ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов

Р-176

# К вопросу об индефинитной метрике в квантовой теории поля

1958 год

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

Н.Н.Боголюбов, Б.В.Медведев и М.К.Поливанов

# К ВОПРОСУ ОБ ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКЕ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ



1958 год

I. Основным методом в квантовой теории поля является в настоящее время метод перенормировок. Хотя этот метод и дает возможность вычислять все конкретные эффекты, но он отказывает служить в применении к задачам о происхождении собственных масс или хотя бы о вычислении полевых добавок к массам и зарядам. Это происходит потому, что теория содержит расходимости, при устранении которых с помощью ренормализационной процедуры приходится вводить произвольные константы, значения которых нельзя определить.

Математическим источником появления расходимостей является сильно сингулярное поведение функций Грина квантованных полей на световом конусе. Некоторое время назад определенные надежды возлагались на то, что сингулярность этих функций уменьшится после проведения перенормировки. Однако в 1952 году Челленом и в 1954 году Леманом была в чрезвычайно общих предположениях (по существу включающих лишь требование трансляционной инвариантности и существования полной системы амплитуд состояния с положительной нормой) доказана теорема, согласно которой сингулярность перенормированных функций Грина будет во всяком случае не ниже сингулярности функций Грина не взаимодействующих полей.

Теорема Лемана-Челлена не только разрушила надежду на возможность "компенсации сингулярностей" за счет перенормировки в обычной теории, но и поставила казалось бы непреодолимый барьер на пути построения нелинейных теорий, различные варианты которых предлагались рядом авторов [I].

Некоторое время назад Гайзенберг [2] выдвинул весьма интересную идею о том, что теорема Лемана-Челлена перестанет выполняться, если физические состояния с положительной нормой (лежащие по терминологии Гайзенберга в Raum - I) не составляют полной системы в гильбертовом пространстве амплитуд состояния, но должны быть дополнены "нефизическими" состояниями (лежащими в Raum - П), норма которых может быть и отрицательной, т.е. если ввести в гильбертовом пространстве амплитуд состояния индефинитную метрику.

2. В настоящей работе мы хотим обсудить различные возможности, возникающие в теории при введении индефинитной метрики. Рассмотрим для определенности рассуждений записанный в представлении взаимодействия лагранжиан взаимодействия

$$\mathcal{L}_{int}(x) = g\,\bar{\mathcal{X}}(x)\,\mathcal{X}(x)\,\mathcal{X}(x)\,\mathcal{X}(x) \qquad (I)$$

где, конечно, имеется в виду, что между операторами $\bar{\mathcal{X}}$, $\mathcal{X}$ стоят те или иные матрицы, выбирающие вариант взаимодействия, который мы не хотим детализировать. Тогда в такой теории будет существовать унитарная матрица рассеяния в обычной форме:

$$S = T\{e^{i\int \mathcal{L}_{int}(x)dx}\} \tag{2}$$

Используя идею Гайзенберга о втором гильбертовом пространстве, представим полное поле $\chi(x)$ в виде суммы

$$\chi(x) = \psi(x) + \sum_n C_n \psi_n(x) + \sum C_\nu \psi_\nu(x) \tag{3}$$

одного физического поля $\psi(x)$ и некоторого количества фиктивных полей $\psi_n(x)$, $\psi_\nu(x)$. Наложим на эти поля коммутационные условия[x]:

$$i\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = S(x-y)$$

$$i\{\psi_n(x), \bar{\psi}_n(y)\} = -S_{M_n}(x-y)$$

$$i\{\psi_\nu(x), \bar{\psi}_\nu(y)\} = S_{M_\nu}(x-y) \tag{4}$$

поля с разными нормерами антикоммутируют.

Тогда, вычисляя антикоммутатор полного поля $\chi(x)$ мы получим выражение в точности такое же, как в методе Паули-Вилларса до выполнения предельного перехода:

$$i\{\chi(x), \bar{\chi}(x)\} = S'(x-y) = S(x-y) -$$

$$-\sum_n C_n^2 S_{M_n}(x-y) + \sum C_\nu^2 S_{M_\nu}(x-y) \tag{5}$$

Ясно, что за счет обратных знаков в антикоммутаторах для

---

x) см.сноску на следующей стр.

в (4) мы можем и с большей степенью произвола так распорядиться коэффициентами $c_n$, чтобы выражение (5) оказалось в желательной степени регулярным. Очевидно, что также будет обстоять дело и для других сингулярных функций, например для хронологических спариваний.

Если мы теперь образуем обычным образом гильбертово пространство $H$ для нашей системы, построив из операторов полей операторы рождения частиц и действуя ими на вакуум $\Phi_0$, то операторам $\psi_n(x)$ x), для которых в антикоммутаторах избраны обратные знаки, будут соответствовать состояния с индефинитной нормой. Положение здесь в точности аналогично тому, которое возникает в электродинамике для компоненты $A^0$, если проводить там квантование по Гупта-Блейлеру.

