y \xi_{23} \xi_1 \eta_{23} \eta_1) = \int g(k\ \xi_{23} \xi_1 \eta_{23}\ \ell)\, e^{-ik(X-Y)}\, e^{i(k\frac{m_1}{M} - \ell)\eta_1}\, dk\, d\ell , \tag{3.12}$$

где

$$g(k, \xi_{23} \xi_1 \eta_{23}\ \ell) = \chi_k(\xi_{23} \xi_1) \frac{f_{k-\ell}^+(\eta_{23})\,\delta(\ell_0 - E_1(\vec{\ell}))}{4E_{23}(\vec{k} - \vec{\ell})\, E_1(\vec{\ell})\,[k_0 - E_1(\vec{\ell}) - E_{23}(\vec{k} - \vec{\ell}) + i\epsilon]} +$$

$$+ \text{ члены регулярные в точке } k_0 = E_1(\vec{\ell}) + E_{23}(\vec{k} - \vec{\ell}) ; \quad (E_1(\vec{\ell}) = \sqrt{\vec{\ell}^{\,2} + m_1^2}),$$

и η_{23} и η_1 получаются из формул (3.11), если заменить x_i на y_i . Здесь $\chi_k(\xi_{23}\xi_1)$ связано с $\chi_k(x_1 x_2 x_3)$ равенством

$$\chi_k(x_1 x_2 x_3) = e^{-ikX}\, \chi_k(\xi_{23}, \xi_1) . \tag{3.13}$$

Подобным же образом для g_{23} в случае $y_{10} y_{20} y_{30} \to -\infty$ получаем:

$$g_{23}(X - Y\ \xi_{23} \xi_1\ \eta_{23} \eta_1) = \int g_{23}(k\ \xi_{23} \xi_1 \eta_{23}\ \ell)\, e^{-ik(X-Y)}\, e^{i(k\frac{m_1}{M} - \ell)\eta_1}\, dk\, d\ell ,$$

где

$$g_{23}(k\ \xi_{23} \xi_1\ \eta_{23}\ \ell) = \frac{i e^{i(\ell - k\frac{m_1}{M})\xi_1}\, \delta(\ell_0 - E_1(\vec{\ell}))\, f_{k-\ell}(\xi_{23})\, f_{k-\ell}^+(\eta_{23})}{(2\pi)^3\, 4E_{23}(\vec{k} - \vec{\ell})\, E_1(\vec{\ell})\,[k_0 - E_1(\vec{\ell}) - E_{23}(\vec{k} - \vec{\ell}) + i\epsilon]} \tag{3.14}$$

$$+ \text{ члены регулярные в точке } k_0 = E_1(\vec{\ell}) + E_{23}(\vec{k} - \vec{\ell}) .$$

Как видно из (3.12) и (3.14), члены, содержащие рассеяние частицы на связанном состоянии с массой μ_{23}, имеют полюса в точке $k_0 = E_1(\vec{\ell}) + E_{23}(\vec{k}-\vec{\ell})$. Поскольку g_0, g_{12} и g_{31} не содержат рассеяния на СС-2,3, то их представления, аналогичные представлениям (3.12) и (3.14), не будут содержать полюса в точке $k_0 = E_1(\vec{\ell}) + E_{23}(\vec{k}-\vec{\ell})$.

Теперь возьмем уравнение (2.12), в котором вместо g_1, g_2 и g_3 подставлены их значения из (2.4). Будем считать, что получившееся равенство записано в координатах (3.11) и необходимость в интегрировании по k исключена. Тогда получим:

$$\int \{g_0 K_{23}\}(k\,\xi_{23}\xi_1 u_{23}u_1)\, g(k\,u_{23}u_1\eta_{23}\ell)\, e^{i(k\frac{m_1}{M}-\ell)\eta_1}\, d\ell\, du_{23}\, du_1 =$$

$$= \int g_{23}(k\,\xi_{23}\xi_1\eta_{23}\ell)\, e^{i(k\frac{m_1}{M}-\ell)\eta_1}\, d\ell - \int g_0(k\,\xi_{23}\xi_1\eta_{23}\ell)\, e^{i(k\frac{m_1}{M}-\ell)\eta_1}\, d\ell + \tag{3.15}$$

$$+ \int \{g_0 T_{23} g_0 (K_{31}+K_{12})\}(k\,\xi_{23}\xi_1 u_{23}u_1)\, g(k\,u_{23}u_1 y_{23}\ell)\, e^{i(k\frac{m_1}{M}-\ell)\eta_1}\, d\ell\, du_{23}\, du_1 .$$

