1762

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P-1762

Б.М. Барбашов

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ И ИНФРАКРАСНАЯ АСИМПТОТИКА ФУНЦИИ ГРИНА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1964

Барбашов Б.М.

Функциональные интегралы в квантовой электродинамике и инфракрасная асимптотика функций Грина

Функции Грина уравнений Клейна-Гордона и Дирака в произвольном внешнем поле записываются в виде функционального интеграла. Показано, что для полей, допускающих точное решение уравнений (постоянное поле и поле плоской волны), функциональные квадратуры могут быть выполнены. Полученная форма решений позволяет методом функционального усреднения по внешним полям получить квантовые функции Грина и исследовать их асимптотику в инфракрасной области. Для простой модели теории поля найдены поправки к формуле Блоха-Нордсика.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

P- 1762

Barbashov B.M.

Functional Integrals in Quantum Electrodynamics and Infrared Asymp totics of Green Functions

The Green functions of Klein-Gordon and Dirac equations are written down as a functional integral in an arbitrary external field. It is shown that the functional integrations are p erformed for the fields allowing the exact solution of the equations (the constant field and the field of the flat wave). The obtained form of the solutions p ermits to get the q uantum Green functions and to study their asymp totic behaviour in the infrared region by using the method of the functional averaging over the external field. Corrections to Bloch-Nordsieck's formula have been found for the simp le model of the field theory.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.

Р-1762

Б.М. Барбашов

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ И ИНФРАКРАСНАЯ АСИМПТОТИКА ФУНЦИИ ГРИНА

Введение

Трудности нахождения точных решений в методе функционального интегрирования в релятивистской квантовой теории поля связаны, во-первых, с решением квантовых уравнений частиц в произвольном внешнем поле, и, во-вторых, с выполнением функционального усреднения этих решений по внешним полям с учетом вкладов от поляризации вакуума.

В статье предлагается способ формального решения уравнений теории поля в виде функционального интеграла. В математике и физике такие решения дифференциальных уравнений известны из работ Фейнмана [5], но они были получены и обоснованы для уравнений типа теплопроводности и для уравнения Шредингера. Здесь излагается другой прием, основанный на преобразовании Вейерштрасса [6] в функциональном пространстве. Таким путем получены функции Грина уравнений Клейна-Гордона и Дирака во внешнем поле. В случае, когда внешнее поле допускает замкнутое решение, функциональные квадратуры могут быть выполнены. Помимо хорошо известных теперь гауссовых функциональных интегралов в статье разбираются и другие случаи, к которым приводит решение уравнения Дирака в постоянном поле и в поле плоской волны[x)].

Функции Грина уравнений Клейна-Гордона и Дирака, получающиеся данным способом, позволяют легко выполнить функциональное усреднение по внешним полям, не выполняя первоначальных функциональных квадратур, возникших при решении уравнений, и найти таким образом одночастичные квантовые функции Грина.

Далее на простом примере рассматривается вопрос о приближенном вычислении возникающих интегралов. Предлагается способ апроксимации, который оказывается хорошим приближением в инфракрасной области. С его помощью удается построить приближения к формуле Блоха-Нордсика. Другими способами, но в рамках же функционального метода, инфракрасные асимптотики изучались в работах Бланка [16], Фрадкина [17] и Милехина [11]. В последней работе были получены поправки к формуле Блоха-Нордсика, однако, из-за некорректного учета вклада больших импульсов виртуальных частиц в инфракрасную область, эти поправки зависели только линейно от $\frac{p^2-m^2}{m^2}$. Оказывается, что приближения формулы Блоха-Нордсика содержат также члены $\frac{p^2-m^2}{m^2}\ln\frac{p^2-m^2}{m^2}$ (см. по этому поводу также [17]).

---

x) Возможность точного решения уравнения Дирака в поле плоской волны была показана Д.М.Волковым [10].

1. Функция Грина уравнения Дирака во внешнем поле

Излагаэмый ниже метод записи решений дифференциальных уравнений через функциональный интеграл может быть применен к дифференциальным уравнениям второго порядка, в которых дифференциальный оператор представим как произведение двух операторов низшего порядка. Используемое преобразование не является новым, впервые Стратонович[1], а затем Хаббард[2] и Эдвардс[3] с успехом применили его в статистической физике.

Рассмотрим уравнение Дирака для функции Грина в электромагнитном поле $A_\mu(x)$; $\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0$

$$[i\gamma_\mu \partial_\mu - m + e\gamma_\mu A_\mu(x)] = -\delta(x-y). \tag{1}$$

Как обычно, положим

$$G(x,y|A) = [i\gamma_\mu \partial_\mu + m + e\gamma_\mu A_\mu(x)]\, \mathcal{G}(x,y|A). \tag{2}$$

Тогда будем иметь для $\mathcal{G}$

$$[(i\partial_\mu + eA_\mu(x))^2 - m^2 + e\sigma_{\mu\nu} \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x_\mu}]\, \mathcal{G}(x,y|A) = -\delta(x-y). \tag{3}$$

Применяя предложенное Фоком и Фейнманом[5] представление обратного оператора в экспоненциальном виде, запишем решение уравнения (3) в операторной форме

$$\mathcal{G}(x,y|A) = i\int_0^\infty ds\, \exp\{ i\int_0^s d\xi\, (i\partial_\mu(\xi) + eA_\mu(x,\xi))^2 - ism^2 + i^2 e\int_0^s \sigma_{\mu\nu}(\xi) \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\, \delta(x-y). \tag{4}$$

В такой записи экспонента, в показателе которой стоят некоммутирующие операторы, понимается согласно Фейнману[5] как T -экспонента, где упорядочивающий индекс s имеет смысл собственного времени, а все операторы считаются коммутирующими функциями от переменной ξ.