Введем некоторые определения.

Выделим из всего пространства состояний системы Н подпространство состояний, в которых присутствуют только физические частицы сорта $\psi$, и назовем его $H_1$. Ортогональное дополнение к нему назовем $H_2$. Обозначим через $P$ оператор, проектирующий состояния $\Phi$ из $H$ на $H_1$. Тогда:

$$\Phi = P\Phi + (1-P)\Phi = \varphi + F, \quad \varphi \in H_1, \; F \in H_2 \tag{6}$$

$$P^+ = P, \quad P = P^2, \quad \|\Phi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|F\|^2$$

$$H = H_1 + H_2 \qquad \|\varphi\|^2 \geq 0$$

---

x) Мы вправе налагать на операторы поля произвольные коммутационные соотношения, поскольку мы пока ничего не сказали ни об уравнениях для них, ни о свободном лагранжиане. Ясно, что задевая коммутационные соотношения, мы тем самым фактически и фиксируем свободный лагранжиан.

3. Ясно, что при попытке "реалистического" подхода к теории из-за индефинитности метрики возникает специафическая трудность: поскольку состояния с отрицательной нормой не поддаются непосредственному физическому истолкованию, то нужно выработать некоторый запрет, который бы во всяком случае обеспечивал, чтобы такие состояния не появлялись в асимптотических выражениях наблюдаемых величин при $t \to \pm\infty$. Тут можно действовать несколькими способами.

Одна возможность была указана Гуптой и Блейлером. Они предложили считать все векторы из H с фиксированной составляющей в $H_I$, описывающими одно и то же физическое состояние. На составляющую же подобного вектора в $H_2$ накладывается условие (условие Лоренца), которое обеспечивает, во-первых, чтобы норма таких состояний была бы равна нулю и, во-вторых, чтобы они не вносили вклада в средние значения наблюдаемых величин.

Другая возможность /2/ состоит в том, чтобы наложить дополнительное условие: при $t \to -\infty$ допустимы только состояния из $H_I$, и постараться так выбрать взаимодействие и перестановочную функцию, чтобы из них вытекало выполнение того же условия и при $t \to \infty$.

Мы хотим исследовать ниже третью возможность, которая состоит в предположении, что каждая амплитуда обладает физической и нефизической частью, и нефизическая часть $F$ амплитуды состояния однозначно определяется по его физической части $\varphi$.

Представим себе, что задача ставится обычным для теории поля способом: т.е. сначала при $t = -\infty$ система находится в некотором состоянии $\Phi_{-\infty} = \varphi_{-\infty} + F_{-\infty}$ и затем в результате взаимодействия переходит при $t = +\infty$ в состояние $\Phi_{\infty} = \varphi_{\infty} + F_{\infty}$. При этом норма полной амплитуды состояния Ф будет, конечно, в силу унитарности обычным образом построенной матрицы рассеяния (I), сохраняться:

$$\|\Phi_{-\infty}\| = \|\Phi_{\infty}\| \tag{7}$$

Если бы нам удалось теперь устроить так, чтобы сохранялась не только норма Ф, но и норма ,

$$\|\varphi_{-\infty}\| = \|\varphi_{\infty}\| \tag{8}$$

и если определить "физическую" матрицу рассеяния $\tilde{S}$ соотношением

$$\varphi_{\infty} = \tilde{S}\varphi_{-\infty} \tag{9}$$

то в силу (3) $\tilde{S}$ была бы унитарной, состояния из одного лишь $H_I$ образовали бы для нее полную систему и она не вызывала бы никаких переходов из $H_I$ в $H_2$. Для того, чтобы не было бы и перекачки энергии в нефизические состояния, надо потребовать дополнительно сохранения среднего значения 4-импульса, взятого по одним физическим состояниям[x]:

$$\varphi_{\infty}^{*} P \varphi_{\infty} = \varphi_{-\infty}^{*} P \varphi_{-\infty} \tag{I0}$$

---

x) Заметим, что необходимость отдельного наложения условия (I0) обусловлена спецификой индефинитной метрики. В ней могут существовать отличные от нуля векторы с нулевой нормой.