Если теперь избавиться и от интегрирования по ℓ и потом умножить равенство на $k_0 - E_1(\vec{\ell}) - E_{23}(\vec{k}-\vec{\ell}) + i\epsilon$, то в пределах $k_0 \to E_1(\vec{\ell}) + E_{23}(\vec{k}-\vec{\ell})$ и $\epsilon \to 0$ получим

$$\int \{g_0 K_{23}\}(k\,\xi_{23}\xi_1 u_{23}u_1)\, \chi_k(u_{23}u_1)\, du_{23}\, du_1 = \frac{i}{(2\pi)^3}\, e^{i(\ell-k\frac{m_1}{M})\xi_1}\, f_{k-\ell}(\xi_{23}) + \tag{3.16}$$

$$+ \int \{g_0 T_{23} g_0 (K_{31}+K_{12})\}(k\,\xi_{23}\xi_1 u_{23}u_1)\, \chi_k(u_{23}u_1)\, du_{23}\, du_1 .$$

Если вернуться к переменным x_i, то имеем

$$g_0 K_{23}\chi_k = \chi_{0k}^{23} + g_0 T_{23} g_0 (K_{31}+K_{12})\,\chi_k , \tag{3.17}$$

где

$$\chi_{0k}^{23} = e^{-i\ell x_1}\, \chi_{k-\ell}^{(2)}(x_2 x_3). \tag{3.18}$$

Здесь $\chi_{k-\ell}^{(2)}(x_2x_3)$ – двухчастичная волновая функция для СС-2,3. Полагая

$$g_0 K_{23}\chi_k = \chi_{1k}; \quad g_0 K_{31}\chi_k = \chi_{2k}; \quad g_0 K_{12}\chi_k = \chi_{3k}, \tag{3.19}$$

вместо (3.17) можно написать

$$\chi_{1k} = \chi_{0k}^{23} + g_0 T_{23}(\chi_{2k} + \chi_{3k}) , \tag{3.20}$$

Аналогичным образом из уравнений (2.13) получаются еще два уравнения:

$$\begin{aligned} \chi_{2k} &= g_0 T_{31}(\chi_{3k} + \chi_{1k}) , \\ \chi_{3k} &= g_0 T_{12}(\chi_{1k} + \chi_{2k}) . \end{aligned} \tag{3.21}$$

Таким образом, мы получили систему уравнений для χ_{1k}, χ_{2k} и χ_{3k} в случае рассеяния на СС-2,3:

$$\begin{pmatrix} \chi^{23}_{1k} \\ \chi^{23}_{2k} \\ \chi^{23}_{3k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^{23}_{0k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + g_0 \begin{pmatrix} 0 & T_{23} & T_{23} \\ T_{31} & 0 & T_{31} \\ T_{12} & T_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{23}_{1k} \\ \chi^{23}_{2k} \\ \chi^{23}_{3k} \end{pmatrix}, \qquad (3.22)$$

где значки 2,3 сверху означают, что мы имеем дело с СС-2,3. Теперь следует найти, как χ^{23}_{1k}, χ^{23}_{2k} и χ^{23}_{3k} связаны с волновой функцией, описывающей рассеяние на СС-2,3 - χ^{23}_{k}. Исходя из равенства (2.3) в предельном переходе y_{10}, y_{20}, $y_{30} \to \infty$ и совершая выкладки, аналогичные вышеприведенным, получаем

$$\chi^{23}_{k} = \chi^{23}_{1k} + \chi^{23}_{2k} + \chi^{23}_{3k}. \qquad (3.23)$$