Теперь произведем в функциональном пространстве преобразование типа преобразования Вейерштрасса в одномерном случае[6] (см. также[1],[2],[3]).

$$\exp\{i\int_0^s d\xi (i\partial_\mu(\xi) + eA_\mu(x,\xi))^2\} = C\int \delta^4\nu\, \exp\{-i\int_0^s \nu_\mu^2(\xi)\, d\xi + 2i\int_0^s d\xi\, \nu_\mu(\xi)(i\partial_\mu(\xi) + eA_\mu(x\xi)\} \tag{5}$$

Здесь функциональный интеграл берется в пространстве 4-х функций $\nu_\mu(\xi)$ по гауссовой мере. Константа C выбрана из условия

$$C\int \delta^4\nu\, \exp\{-i\int_0^s \nu_\mu^2(\xi)\, d\xi\} = 1.$$

Подставляя (5) в (4), можем теперь согласно правилам, данным в /5/, выпутать оператор $\exp\{-2\int_0^s \nu_\mu(\xi)\partial_\mu(\xi)d\xi\}$ и получить решение уравнения (2) в виде функционального интеграла. В результате будем иметь x)

$$\mathcal{G}(x,y|A)=i\int_0^\infty ds\,\ell^{-im^2 s}\; C\int\delta^4\nu\,\exp\{-i\int_0^s d\xi[\nu_\mu^2(\xi)-e(2\nu_\mu(\xi)+\sigma_{\mu\nu}(\xi)i\partial_\nu)A_\mu(x-2\int_\xi^s\nu(\eta)d\eta)]\}\times \tag{6}$$

$$\times\,\delta^4(x-y-2\int_0^s\nu(\eta)d\eta).$$

Далее это выражение может быть преобразовано двумя способами. Из-за наличия $\delta^4(x-y-2\int_0^s\nu(\eta)d\eta)$ можно сразу получить фурье-образ

$$\bar{\mathcal{G}}(x,p|A)=\int\frac{d^4(x-y)}{(2\pi)^4}\,\mathcal{G}(x,y|A)\,e^{-ip(x-y)}$$

$$\bar{\mathcal{G}}(x,p|A)=i\int_0^\infty ds\,e^{-ism^2}\,C\int\delta^4\nu\,\exp\{-i\int_0^s[\nu_\mu^2(\xi)-2p\nu(\xi)]d\xi\}\times$$

$$\times\exp\{ie\int_0^s d\xi[2\nu_\mu(\xi)+\sigma_{\mu\nu}(\xi)i\partial_\nu]A_\mu(x-2\int_\xi^s\nu(\eta)d\eta)\}.$$

Производя далее подстановку: $\nu_\mu(\xi)=\omega_\mu(\xi)+p_\mu$, будем иметь:

$$\bar{\mathcal{G}}(x,p|A)=i\int_0^\infty ds\,\ell^{+is(p^2-m^2)}\,C\int\delta^4\omega\,\exp\{-i\int_0^s d\xi[\omega_\mu^2(\xi)+$$

$$+i^2e(2p_\mu+2\omega_\mu(\xi)+\sigma_{\mu\nu}i\partial_\nu)A_\mu(x-2p(s-\xi)-2\int_\xi^s\omega(\eta)d\eta)]\} \tag{7}$$

с условием, что $\int_0^s\omega_\mu(\eta)d\eta+sp_\mu=x_\mu-y_\mu$, которое возникает из-за δ -функций в (6). Другой путь состоит в том, что δ -функция используется при функциональном интегрировании по $\nu_\mu(\xi)$.

Для этого произведем подстановку $\nu_\mu(\xi)=\chi_\mu(\xi)+\frac{1}{s}a_\mu$, где $a_\mu=\int_0^s\nu_\mu(\xi)d\xi$. Отсюда следует, что $\int_0^s\chi(\xi)d\xi=0$. В результате имеем интегрирование по всем $\chi_\mu(\xi)$ и еще 4-х кратный интеграл по a_μ.

$$\mathcal{G}(x,y|A)=i\int_0^\infty ds\,\ell^{-ism^2}\int_{-\infty}^\infty\frac{d^4a}{i\,\pi^2s^2}\,\ell^{-i\frac{a_\mu^2}{s}}\;C_1\int\delta^4\chi\,\exp\{-i\int_0^s\chi_\mu^2(\xi)d\xi+$$

---

x) Необходимо отметить, что в (6) и (7) γ матрицы остаются в показателе экспоненты нераспутанными и поэтому у них удерживается упорядочивающий индекс ξ.

$$+ie\int_0^s d\xi\,[2\frac{a_\mu}{s}+2\chi_\mu(\xi)+\sigma_{\mu\nu}(\xi)\,i\partial_\nu]\,A_\mu(x-2\frac{s-\xi}{s}a+\int_0^\xi\chi(\eta)\,d\eta)\,)$$

$$\times\,\delta^4(x-y-2a).$$

Выполняя интегрирование по a_μ окончательно получим:

$$\mathcal{G}(x,y\,|\,A)=i\int_0^\infty\frac{ds}{i\pi^2 s^2}\exp\{-ism^2-i\frac{(x-y)^2}{4s}\}\,C_1\int\delta\chi\,\exp\{-i\int_0^s\chi_\mu^2(\xi)\,d\xi+$$

$$+ie\int_0^s d\xi\,[\frac{x_\mu-y_\mu}{s}+2\chi_\mu(\xi)+\sigma_{\mu\nu}(\xi)\,i\partial_\nu]\,A_\mu(x-\frac{s-\xi}{s}(x-y)+2\int_0^\xi\chi\,d\eta\,)\,\}\,. \tag{8}$$

Формулы (7) и (8) дают при $e=0$ функции Грина свободных уравнений, соответственно в p и x –представлении

$$\tilde{\mathcal{G}}_0(p)=i\int_0^\infty ds\,\ell^{is(p^2-m^2)}\,;\qquad \mathcal{G}_0(x-y)=i\int_0^\infty\frac{ds}{i\pi^2 s^2}\exp\{-ism^2-i\frac{(x-y)^2}{4s}\}. \tag{9}$$

Функция Грина уравнения Дирака (1) получается согласно (2).

Теперь рассмотрим некоторые конкретные поля $A_\mu(x)$, для которых уравнение Дирака решается точно, что в нашем подходе означает возможность выполнения функциональных квадратур.

Простейший случай постоянных полей $F_{\mu\nu}$, когда $A_\mu(x)$ является линейной функцией, вычисляется просто, поскольку в формулах (7) или(8)возникают гауссовы квадратуры, взятие которых не составляют труда.