4. Чтобы добиться выполнения (8) и (I0), попробуем наложить на нефизические составляющие амплитуд состояния условие[x)]

$$F_{\infty} + F_{-\infty} = 0 \qquad (II)$$

или в раскрытом виде:

$$F_{-\infty} + (1-P)S\,(F_{-\infty} + \varphi_{-\infty}) = 0 \qquad (II')$$

Это условие определяет в соответствии с нашей идеей нефизическую часть амплитуды состояния при $t = -\infty$ по физической:

$$F_{-\infty} = -\frac{1}{1+(1-P)S}(1-P)S\,\varphi_{-\infty} \qquad (I2)$$

Таким образом, физически допустимые начальные состояния системы описываются векторами вида

$$\Phi_{-\infty} = F_{-\infty} - \frac{1}{1+(1-P)S}(1-P)S\,\varphi_{-\infty} \qquad (I3)$$

Из условия (II) следует равенство норм

$$\|F_{\infty}\| = \|F_{-\infty}\|$$

и в силу (7) и (6) выполнение условия (8).

Если теперь воспользоваться для определения асимптотических значений 4-импульса, например, гипотезой адиабатического включения и выключения взаимодействия, тогда в силу аддитивности асимптотических значений операторов $P_i$ и ортогональности предпространств $H_I$ и $H_2$ будет

$$\Phi^*_{as} P \Phi_{as} = \varphi^*_{as} P \varphi_{as} + F^*_{as} P F_{as} \qquad (I4)$$

---

x) Можно было бы, конечно, написать и более общее условие

$$F_{-\infty} + e^{i\alpha} F_{\infty} = 0$$

отличающееся от (II) множителем.

и, благодаря (II), будет выполнено и условие (I0).

Таким образом, действительно, при наложении требования (II) все условия отсутствия связи между физическими и нефизическими состояниями выполняются. Следовательно, матрицей $\tilde{S}$ можно пользоваться в качестве матрицы рассеяния, связывающей только физические составляющие $\varphi$ амплитуд состояния.

Чтобы построить матрицу $\tilde{S}$, азметим, что в силу (I3)

$$\varphi_{\infty} = PS\{\varphi_{-\infty} + F_{-\infty}\} = PS\left\{1 - \frac{1}{1+(1-P)S}(1-P)S\right\}\varphi_{-\infty} \quad (I4)$$

благодаря чему после простых преобразований получим

$$\tilde{S} = PS\,\frac{1}{1+(1-P)S} \quad (I5)$$

Итак, мы видим, что физическая матрица рассеяния $\tilde{S}$ получается из нормальной полной матрицы $S$ довольно сложным образом. Оказывается, что дело обстоит значительно проще для вигнеровой реактивной матрицы K, определяемой соотношениями:

$$K = i\,\frac{1-S}{1+S}, \quad S = \frac{1+iK}{1-iK} \quad (I6)$$

или равенством

$$\Phi_{\infty} - \Phi_{-\infty} = iK(\Phi_{\infty} + \Phi_{-\infty}) \quad (I7)$$

Действительно, записывая в правой части (I9) Ф через $\varphi$ и $F$ пользуясь условием (II), получаем сразу

$$\varphi_{\infty} - \varphi_{-\infty} = iPK(\varphi_{\infty} + \varphi_{-\infty}) = iPKP(\varphi_{\infty} + \varphi_{-\infty})$$

Итак, $$\tilde{K} = PKP \tag{18}$$

т.е. физическая реактивная матрица К получается из полной матрицы К простым проектированием в физическое пространство $H_I$.

Это обстоятельство в чрезвычайной степени упрощает всю вычислительную сторону дела. Действительно, для полной матрицы К мы имеем такое же выражение, как в обычной теории:

$$K = \sum :\chi(x_1) \cdots \chi(x_n): K(x_1 \dots x_n) \tag{19}$$

Чтобы перейти к матрице $\tilde{K}$, нам надо только умножить это выражение с обеих сторон на проектирующие операторы Р. Но применение операторов Р с двух сторон (19) просто аннулирует все члены, содержащие внутри нормальных произведений хотя бы один оператор фиктивного поля, и таким образом, сводится просто к замене во всех нормальных произведениях в (19) операторов полного поля $\chi$ на операторы физического поля $\varphi$, причем коэффициентные функции остаются без изменения.

Таким образом, чтобы построить реактивную матрицу К в нашей теории, надо просто строить обычным образом такую матрицу для физического поля $\varphi$, как если бы других, фиктивных полей не было, но для сверток использовать не обычные функции $\bar{S}$ и $S^{(+)}$, но построенные из них комбинации $\bar{S}, S^{(+)}$ типа (5).

Заметим, наконец, что если бы мы интересовались не задачей рассеяния, а скажем, вопросом о полевых добавках к собственным значениям, то можно было бы не заниматься выделением физической части из полной амплитуды состояния Ф, но с равным успехом работать прямо с матрицей $S$.

5. Чтобы пояснить природу предлагаемого метода, приведем модельный пример из классической механики.