Теперь выпишем общее уравнение в матричной форме для рассеяния на СС-i,j /(i,j) = (1,2) (2,3) (3,1)/:

$$\begin{pmatrix} \chi^{ij}_{1k} \\ \chi^{ij}_{2k} \\ \chi^{ij}_{3k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^{ij}_{0k} & \delta_{2i} & \delta_{3j} \\ \chi^{ij}_{0k} & \delta_{3q} & \delta_{1j} \\ \chi^{ij}_{0k} & \delta_{1i} & \delta_{2j} \end{pmatrix} + g_0 \begin{pmatrix} 0 & T_{23} & T_{23} \\ T_{31} & 0 & T_{31} \\ T_{12} & T_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{ij}_{1k} \\ \chi^{ij}_{2k} \\ \chi^{ij}_{3k} \end{pmatrix}. \qquad (3.24)$$

χ^{ij}_{0k} - решение двухчастичного уравнения Бете-Сальпетера для аргументов x_i и x_j и решение свободного уравнения для третьего аргумента. Уравнения (2.14) и (3.24) аналогичны уравнениям Фадеева /3/, полученным для рассеяния частицы на связанном состоянии в нерелятивистской квантовой механике. Если написать уравнения (3.24) в приближении мгновенного взаимодействия, то в нерелятивистском пределе они переходят в точные уравнения Фадеева. В этом смысле уравнения (3.24) являются релятивистскими обобщениями уравнений Фадеева.

4. Уравнения для $\overset{+}{\chi}_k (x_1 x_2 x_3)$

В предыдущем пункте мы обозначили через $\overset{+}{\chi}_k (x_1 x_2 x_3)$ величину

$$\overset{+}{\chi}_k (x_1 x_2 x_3) = \langle k | T \bar{\psi}_1 (x_1) \bar{\psi}_2(x_2) \bar{\psi}_3(x_3) | 0 \rangle . \qquad (4.1)$$

Из равенства (3.5) становится очевидным, что нельзя обнаружить прямую связь между $\overset{+}{\chi}_k (x_1 x_2 x_3)$ и $\chi_k (x_1 x_2 x_3)$. Поэтому в настоящем пункте мы получим уравнения для функции $\overset{+}{\chi}_k (x_1 x_2 x_3)$.

Воспользуемся тем, что трехчастичное уравнение Бете-Сальпетера (1.6) можно еще записать в виде:

$$g = g_0 + g K g_0. \qquad (4.2)$$

Непосредственно можно убедиться, что итерирование уравнений (1.6) и (4.2) приводит к одному и тому же результату

$$g = g_0 + g_0 K\ g_0 + \dots + g_0 K\ .\quad K\ g_0 + \dots$$

Тогда в случае парных взаимодействий имеем

$$g = g_0 + g\ K_2 g_0 + g\ K_3 g_0 + g K_1 g_0. \tag{4.3}$$

Эта форма записи g позволяет, как и в п.2, получить систему уравнений для некоторых величин $\overset{+}{g}_1$, $\overset{+}{g}_2$ и $\overset{+}{g}_3$. Так, например, можно положить, что

$$g = g_0 + \overset{+}{g}_1 + \overset{+}{g}_2 + \overset{+}{g}_3 \tag{4.4}$$

где в связи с (4.3) положено

$$\overset{+}{g}_1 = g K_{23} g_0\ ;\quad \overset{+}{g}_2 = g K_{31} g_0\ ;\quad \overset{+}{g}_3 = g K_{12} g_0. \tag{4.5}$$

Если ввести величины g_{ik} через уравнения

$$g_{ik} = g_0 + g_{ik} K_{ik} g_0\ , \tag{4.6}$$

то очевидно, что уравнения (4.6) совпадают с (2.5). Тогда можно выписать три разные модификации уравнений (4.3)

$$\begin{aligned} g = g_{23} + g\,(K_{31} + K_{12})\,g_{23} = g_{31} + g\,(K_{12} + K_{23})\,g_{31} = \\ = g_{12} + g\,(K_{23} + K_{31})\,g_{12}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