Более интересен пример, когда $F_{\mu\nu}=0$, а $A_\mu(x)=\frac{\partial f(x)}{\partial x_\mu}$. Этот пример связан с вопросом изменения функции Грина фермиона при градиентных преобразованиях поля $A_\mu\to A_\mu+\frac{\partial f}{\partial x_\mu}$. Подставляя (10) в (8), имеем:

$$\mathcal{G}(x,y\,|\,f)=i\int_0^\infty\frac{ds}{i\pi^2 s^2}\exp\{-ism^2-i\frac{(x-y)^2}{4s}\}\,C_1\int\delta\chi\,\exp\{-i\int_0^s\chi_\mu^2(\xi)\,d\xi\}\times$$

$$\times\exp\{ie\int_0^s d\xi\,[\frac{x_\mu-y_\mu}{s}+2\chi_\mu(\xi)]\,\frac{\partial}{\partial x_\mu}f(x-\frac{s-\xi}{s}(x-y)+2\int_0^\xi\chi(\eta)\,d\eta)\,\}\,. \tag{10}$$

(Здесь учтено, что $\sigma_{\mu\nu}\frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu\partial x_\nu}=0$). В показателе второй экспоненты под интегралом стоит полная производная $\frac{d}{d\xi}f=[\frac{x_\mu-y_\mu}{s}+2\chi_\mu(\xi)]\frac{\partial}{\partial x_\mu}f(x-\frac{s-\xi}{s}+2\int_0^\xi\chi\,d\eta)$, поэтому можем выполнить интегрирование по ξ и учитывая, что $\int_0^s\chi_\mu(\eta)\,d\eta=0$ и $C_1\int\delta^4\chi\,\exp\{-i\int_0^s\chi_\mu^2(\xi)\,d\xi\}=1$ окончательно получить:

$$\mathcal{G}(x,y\,|\,f)=\exp\{ie[f(x)-f(y)]\}\,i\int_0^\infty\frac{ds}{i\pi^2 s^2}\exp\{-ism^2-i\frac{(x-y)^2}{4s}\} \tag{11}$$

и
$$G(x,y|f)=\exp\{ie[f(x)-f(y)]\}(i\gamma_\mu\partial_\mu+m)\mathcal{G}_0(x-y).$$

Это решение было получено другим путем Фрадкиным [7], Свидзинским [8], Швингером [9] и др.

Нетривиальным случаем является нахождение функции Грина уравнения Дирака в поле плоской волны [10].

Рассмотрим плоскую волну произвольной формы

$$A_\mu(x)=\epsilon_\mu\,\phi\,(kx)\qquad \text{где}\quad \epsilon_\mu k_\mu=0,\quad k_\mu^2=0. \tag{12}$$

Будем исходить из формул (7)

$$\bar{\mathcal{G}}(x,p|A)=i\int_0^\infty ds\,\ell^{is(p^2-m^2)}\,C\int\delta^4\omega\,\ell^{-i\int_0^s\omega_\mu^2(\xi)d\xi}$$

$$\exp\{ie\int_0^s d\xi[2p\epsilon+2\epsilon\omega(\xi)+\sigma_{\mu\nu}\epsilon_\mu k_\nu i\frac{\partial}{\partial(kx)}]\phi(kx-2kp(s-\xi)-2\int_\xi^s k\,\omega(\eta)\,d\eta)\}. \tag{13}$$

Интеграл по ω явно негауссова типа, поскольку $\omega_\mu(\eta)$ входят в аргумент произвольной функции ϕ. Введем бесконечно-мерную δ-функцию

$$\prod_\xi\delta(\psi(\xi)-2k\,\omega(\xi))=C_2\int\delta a\,\ell^{i\int_0^s d\xi a(\xi)[\psi(\xi)-2k\,\omega(\xi)]} \tag{14}$$

(C_2 – нормировочная константа $C_2=\prod_\xi\left(\frac{1}{2\pi}\right)$).

С помощью (14) мы можем записать интеграл по $\omega_\mu(\xi)$ в (13) в виде, допускающем выполнение интегрирования по ω.

$$C\int\delta^4\omega\,\ell^{-i\int_0^s\omega_\mu^2(\xi)d\xi}\;C_2C_3\int\delta a\,\delta\psi\,\ell^{i\int_0^s d\xi a(\xi)[\psi(\xi)-2k\,\omega(\xi)]}$$

$$\exp\{ie\int_0^s d\xi[2\epsilon p+2\epsilon\omega(\xi)+\sigma_{\mu\nu}(\xi)\epsilon_\mu k_\nu i\frac{\partial}{\partial(kx)}]\phi(kx-2kp(s-\xi)-\int_\xi^s\psi(\eta)d\eta)\} \tag{15}$$

$$=C_2C_3\int\delta a\,\delta\psi\,\ell^{i\int_0^s a(\xi)\psi(\xi)d\xi}\exp\{ie\int_0^s d\xi[2\epsilon p+\sigma_{\mu\nu}(\xi)\epsilon_\mu k_\nu i\frac{\partial}{\partial(kx)}]\phi\}.$$

$$\exp\{i\int_0^s d\xi[k_\mu a(\xi)-\epsilon_\mu e\phi]^2.$$

Учитывая, что в силу $[k_\mu a(\xi)-\epsilon_\mu e\phi]^2=\epsilon_\mu^2\ell^2\phi^2$ не зависит от $a(\xi)$, мы можем в (15) выполнить сначала интегрирование по $a(\xi)$, что дает

$$C_2 \int \delta a\, \ell^{\,i\int_0^s a(\xi)\psi(\xi)} = \prod_\xi \delta(\psi(\xi))$$

и далее проинтегрировать по $\psi(\xi)$, т.е. положить $\psi(\xi)=0$.

Окончательно имеем:

$$\bar{\mathcal{G}}(x,p|A) = i\int_0^\infty ds\, \ell^{is(p^2-m^2)} \exp\{ie\int_0^s (2p_\mu + \sigma_{\mu\nu} ik_\nu \frac{\partial}{\partial(kx)})A_\mu(kx-2kp\xi) +$$

$$+ie^2\int_0^s d\xi\, A_\mu^2(kx-2kp\xi)\}. \tag{16}$$

Действуя на (16) оператором $[i\gamma_\mu\partial_\mu + \gamma_\mu p_\mu + m + ieA_\mu(x)]$, мы получаем функцию Грина электрона в поле плоской волны.

II. Инфракрасная асимптотика функций Грина в модели $\mathcal{L} = g\psi^2(x)\phi(x)$

Исходя из рассмотренной в I техники получения решений уравнений во внешнем поле, на примере простой релятивистски инвариантной модели двух скалярных, взаимодействующих по закону $\mathcal{L} = g\psi^2(x)\phi(x)$ полей без учета поляризации вакуума, мы изложим способ аппроксимации квантовой функции Грина в инфракрасной области.