Рассмотрим один физический осциллятор (координата $q$), взаимодействующий с некоторым (в пределе бесконечным) количеством фиктивных осцилляторов (координаты $q_f$). Такая система будет описываться уравнениями:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q = \sum_f A_f q_f \tag{20.1}$$

$$\frac{d^2 q_f}{dt^2} + \omega_f^2 q_f = A_f q \tag{20.2}$$

Если мы зададимся целью исключить отсюда фиктивные осцилляторы $q_f$, то мы могли бы, например, проинтегрировать уравнения для $q_f$ с граничным условием

$$q_f(-\infty) = \dot{q}_f(-\infty) = 0$$

(вначале фиктивные осцилляторы не колебались) и получили бы для $q$ интегродифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 q}{dt^2}+\omega^2 q=\int_{-\infty}^{\infty}dt'\,K^{ret}(t-t')\,q(t') \tag{21}$$

с ядром
$$K^{ret}(t-t')=\Theta(t-t')\sum_f \frac{A_f^2}{\omega_f}\sin\omega_f(t-t') \tag{22}$$

запаздывающего типа (интегрирование выполняется здесь, конечно, в смысле гипотезы адиабатического включения и выключения взаимодействия). Но такое ядро - неэрмитово. Поэтому (2I) имело бы, вообще говоря, не осциллирующие, а затухающие решения - вся (в пределе непрерывного спектра) энергия перекачивалась бы в фиктивные осцилляторы. Конечно, не исключено, что специальным подбором фиктивных осцилляторов можно было бы добиться такого особого случая, когда такой перекачки не происходило бы. Однако, ответ на вопрос о возможности такой специальной конструкции потребовал бы особого сложного исследования. Такая процедура моделировала бы метод Гайзенберга.

Однако, для исключения фиктивных осцилляторов возможен и другой путь: можно было бы наложить на (20.2) условия типа нашего условия (II):

$$q_f(-\infty)+q_f(\infty)=0, \ldots \tag{23}$$

Тогда после исключения $q_f$ мы опять получили бы для $q$ интегродифференциальное уравнение типа (2I), однако, теперь ядро

$$\bar{K}(t-t')=\frac{K^{ret}+K^{adv}}{2}=\frac{\epsilon(t-t')}{2}\times \tag{24}$$
$$\times\sum_f \frac{A_f^2}{\omega_f}\sin\omega_f(t-t')$$

было бы уже эрмитовым и никакой перекачки энергии в фиктивные осцилляторы не происходило бы.

Вид уравнения (2I) показывает, что исключение фиктивных осцилляторов привело нас от локальной теории к нелокальной, описываемой интегральными уравнениями. По существу причиной э го послужило то обстоятельство, что мы применили для фиктивны осцилляторов "нелокальное" граничное условие, связывающее дин мические переменные при $-\infty$ и при $\infty$, или, говоря языко квантовой теории поля, падающие и уходящие поля.

6. Ясно, что и в действительном случае квантовой теории поля ситуация будет такой же. Исключая из наших первоначально локальных уравнений фиктивные поля с помощью нелокального граничного условия

$$F_{\infty} + F_{-\infty} \qquad (II)$$

мы придем к теории типично нелокального типа. Существенно, чт матрица рассеяния в ней будет гарантировано унитарной по самс способу ее построения.

Интересно было бы обследовать ситуацию, получить которук стремится Гайзенберг[3], в которой и норма нефизических сост ний и средние значения динамических переменных равны нулю

$$\|F\| = 0\ ; \quad F^{*} P F = 0 \qquad (25)$$

так что фиктивные поля вообще не несут ни нормы, ни энергии. Ситуация тогда еще более упростилась бы. Может быть, здесь должны играть важную роль поля "дипольного" типа. Можно попытаться применить разработанный метод к различным физическим моделям.

С одной стороны, можно поставить программу-максимум и использовать наш метод для разработки идеи Гайзенберга о получении спектра масс и свойств всех элементарных частиц из рассмотрения единой спинорной "праматерии", характеризуя ее надлежащими лагранжианом взаимодействия $\mathcal{L}_{int}$ и функциями распространения $\mathcal{S}^{6(?)}$.

Но можно и не ставить сразу такой обширной задачи и рассмотреть сперва программу-минимум, например, подход типа подхода Швингера/4/, когда существование и свойства симметрии элементарных частиц считаются заданными. Тогда наш метод мог бы послужить для вычисления расщепления мультиплетов в результате тех или иных взаимодействий. Предварительно только необходимо развить для нашего подхода методику перенормировки.

## Литература

1. Д.И.Блохинцев УФН, 61, № I (обзор содержит обширную библиографию).
   Д.Д.Иваненко, Квантовая теория поля, часть II (там ссылки на более ранние работы с 1938 года).
2. W.Heisenberg, Rev.Mod.Phys., 29, 269 (1957).
   (в этой статье ссылки на все предыдущие работы).
3. W.Heisenberg, Nuclear Physics 4, 532 (1957).
4. J.Schwinger, Annals of Physics 2, 407 (1958).