каждая из которых совпадает с соответствующей из (2.6). Проводя аналогичные п.2 выкладки, можно получить систему для $\overset{+}{g}_1$, $\overset{+}{g}_2$ и $\overset{+}{g}_3$. Эту систему мы запишем в матричной форме:

$$\begin{aligned} (\overset{+}{g}_1 \overset{+}{g}_2 \overset{+}{g}_3) = (g_{23} - g_0,\ \ g_{31} - g_0,\ \ g_{12} - g_0) + \\ + (\overset{+}{g}_1 \overset{+}{g}_2 \overset{+}{g}_3) \begin{pmatrix} 0 & T_{31} & T_{12} \\ T_{23} & 0 & T_{12} \\ T_{23} & T_{31} & 0 \end{pmatrix} g_0\,. \end{aligned} \tag{4.8}$$

В (4.8) величины T_{ik} те же самые, что и в (2.14) и, следовательно, уравнение (4.8) также определено, если считать, что двухчастичная задача известна. Уравнение (4.8) можно использовать для получения уравнения для $\overset{+}{\chi}_k$, когда имеется рассеяние частицы на двухчастичном связанном состоянии. Это можно сделать, применяя методику, проиллюстрированную в п.3. Только в этом случае следует сделать предельный переход конечных координат к $+\infty$, учитывая, что связанное состояние в этом пределе не распадается. Тогда мы получим:

$$\begin{aligned} (\chi_{1k}^{+ij}\ \ \chi_{2k}^{+ij}\ \ \chi_{3k}^{+ij}) = (\chi_{0k}^{+ij}\ \delta_{2i}\ \ \delta_{3j}\ ;\ \ \chi_{0k}^{+ij}\ \delta_{3i}\ \ \delta_{1j}\ ;\ \ \chi_{0k}^{+ij}\ \delta_{1i}\ \ \delta_{2j}) + \\ + (\chi_{1k}^{+ij}\ \ \chi_{2k}^{+ij}\ \ \chi_{3k}^{+ij}) \begin{pmatrix} 0 & T_{31} & T_{12} \\ T_{23} & 0 & T_{12} \\ T_{23} & T_{31} & 0 \end{pmatrix} g_0\,, \end{aligned} \tag{4.9}$$

где

$$\chi_{1k}^{+ij} + \chi_{2k}^{+ij} + \chi_{3k}^{+ij} = \chi_{k}^{+ij} . \qquad (4.10)$$

Значки i, j поставлены для того, чтобы отметить тот факт, что в конечном состоянии имеем связанное состояние i -той и j -той частицы.

5. Элементы S -матрицы, описывающие рассеяние частицы на связанном состоянии

При получении уравнения (3.22) мы воспользовались тем, что если $x_{10}, x_{20}, x_{30} > y_{10}, y_{20}, y_{30}$, то

$$g = \sum_{k} <0 | T\ \psi_1(x_1)\ \psi_2(x_2)\ \psi_3(x_3) |k><k| T\ \bar{\psi}_1(y_1) \bar{\psi}_2(y_2) \bar{\psi}_3(y_3) |0>. \qquad (5.1)$$

Потом, выделяя вклад всех рассеяний первой частицы на СС-2,3, получим

$$g = \sum_{|k_R>} <0| T\ \psi_1(x_1) \psi_2(x_2)\ \psi_3(x_3) |k_R><k_R| T\ \bar{\psi}_1(y_1) \bar{\psi}_2(y_2) \bar{\psi}_3(y_3) |0> + \qquad (5.2)$$

$$+ \text{ остальные члены} .$$

Состояния $<k_R|$, описывания рассеяния первой частицы на СС-2,3, являются собственными состояниями полного гамильтониана с непрерывными собственными значениями. Устремляя y_{10}, y_{20} и y_{30} к $-\infty$ для получения уравнения для χ_k, мы получаем еще, что эти состояния характеризуются собственным значением полного гамильтониана

$$k_{R0} = E_1 + E_{23}, \qquad (5.3)$$

т.е. это значение совпадает со значением энергии системы в начальном состоянии. Следовательно, уравнения (3.22) являются уравнениями для функции

$$\chi_k = <0| T\ \psi_1(x_1) \psi_2(x_2)\ \psi_3(x_3) | k_R^+ > , \qquad (5.4)$$