По аналогии с электродинамикой считается, что масса поля $\phi(x)$ равна нулю. Функция Грина частицы поля ψ , в классическом внешнем поле $\phi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$[i^2\partial_\mu^2 - m^2 + g\phi(x)]\,G(x,y|\phi) = -\delta(x-y). \tag{17}$$

Повторяя процедуру, изложенную в разделе 1, имеем:

$$G(x,y|\phi) = i\int_0^\infty ds\, \exp\{-im^2 s + i\int_0^s d\xi\,[i^2\partial_\mu^2(\xi) + g\phi(x,\xi)]\}\,\delta(x-y). \tag{18}$$

Аналогично (5) преобразуем

$$\exp\{i\int_0^s d\xi\, i^2\partial_\mu^2(\xi)\} = c\int\delta^4\nu\, \exp\{-i\int_0^s d\xi[\nu_\mu^2(\xi) - 2i\nu_\mu(\xi)\partial_\mu(\xi)]\}. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (18) и выпутывая оператор дифференцирования, будем иметь:

$$G(x,y|\phi) = i\int_0^\infty ds\, \ell^{-ism^2}\, c\int\delta^4\nu\, \exp\{-i\int_0^s d\xi\,[\nu_\mu^2(\xi) -$$

$$-g\phi(x-2\int_\xi^s \nu(\eta)\,d\eta)]\}\,\delta(x-y-2\int_0^s \nu(\xi)\,d\xi).$$

Далее нам понадобятся Фурье-образ G по разности $x-y$ (сравни с (7)).

$$\bar{G}(x,p|\phi) = i\int_0^\infty ds\, \ell^{is(p^2-m^2)}\, C\int\delta^4\nu\, \exp\{-i\int_0^s d\xi[\nu_\mu^2(\xi) - \qquad (20)$$

$$-g\phi\left(x-2p(s-\xi)-2\int_\xi^s \nu(\eta)\,d\eta\right)\}.$$

Теперь, имея функцию Грина в классическом поле $\phi(x)$ в виде (20), легко провести ее функциональное усреднение по этому полю с весовой функцией $\exp\{-\frac{i}{2}\int d^4q\, D(q)\phi(q)\phi(-q)\}$, где $D(q)=\frac{1}{q^2+i\epsilon}$ – причинная функция поля $\phi(q)$, и таким образом получить квантовую функцию Грина

$$G(p) = i\int_0^\infty ds\,\ell^{is(p^2-m^2)}\, C\int\delta^4\nu\,\exp\{-i\int_0^s d\xi\,\nu_\mu^2(\xi)\}\times \qquad (21)$$

$$\times\exp\{-i\frac{g_1^2}{2}\int_0^s\int_0^s d\xi_1 d\xi_2\,\Delta(\xi_1,\xi_2|\nu)\},$$

где

$$\Delta(\xi_1,\xi_2|\nu) = \int d^4q\, D(q)\,\ell^{-2pq|\xi_1-\xi_2|-2i\int_{\xi_2}^{\xi_1} q\nu(\eta)\,d\eta}.$$

$$g_1 = g/(2\pi)^2$$

Взятие интеграла по $\nu(\xi)$ в (21) не представляется возможным, поэтому займемся его приближенным вычисленнем.

При разложении по степеням g_1^2, мы будем иметь ряд теории возмущений для функции Грина, при этом функциональные интегралы легко берутся, поскольку возникают выражения типа

$$\Delta_1(\xi_1-\xi_2) = C\int\delta^4\nu\;\ell^{-i\int_0^s\nu_\mu^2(\xi)d\xi}\,\Delta(\xi_1,\xi_2|\nu) = \int d^4q\,D(q)\,\ell^{i(q^2-2pq)|\xi_1-\xi_2|} \qquad (22)$$

Из (22) видно, что функциональный аргумент в $\Delta(\xi_1,\xi_2|\nu)$ приводит в результате интегрирования к появлению квадратичной зависимости от импульсов квантов поля q. Поэтому, если нас интересует низкоэнергетическая область, можно пренебречь в $\Delta(\xi_1,\xi_2|\nu)$ зависимостью от ν. Результаты, относящиеся к инфракрасной области в таком приближении, но другим методом, были получены Фрадкиным и Милехиным /7,11/. Однако такое приближение существенно меняет поведение при больших импульсах и, в частности, приводит к более сильным расходимостям неперенормированных величин, поэтому мы не будем пренебрегать этой зависимостью, а прибегнем к другой процедуре аппроксимации.

Для этого рассмотрим разложение в ряд величины

$$\mathfrak{L} = C\int \delta^4\nu\, \ell^{-i\int_0^s \nu_\mu^2(\xi)\,d\xi}\, \ell^{-\frac{ig^2}{2}\int_0^s\int_0^s d\xi_1 d\xi_2 \Delta(\xi_1,\xi_2|\nu)} = 1 - \frac{ig_1^2}{2}\int_0^s\int_0^s d\xi_1 d\xi_2 \Delta_1(\xi_1-\xi_2) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{ig_1^2}{2}\right)^2 \int_0^s\int_0^s\int_0^s\int_0^s d\xi_1 \ldots d\xi_4 \Delta_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) + \ldots, \qquad (23)$$

где $\Delta_1(\xi_1-\xi_2)$ определено в (22)

$$\Delta_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = c\int \delta^4\nu\, \ell^{-i\int_0^s \nu^2(\xi)\,d\xi}\, \Delta(\xi_1,\xi_2|\nu)\,\Delta(\xi_1\xi_2|\nu) =$$

$$= \int d^4q_1 d^4q_2 D(q_1) D(q_2)\, \ell^{i(q_1^2-2pq_1)|\xi_1-\xi_2| + i(q_2^2-2pq_2)|\xi_3-\xi_4|}$$

$$\times \exp\{2iq_1q_2\theta(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\} \qquad (24)$$

$$\theta(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = [\theta(\xi_3-\xi_1) - \theta(\xi_4-\xi_1)]\,\xi_1 + [\theta(\xi_4-\xi_2) - \theta(\xi_3-\xi_2)]\,\xi_2 +$$

$$+ [\theta(\xi_1-\xi_3) - \theta(\xi_2-\xi_3)]\,\xi_3 + [\theta(\xi_2-\xi_4) - \theta(\xi_3-\xi_4)]\,\xi_4 .$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