где $|k_R^+>$ -гайзенберговское состояние, отвечающее входящим волнам. Таким же образом можно еще получить, что

$$\chi_k^+ = {}^-<k_R| T\ \bar{\psi}_1(y_1)\ \bar{\psi}_2(y_2)\ \bar{\psi}_3(y_3) |0> , \qquad (5.5)$$

где ${}^-<k_R|$ - гейзенберговское состояние, отвечающее выходящим волнам. Это обстоятельство находится в согласии с полученными уравнениями для χ_k и χ_k^+. Из (3.22), например, видно, что χ_k определяется через χ_{0k}, т.е. волновую функцию начального состояния, а из (4.9) видно, что χ_k^+ определяется через волновую функцию конечного состояния χ_{0k}^+.

Чтобы получить матричные элементы рассеяния на связанном состоянии, очевидно, следует учесть, что как в начальном, так и в конечном состоянии имеется СС-2,3 и одна свободная частица.

Имея в виду (5.4), представим выражение $g_{23}(K_{31}+K_{12})g$ в виде

$$g_{23}(K_{31}+K_{12})g=\sum_{k_R} g_{23}(K_{31}+K_{12})\chi_k \overset{+}{<}k_R|T\bar{\psi}_1(y_1)\bar{\psi}_2(y_2)\bar{\psi}_3(y_3)|0>_{y_{10},y_{20},y_{30}\to-\infty}+ \tag{5.6}$$

$$+\text{ остальные члены.}$$

В этом выражении суммирование идет только по состояниям рассеяния частицы на СС-2,3, а суммирование по всем остальным состояниям мы отнесли к "остальным членам". Теперь, устремляя и x_{10}, x_{20} и x_{30} к $+\infty$,

$$g_{23}(K_{31}+K_{12})g=\sum_{k_1k_2}\phi_{k_1}\chi^+_{0k_1}(K_{31}+K_{12})\chi_{2_R}\overset{+}{<}k_{2_R}|T\bar{\psi}_1(y_1)\bar{\psi}_2(y_2)\bar{\psi}_3(y_3)|0>+ \tag{5.7}$$

$$(y_{10})\to-\infty\ ;\ (x_{10})\to+\infty$$

$$|x_{20}-x_{30}|<\infty\ ;\ |y_{20}-y_{30}|<\infty$$

$$+\text{ остальные члены,}$$

где в координатах (3.11)

$$\phi_{k_1}=\int\frac{\delta(\ell_{10}-E_1(\vec{\ell}_1))\,f_{k_1-\ell_1}(\xi_{23})\,e^{-ik_1X-ik_1\frac{m_1}{M}\xi_1}}{4E_{23}(\vec{k}_1-\vec{\ell}_1)E_1(\vec{\ell}_1)[k_{10}-E_1(\vec{\ell}_1)-E_{23}(\vec{k}_1-\vec{\ell}_1)+i\epsilon]}\,e^{i\ell_1\xi_1}\,d\ell_1\,. \tag{5.8}$$

Это выражение показывает, что суммирование по k_1 в (5.7) идет по всем значениям этой величины в конечном состоянии, в котором есть только СС-2,3 и одна свободная частица. Суммирование по другим значениям k_1 мы отнесли к "остальным членам".

Подставляя (5.8) и

$$\overset{+}{<}k_{2_R}|T\bar{\psi}_1(y_1)\bar{\psi}_2(y_2)\bar{\psi}_3(y_3)|0>=e^{ik_2Y+i\frac{m_1}{M}k_2\eta_1}\int\frac{f^+_{k_2-\ell_2}(\eta_{23})\delta(\ell_{20}-E_1(\vec{\ell}_2))}{4E_{23}(\vec{k}_2-\vec{\ell}_2)E_1(\vec{\ell}_2)}\times \tag{5.9}$$

$$\times\frac{e^{-i\ell_2\eta_1}\,d\ell_2}{k_{20}-E_1(\vec{\ell}_2)-E_{23}(\vec{k}_2-\vec{\ell}_2)+i\epsilon}$$

$$+\text{ члены не содержащие СС-2,3}$$

в (5.7), получаем

$$g_{23}(K_{31}+K_{12})g=\int\chi^+_{0k_1}(K_{31}+K_{12})\chi_{k_2}\frac{e^{-i(k_1X+k_1\frac{m_1}{M}\xi_1)}\,e^{i(k_2Y+k_2\frac{m_1}{M}\eta_1)}\,e^{i\ell_1\xi_1}\,e^{i\ell_2\eta_1}}{16E_{23}(\vec{k}_1-\vec{\ell}_1)E_{23}(\vec{k}_2-\vec{\ell}_2)E_1(\vec{\ell}_1)E_2(\vec{\ell}_2)}\times$$

$$(x_{10})\to+\infty;\ (y_{10})\to-\infty$$

$$|x_{20}-x_{30}|<\infty \tag{5.10}$$

$$|y_{20}-y_{30}|<\infty$$

$$\times\frac{f_{k_1-\ell_1}(\xi_{23})\,f^+_{k_2-\ell_2}(\eta_{23})\delta(\ell_{10}-E_1(\vec{\ell}_1))\delta(\ell_{20}-E_1(\vec{\ell}_2))(dk)(d\ell)}{[k_{10}-E_1(\vec{\ell}_1)-E_{23}(\vec{k}_1-\vec{\ell}_1)+i\epsilon][k_{20}-E_1(\vec{\ell}_2)-E_{23}(\vec{k}_2-\vec{\ell}_2)+i\epsilon]}+$$

$$+\text{ члены в которых нет двойных особенностей.}$$

Так как

$$g_{23}(K_{31}+K_{12})g=g-g_{23} \tag{5.11}$$

в соответствии с формулой (5.7), g можно представить в виде

$$g = \sum_{k_1 k_2} \langle 0 | T\, \psi_1(x_1)\, \psi_2(x_2)\, \psi_3(x_3) | k_{1_R} \rangle^{-} S_{12} \langle k_{2_R}\, T\, \bar{\psi}_1(y_1)\, \bar{\psi}_2(y_2)\, \bar{\psi}_3(y_3) | 0 \rangle^{+} \tag{5.12}$$

$$(x_{10}) \to +\infty\ ;\ (y_{10}) \to -\infty\ ;\ |x_{20} - x_{30}| < \infty\ ;\ |y_{20} - y_{30}| < \infty$$

+ члены, не содержащие рассеяния на СС-2,3,

где

$$S_{12} = {}^{-}\langle k_{1_R} | k_{2_R} \rangle^{+}, \tag{5.13}$$

есть матричный элемент S-матрицы, описывающий рассеяние на СС-2,3. Так как

$$\langle 0 | T\, \psi_1(x_1)\, \psi_2(x_2)\, \psi_3(x_3) | k_{1_R} \rangle^{-} = e^{-ik_1 X - i\frac{m}{M} k_1 \xi_1} \int \frac{f_{k_1 - \ell_1}(\xi_{23})\, \delta(\ell_{10} - E_1(\ell_1))}{4 E_{23}(\vec{k}_1 - \vec{\ell}_1)\, E_1(\vec{\ell}_1)} \times$$

$$\times \frac{e^{i\ell_1 \xi_1}\, d\ell_1}{k_{10} - E_1(\vec{\ell}_1) - E_{23}(\vec{k}_1 - \vec{\ell}_1) + i\epsilon} + \tag{5.14}$$

+ члены не содержащие СС-2,3,

то подставляя (5.9) и (5.14) в (5.12) , получаем

$$g = \int \frac{e^{-i(k_1 X + \frac{m}{M} k_1 \xi_1)}\, e^{i(k_2 Y + \frac{m}{M} k_2 \eta_1)}\, e^{i\ell_1 \xi_1}\, e^{-i\ell_2 \eta_1}}{16\, E_{23}(\vec{k}_1 - \vec{\ell}_1)\, E_{23}(\vec{k}_2 - \vec{\ell}_2)\, E_1(\vec{\ell}_1)\, E_1(\vec{\ell}_2)}\, S_{12} \times$$

$$\times \frac{f_{k_1 - \ell_1}(\xi_{23})\, f^{+}_{k_2 - \ell_2}(\eta_{23})\, \delta(\ell_{10} - E_1(\vec{\ell}_1))\, \delta(\ell_{20} - E_1(\vec{\ell}_2))}{[k_{10} - E_1(\vec{\ell}_1) - E_{23}(\vec{k}_1 - \vec{\ell}_1) + i\epsilon][k_{20} - E_1(\vec{\ell}_2) - E_{23}(\vec{k}_2 - \vec{\ell}_2) + i\epsilon]}\, (dk)(d\ell) + \tag{5.15}$$