Теперь, исходя из (23), перегруппируем ряд, для чего к показателю второй экспоненты в (23) прибавим и вычтем первый член разложения в (23), т.е. величину $-\frac{ig_1^2}{2}\int\int_0^s d\xi_1 d\xi_2 \Delta_1(\xi_1-\xi_2)$ и далее будем вести разложение по разности $-ig^2/2\int\int_0^s d\xi_1 d\xi_2 [\Delta(\xi_1\xi_2|\nu) - \Delta_1(\xi_1\xi_0)]$. После выполнения интегрирования мы будем иметь для $\mathfrak{L}^0$ следующее разложение

$$\mathfrak{L} = e^{-\frac{ig_1^2}{2}\int\int_0^s d\xi_1 d\xi_2 \Delta_1(\xi_1-\xi_2)}\, C\int \delta^4\nu\, \ell^{-i\int_0^s \nu^2(\xi)\,d\xi}\, \ell^{-\frac{ig_1^2}{2}\int\int_0^s d\xi_1 d\xi_2 [\Delta(\xi_1\xi_2|\nu) - \Delta_1(\xi_1-\xi_2)]} =$$

$$= \ell^{-\frac{ig_1^2}{2}\int_0^s\int_0^s d\xi_1 d\xi_2 \Delta_1(\xi_1-\xi_2)} \Big\{1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{ig_1^2}{2}\right)^2 \int_0^s\int_0^s\int_0^s\int_0^s d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 [\Delta_2(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4) - \Delta_1(\xi_1-\xi_2)\Delta_1(\xi_3-\xi_4)] + \qquad (25)$$

$$+ \ldots\ldots \Big\}.$$

Следует отметить, что можно дальше суммировать в инфракрасной области ряд (23), для чего надо к показателю второй экспоненты в (23) прибавить и вычесть величину

$$-\frac{ig^2}{2}\int\limits_0^s\int\limits_0^s d\xi_1\, d\xi_2\, \Delta_1(\xi_1-\xi_2)+\left(\frac{ig_1^2}{2}\right)^2 \tfrac{1}{2}\int\int\int\int\limits_0^s d\xi_1 \dots d\xi_4\,[\Delta(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)-\Delta_1(\xi_1-\xi_2)\,\Delta_1(\xi_3-\xi_4)]\,. \qquad (26)$$

Тогда вместо (25) будем иметь общим множителем экспоненту с показателем (26) и ряд, начинающийся с g_1^6. Однако в инфракрасной области это не изменяет результата, поскольку второй член в (26) при $s\to\infty$ убывает, а первый является определяющим, так как имеет поведение $\ln p^2 s$.

Если (25) подставить в выражение для функции Грина (21), то получим разложение по степеням g_1^2 с общим множителем $\ell^{-\frac{ig_1^2}{2}\int\int_0^s \Delta_1(\xi_1-\xi_2)\,d\xi_1\, d\xi_2}$, который, как это будет видно из дальнейшего, включает все инфракрасные особенности функции Грина. Каждый член ряда по g_1^2 представляет собой разность между выражением, полученным по обычной теории возмущений и таким же выражением, но в котором отсутствуют недиагональные квадратичные члены по импульсам фотона $q_i\, q_j$, как это видно на примере $\Delta_2(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)-\Delta_1(\xi_1-\xi_2)\,\Delta_1(\xi_3-\xi_4)$. Нетрудно убедиться, что такая разность инфракрасных особенностей не содержит. Этот результат подтверждает вывод работы Енни, Фраучи и Суура[12] о факторизации инфракрасных расходимостей в квантовой электродинамике. Поясним это на примере вычисления первых двух членов такого разложения для функции Грина

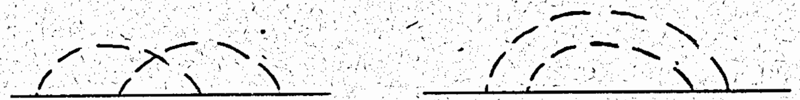
$$G(p)=i\int\limits_0^\infty ds\, e^{is(p^2-m^2)}\exp\left\{-\frac{ig_1^2}{2}\int\int\limits_0^s d\xi_1\, d\xi_2\int d^4q\, D(q)\, e^{i(q^2-2pq)|\xi_1-\xi_2|}\right\}\cdot$$

$$\times\left[1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{ig_1^2}{2}\right)^2\int\int\int\int\limits_0^s d\xi_1 \dots d\xi_4\int \frac{d^4q_1\, d^4q_2}{q_1^2\, q_2^2}\, \ell^{i(q_1^2-2pq_1)|\xi_1-\xi_2|} \right. \qquad (27)$$

$$\left.\ell^{i(q_2^2-2pq_2)|\xi_3-\xi_4|}\left(\ell^{2iq_1q_2\,\theta(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)}-1\right)\right]\,.$$

Разбиение 4-кратного интеграла по ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 на интегралы по областям $\xi_i>\xi_j>\xi_k>\xi_l$ соответствует учету всех графиков Фейнмана в данном порядке по g_1^2. Область, в которой $\theta(\xi_1 \dots \xi_4)=0$ соответствует графику, в котором нет величины $q_1 q_2$.

Такие графики не дают вклада в (27), так как там θ входит в виде $\ell^{2iq_1q_2\theta} - \xi$. Области, в которых $\theta \neq 0$ соответствуют двум графикам



(28)

Из них вычитаются согласно (27) выражения для таких же графиков, где нет недиагонального члена $q_1 q_2$. Такая разность, как уже отмечалось, не содержит инфракрасных расходимостей. Например, для (б)

$$\int \frac{d^4q_2 \, d^4q_2}{q^2q^2(p^2-m^2)^2[m^2-(p+q)^2]^2} \left[\frac{1}{m^2-(p+q_1+q_2)^2} - \frac{1}{m^2-(p+q_1+q_2)^2+2q_1q_2} \right] = \tag{29}$$

$$= \int \frac{d^4q_1 \, d^4q_2}{q_1^2q_2^2(m^2-p^2)^2[m^2-(p+q_1+q_2)^2][m^2-(p+q_1)^2]^2} \cdot \frac{2q_1q_2}{m^2-(p+q_1+q_2)^2+2q_1q_2} .$$

Отсюда видно, что это вычитание повышает в области малых q степень числителя подынтегрального выражения.

После взятия интегралов по q, ξ в (26) и проведения перенормировок, будем иметь

$$G_r(p) = i\int_0^\infty ds \; \ell^{is(p^2-m_r^2)+\frac{g_1^2\pi^2}{p^2}I(p^2,s)} \times \left[1+\left(\frac{g_1^2\pi^2}{p^2}\right)^2 F(p^2,s)\right] \tag{23}$$

Величина $I(p^2,s) \to 0$ при $s \to 0$ и при $s \to \infty$ $I(p^2,s) \to -\ln p^2 s$, $F(p^2 s)$ стремится при $s \to \infty$ к выражению (29), получающемуся по теории возмущения. Поскольку нас интересует инфракрасная область, то при $p^2 \approx m_r^2$ основной вклад возникает от интегрирования в (29) по большим значениям s, поэтому можно заменить величины $I(p^2 s)$ и $F(p^2 s)$ их асимптотическими значениями при $s \to \infty$. В результате имеем с точностью до g_1^4.

$$G(p) = \frac{|1-p^2/m^2|^{g^2/16\pi^2m^2}}{p^2-m^2} \left\{ N_1(p) + \left(\frac{g^2}{16\pi^2m^2}\right)^2 \left[a_1 \frac{p^2-m^2}{m^2} \ln \frac{p^2-m^2}{m^2} + a_2 \frac{p^2-m^2}{m^2} \right] N_2(p) \right\}. \tag{30}$$

где
$$N_1(p) = \epsilon\,(p^2-m^2)\int_0^\infty dx\,\ell^{ix\epsilon(p^2-m^2)}\,x^{-g^2/16\pi^2 m^2},$$

$$N_2(p) = \int_0^\infty\int dx_1\,dx_2\,\ell^{i(x_1+x_2)\epsilon(p^2-m^2)}\,(x_1-x_2)^{-g^2/16\pi^2 m^2}$$

$a_1,\ a_2$ – const; $\qquad \epsilon(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}.$

Следует отметить, что формула (30) верна, когда $\frac{g^2}{16\pi^2 m^2} < 1$, в противном случае в области $p^2 \simeq m^2$ $G(p)$ стремится к константе (см. /11/). В работе /11/ была рассмотрена инфракрасная асимптотика для данной модели другим методом, в котором не учитывались величины, квадратичные по импульсам фотона q. Поскольку при подсчете поправок по g^2 к основной формуле существенным оказывается поведение величин при больших импульсах, что отмечается и в самой работе /11/, постольку наш результат (30) отличается от /11/.

На характер поправок, зависящих от $\frac{p^2-m^2}{m^2}\ell n\frac{p^2-m^2}{m^2}$, а не только от степеней $\frac{p^2-m^2}{m^2}$, указывалось в работе Л.Д.Соловьева /17/.

III. Квантовая электродинамика

Будем исходить из формулы (7) для функции Грина квадрированного уравнения Дирака; $A_\mu(x)$ рассматривается в произвольной калибровке.

Квантовая функция Грина получается интегрированием по $A_\mu(x)$ согласно формуле

$$G(p) = \frac{\int \delta^4 A\,\exp\{-\frac{1}{2}\int d^4q\,D^{-1}_{\mu\nu}(q)\,A_\mu(q)\,A_\nu(-q)\}\,G(x,p|A)\,S_0(A)}{\int \delta^4 A\,\exp\{-\frac{1}{2}\int d^4q\,D^{-1}_{\mu\nu}(q)\,A_\mu(q)\,A_\nu(-q)\}\,S_0(A)}. \tag{31}$$

Здесь $D_{\mu\nu}(q) = \frac{1}{-q^2}\left[\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}(1-de)\right]$ – функция распространения фотона в произвольной калибровке; $S_0(A)$ – вклад от поляризации электронно-позитронного вакуума. Согласно работе /13/ эта величина может быть представлена как

$$S_0(A) = \ell^{\,i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n}}{2n}\sigma_{2n}(A)} \tag{32}$$

$$\sigma_2(A) = \int d^4q\,A_\mu(q)\,A_\nu(-q)\,\Pi_{\mu\nu}(q) \tag{33}$$

$$\sigma_4(A) = \int d^4q_1\,d^4q_2\,d^4q_3\,A_\mu(q_1)\,A_\nu(q_2)\,A_\lambda(q_3)\,A_\sigma(q_4)\,M_{\mu\nu\lambda\sigma}(q_1 q_2 q_3)\,\delta\Big(\sum_1^4 q_i\Big).$$

$\Pi_{\mu\nu}(q) = (\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}) I(q^2)$ поляризационный оператор в e^2-приближении $M_{\mu\nu\lambda\sigma}(q_1 q_2 q_3)$ –выражение, соответствующее графику рассеяния света на свете в e^4 –приближении. Ограничимся в сумме (32) только первым членом $\sigma_2(A)$ на том основании, что нас интересует инфракрасная область, где $\sigma_2 \sim q^2$, $\sigma_4 \sim q^4$. Из дальнейшего будет видно, что учет $\sigma_2(A)$ не изменяет инфракрасной асимптотики $G(p)$. Для выполнения интеграции в (31) представим с учетом (7) функцию Грина в виде:

$$G(px|A) = i\int_0^\infty ds\,\ell^{is(p^2-m^2)}\, C\int \delta^4\omega\, \ell^{-i\int_0^s \omega_\mu^2(\xi)d\xi} \Big[i\gamma\partial\nu + \gamma p + m - i\gamma_\mu \int d^4q \frac{\delta}{\delta K_\mu(q,s|\omega)}\Big] \tag{34}$$

$$\exp\{ie_1 \int d^4q\, A_\mu(q)\, K_\mu(q,s|\omega)\ell^{iqx}\},$$

где

$$K_\mu(q,s|\omega) = \int_0^s d\xi\, [2p_\mu + 2\omega_\mu(\xi) - \sigma_{\mu\nu}(\xi)\, q_\nu]\, \ell^{-2ipq|s-\xi| - 2i\int_\xi^s q\omega(\eta)d\eta}.$$

$$e_1 = e/2\pi$$

При сделанных предположениях о вкладе поляризации вакуума в инфракрасной области в (31) возникает интеграл по A_μ гауссова типа.

$$\frac{\int \delta^4 A \exp\{-\frac{1}{2}\int d^4q[D^{-1}_{\mu\nu}(q) + e_1^2\Pi_{\mu\nu}(q)]A_\mu(q)A_\nu(-q) + i\bar{e}\int d^4q\, K_\mu(q,s|\omega)A_\mu(q)\}}{\int \delta^4 A \exp\{-\frac{1}{2}\int d^4q[D^{-1}_{\mu\nu}(q) + e_1^2\Pi_{\mu\nu}(q)]A_\mu(q)A_\nu(-q)\}} = \tag{35}$$

$$= \exp\{-\frac{ie_1^2}{2}\int d^4q[D^{-1}_{\mu\nu}(q) + e_1^2\Pi_{\mu\nu}(q)]^{-1} K_\mu(qs|\omega)\, K_\nu(q,s|\omega)\},$$