+ члены, в которых нет двойных особенностей

$$((x_{10}) \to +\infty\ ;\ (y_{10}) \to -\infty\ ;\ |x_{20} - x_{30}| < \infty\ ;\ |y_{20} - y_{30}| < \infty)$$

g_{23} как легко убедиться не содержит двойных особенностей и поэтому подставляя (5.10) и (5.15) в (5.11) имеем

$$\frac{\chi^{+}_{0k_1}(K_{31} + K_{12})\, \chi_{k_2}\, \delta(\ell_{10} - E_1^{(1)})\, \delta(\ell_{20} - E_1^{(2)})\, f_{k_1 - \ell_1}(\xi_{23})\, f^{+}_{k_2 - \ell_2}(\eta_{23})}{16\, E_{23}^{(1)} E_{23}^{(2)} E_1^{(1)} E_1^{(2)}\, [k_{10} - E_1^{(1)} - E_{23}^{(1)} + i\epsilon][k_{20} - E_1^{(2)} - E_{23}^{(2)} + i\epsilon]} =$$

$$= \frac{S_{12}\, \delta(\ell_{10} - E_1^{(1)})\, \delta(\ell_{20} - E_1^{(2)})\, f_{k_1 - \ell_1}(\xi_{23})\, f^{+}_{k_2 - \ell_2}(\eta_{23})}{16\, E_{23}^{(1)} E_{23}^{(2)} E_1^{(1)} E_1^{(2)}\, [k_{10} - E_1^{(1)} - E_{23}^{(1)} + i\epsilon]\, [k_{20} - E_1^{(2)} - E_{23}^{(2)} + i\epsilon]} \tag{5.16}$$

+ члены не содержащие двойных особенностей, $(E_{23}^{(1)} = E_{23}(\vec{k}_1 - \vec{\ell}_1);\ E_1^{(1)} = E_1(\vec{\ell}_1))$.

Если теперь (5.16) умножить на $(k_{10} - E_1^{(1)} - E_{23}^{(1)} + i\epsilon)(k_{20} - E_1^{(2)} - E_{23}^{(2)} + i\epsilon)$ в пределе $k_{10} \to E_1^{(1)} + E_{23}^{(1)}$, $k_{20} \to E_1^{(2)} + E_{23}^{(2)}$ и $\epsilon \to 0$, все менее сингулярные члены уничтожаются и после необходимых сокращений из (5.16) получим

$$S_{12} = \chi^{+}_{0k_1}(k_{31} + k_{12})\, \chi_{k_2} + \delta_{12}\ . \tag{5.17}$$

Таким образом, мы получили выражение для матричных элементов S -матрицы в случае рассеяния частицы на связанном состоянии. Следует отметить, что метод получения (5.17) аналогичен методу, использованному Мандельстамом [5] для выражения матричных элементов динамических величин через волновые функции Бете–Сальпетера для связанных состояний. Равенство (5.17) вполне аналогично известному равенству в нерелятивистской квантовой механике [3] для выражения S -матричных элементов, описывающих рассеяния на связанном состоянии.

Автор выражает глубокую благодарность Н.Н.Боголюбову, А.А.Логунову, А.Н.Тавхелидзе и И.Т.Тодорову за интерес к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. E.E.Salpeter and H.A.Bethe, Phys. Rev., 84, 1232 (1951).
2. M.Gell-Mann, F.Low, Phys. Rev., 84, 350 (1951).
3. Л.Д.Фадеев. ЖЭТФ, т.39, вып. 5/11 (1960) .
4. G.Wentzel, Phys. Rev., 89. 684 (1953).
5. S.Mandelstam, Proc. Roy. Soc., A 233, 248 (1955).

Рукопись поступила в издательский отдел
29 июля 1964 г.