где обратный оператор

$$[D_{\mu\nu}(q) + e_1^2\Pi_{\mu\nu}(q)]^{-1} = \frac{\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}(d_{tr}(q^2) - de)}{-q^2} \tag{36}$$

$$d_{tr}(q^2) = \frac{1}{1 - e_1^2 I(q^2)}.$$

Поскольку при вычислении (35) в показателе экспоненты мы удержали только члены до e_1^4, то ограничимся указанной точностью и в окончательном результате. Для этого разложим знаменатель в (36) до e_1^2. В инфракрасной области это обосновано, так как $I(q^2) \to \frac{1}{15}\frac{q^2}{m^2}$ при $q^2 \ll m^2$ поэтому можно вообще пренебречь вкладом $I(q^2)$, т.е. положить $d_{tr}(q^2)=1$ (как хорошо известно, при $q^2\to\infty$ $I(q^2)\to \ell n\frac{q^2}{m^2}$ и нужно учитывать остальные вклады в (32), так как учет только σ_2 приводит к нефизическому полюсу в $d_{tr}(q^2)$ /7/). Выражение, пропорциональное $q_\nu q_\mu$, в показателе экспоненты (35) может быть вычислено точно. Это является следствием того, что решается точно задача с потенциалом $A_\mu=\frac{\partial f}{\partial x_\mu}$.

$$i e_1^2\int d^4q\,\frac{q_\mu q_\nu(1-de)}{q^2 q^2}\int_0^s\!\!\int_0^s[2\omega_\mu(\xi_1)+2p_\mu-\sigma_{\mu\lambda}(\xi_1)q_\lambda][2\omega_\nu(\xi_2)+2p_\nu-\sigma_{\nu\kappa}q_\kappa]\cdot$$

$$\times e^{-2pqi|\xi_1-\xi_2|-2i\int_{\xi_2}^{\xi_1}q\omega(\eta)d\eta}=ie_1^2\int d^4q\,\frac{1-de}{q^2q^2}\,2(1-e^{-2ipqs-2i\int_0^s q\omega\,d\eta})= \tag{37}$$

$$=\frac{e_1^2}{2}(1-de)(\ell n\frac{M}{m}+\ell n\, m|x-y|).$$

Здесь учтено, что $\int_0^s d\xi(p_\mu+\omega_\mu(\xi))=x_\mu-y_\mu$. Таким образом, член пропорциональный $q_\mu q_\nu$ в функции распространения $D_{\mu\nu}(q)$ приводит к множителю для $G(p)$ $Z_2(m|x-y|)^{\frac{e_1^2}{2}(1-de)}$; $Z_2^1=\ell^{\frac{e_1^2}{2}(1-de)\ell n\frac{M}{m}}$, который несущественен в инфракрасной области. Из этого результата видно, что выбор калибровки, т.е. d_ℓ, не влияет на инфракрасную асимптотику в квантовой электродинамике. Опуская его, имеем

$$G(p)=i\int_0^\infty ds\,\ell^{is(p^2-m^2)}C\int\delta^4\omega\,\ell^{-i\int_0^s\omega_\mu^2(\xi)d\xi}[\gamma p+m+e_1^2\int\frac{d^4q}{q^2}\gamma_\mu K_\mu(-q,s|\omega)]\times$$

$$\times\exp\{-\frac{ie_1^2}{2}\int\frac{d^4q}{q^2}\int_0^s\!\!\int_0^s d\xi_1 d\xi_2[4(p_\mu+\omega_\mu(\xi_1))(p_\mu+\omega_\mu(\xi_2))+4(p_\mu+\omega_\mu(\xi_1))q_\nu\sigma_{\mu\nu}(\xi_2)- \tag{38}$$

$$-\sigma_{\mu\nu}(\xi_1)\sigma_{\nu\rho}(\xi_2)q_\mu q_\rho]\cdot\ell^{2ipq|\xi_1-\xi_2|-2i\int_{\xi_2}^{\xi_1}q\omega(\eta)d\eta}\}.$$

Далее опустим в показателе экспоненты (38) члены, пропорциональные импульсу фотона q, эти величины связаны с матрицами γ и, следовательно, мы пренебрегли спиновыми эффектами в инфракрасной области (см. по этому поводу /14/).

Теперь применим процедуру раздела II для приближенного вычисления функционального интеграла по $\omega_\mu(\xi)$. Согласно II, величину $i\Delta(\xi_1\xi_2|\omega) = i\int \frac{d^4q}{q^2}\ell^{2ipq|\xi_1-\xi_2|-2i\int_{\xi_2}^{\xi_1} q\omega(\eta)d\eta}$ аппроксимируем величиной $\Delta_1(\xi_1-\xi_2) = \int \frac{d^4q}{q^2}\ell^{i(q^2-2pq)|\xi_1-\xi_2|}$ и будем строить приближения по разности $\Delta(\xi_1,\xi_2|\omega) - \Delta_1(\xi_1-\xi_2)$, тогда в разложении экспоненты члена пропорционального e_1^2 не будет, как это показано в II. Ограничиваясь в (38) первым членом такой аппроксимации, будем иметь

$$G(p) = i\int_0^\infty ds\, \ell^{is(p^2-m^2)} [p\gamma+m] C\int \delta^4\omega\, \ell^{-i\int_0^s \omega_\mu^2(\xi)d\xi} \times$$

$$\times \exp\{-\frac{ie_1^2}{2}\int_0^s\int_0^s d\xi_1 d\xi_2 4[p^2 + p\omega(\xi_1) + \omega(\xi_1)\omega(\xi_2)]\Delta_1(\xi_1-\xi_2)\}. \tag{39}$$

Для вычисления интеграла по ω_μ согласно /5/ необходимо знание интегрального оператора $N(\xi_1\xi_2)$, определяемого уравнением:

$$\int_0^s d\xi\, N(\xi_1,\xi)[\delta(\xi-\xi_2) + 2e_1^2\Delta_1(\xi-\xi_2)] = \delta(\xi_1-\xi_2). \tag{40}$$

Однако точное решение уравнения (40) представляет большие трудности, поэтому прибегнем к методу последовательных приближений по константе e_1^2. Ограничиваясь первыми тремя членами, имеем

$$N(\xi_1\xi_2) = \delta(\xi_1-\xi_2) - 2e_1^2\Delta(\xi_1-\xi_2) + (2e_1^2)^2\int_0^s \Delta(\xi_1-\xi)\Delta(\xi-\xi_2)d\xi + O(e_1^6). \tag{41}$$

После выполнения интегрирования функция Грина записывается в виде:

$$G(p) = i\int_0^\infty ds\, \ell^{is(p^2-m^2)} [p\gamma+m]\exp\{-i2e_1^2p^2\int_0^s\int d\xi_1 d\xi_2 \Delta_1(\xi_1-\xi_2) +$$

$$+ i4e_1^4p^2\int_0^s\int_0^s\int_0^s\int_0^s d\xi_1\ldots d\xi_4\Delta_1(\xi_1-\xi_3)\Delta_1(\xi_2-\xi_4) + \ldots\}.J, \tag{42}$$

где

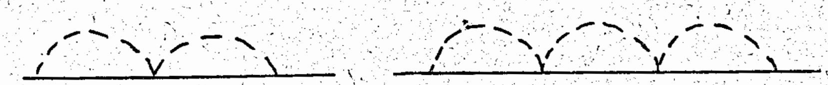
$$J = \int\delta^4\omega\,\exp\{-i\int_0^s\int_0^s d\xi_1 d\xi_2[\delta(\xi_1-\xi_2) + 2e_1^2\Delta_1(\xi_1-\xi_2)]\omega_\mu(\xi_1)\omega_\mu(\xi_2)\} =$$

$$= [\mathrm{Det}\,(\delta(\xi_1-\xi_2) + 2e_1^2\Delta_1(\xi_1-\xi_2))]^{-2} = e^{2i\sum_{n=1}^\infty \frac{(-2e_1^2)^n}{n}\sigma_n(\Delta_1)} \tag{43}$$

$$\sigma_n(\Delta_1) = \int_0^s \ldots\ldots \int_0^s d\xi_1\ldots\ldots d\xi_n\Delta_1(\xi_1-\xi_2)\Delta_1(\xi_2-\xi_3)\ldots\ldots\Delta(\xi_n-\xi_1).$$

Если теперь мы подставим (41) в (42), то получим в показателе экспоненты своеобразную теорию возмущений по константе e_1^2. Первый член этого разложения $-2e_1^2p^2\int_0^s\int d\xi_1 d\xi_2\Delta_1(\xi_1-\xi_2)$ является главным в инфракрасной области, так как при

$s\to\infty$ стремится к $4R\pi^2e_1^2\ln p^2s$, в то время как возникающие из $i4e_1^4p^2\int_0^s\ldots\int_0^s d\xi_1\ldots d\xi_4 N(\xi_1\xi_2)\Delta_1(\xi_1-\xi_3)\Delta_1(\xi_2-\xi_4)$ и отвечающие графикам



(44)

члены имеют убывающую асимптотику при $s\to\infty$.

Например, первый член $\int_0^s\int_0^s\int_0^s d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3\Delta_1(\xi_1-\xi_2)\Delta_1(\xi_2-\xi_3)\to\frac{\ln p^2s}{p^2s}$. Также убывающую асимптотику при $s\to\infty$ имеют вклады в $G(p)$ от величины J. Величины σ_n в (43) соответствуют графикам

(45)

Учет $\sigma_1 = s\Delta_1(0)$ приводит только к перенормировке массы; $\sigma_2 = \int_0^s\int d\xi_1 d\xi_2\Delta_1(\xi_1-\xi_2)\Delta_1(\xi_2-\xi_1)$ приводит также к перенормировке массы и имеет конечный член, который стремится к нулю, когда $s\to\infty$. Такое же поведение после перенормировок имеют и остальные σ_n. Таким образом, удерживая только первый член в exp в (42) мы приходим к хорошо известному результату, что при $p^2\approx m^2$

$$G(p) = \frac{[1-\frac{p^2}{m^2}]^{e^2/4\pi^2}}{\gamma p - m} I(p), \tag{46}$$

где

$$I(p) = \epsilon(p^2-m^2)\int_0^\infty dx\, \ell^{ix\epsilon(p^2-m^2)} x^{\frac{e^2}{4\pi^2}}$$

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}.$$

В заключение отметим, что предложенный способ записи решений уравнения Дирака во внешнем поле и получение с его помощью квантовых величин может быть использован не только для отыскания инфракрасных асимптотик, но и для исследований области высоких энергий. Однако при этом необходимость в других способах аппроксимации функциональных интегралов не отпадает, поскольку предложенный способ базируется на предположении о малости вклада от квадратичных величин виртуальных импульсов $q_i q_j$ по сравнению с q_i (см. по этому поводу /15/).

Автор благодарен проф. Д.И.Блохинцеву и Л.Д.Соловьеву за интересные обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. Р.Л.Стратонович, ДАН СССР, 115, 1097 (1957).
2. J.Hubbard, Phys. Rev. Letters., 3, 77 (1959).
3. S.F.Edwards, Phil. Mag., 4, 1171 (1959).
4. В.А.Фок, Phys. Zs. Sowiet Union, 12, 404 (137).
5. R.P.Feynman, Phys. Rev., 84, 108 (1951).
6. И.И.Хиршман, Д.В.Уиддер. "Преобразования типа свертки" стр. 196 ИИЛ, Москва, 1958 г.
7. Е.С.Фрадкин. Диссертация ИТЭФ, (1960).
8. А.В.Свидзинский, ЖЭТФ, 31, 324 (1956).
9. J.Schwinger, Phys. Rev., 82, N 5, 664 (1951).
10. D.M.Volkow, Zs. f. Phys., 94, 25 (1935).
11. Г.А.Милехин. ЖЭТФ, 43, 1012 (1962).
12. D.R.,Yennie, S.C.Frautschi and H.Suura, Annals of Physics, 13, 379 (1961).
13. A.Salam, P.Metthews, Phys. Rev., 90, 690-695 (1953).
14. F.Bloch., A.Nordsick, Phys. Rev., 52, 54 (1937).
15. В.Г.Соловьев. Диссертация ОИЯИ (1956).
16. В.З.Бланк. ДАН СССР, 104, 706 (1955).
17. Л.Д.Соловьев. Препринт Р-1092, Дубна (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел

21 июля 1964 г.