

$\frac{2}{4-84}$

ЛЯП

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Л. А. Чудов

P-175

Об одном методе восстановления
комплексного финитного потенциала по
предельной фазе

1958 год

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Л.А.Чудов

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ
КОМПЛЕКСНОГО ФИНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛА ПО
ПРЕДЕЛЬНОЙ ФАЗЕ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

1958 год

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время по вопросу о восстановлении потенциала в уравнении Шредингера по тем или иным асимптотическим свойствам его решений (спектральная функция или предельная фаза) имеется уже довольно много математических и физических работ. С математической точки зрения эта задача получила исчерпывающее решение в известных работах И.М.Гельфанда-Б.М.Левитана^{/1/}, М.Г.Крейна^{/7,8/} и В.А.Марченко^{/5/}. Были доказаны теоремы существования и единственности, разработаны методы, позволяющие во многих случаях фактически строить потенциал по предельной фазе или спектральной функции.

Однако, при первых же попытках применить эти результаты к обработке экспериментальных данных по рассеянию (в области малых энергий), выяснились два обстоятельства, ограничивающие значение этих работ для физики. Во-первых, математический аппарат, применяемый в этих работах довольно сложен. Это затрудняет проведение численных расчетов на основе этих работ и заставляет многих физиков пользоваться примитивным способом "пригонки" потенциала, зависящего от нескольких параметров, к экспериментально найденной фазе.

Во-вторых, и это самое главное, выяснилось, что математическая постановка задачи, принятая во всех упомянутых выше работах, предполагает существенно больше того, что может быть задано в реальной физической задаче. В математической постановке предполагается, что предельная фаза (или спектральная функция) известна для всех значений энергии. В действительности этого быть не может, так как само уравнение Шредингера теряет смысл при сравнительно невысоких^{x)} энергиях ($\sim 200 \text{ MeV}$). Применяемые иногда методы аналитической экстраполяции фазы за пределы изучаемого промежутка энергетической шкалы являются крайне сомнительными, ввиду неизбежных экспериментальных погрешностей и неустойчивости аналитической экстраполяции по отношению к этим погрешностям).

Из цитированных работ следует, что по конечному отрезку предельной фазы, заданной с конечной погрешностью, потенциал определяется неоднозначно. При этом малыми возмущениями, произведенными при достаточно большой энергии, можно сколь угодно сильно изменить потенциал. Таким образом, задача в обычном смысле является некорректной.

Однако, физический интерес представляет не потенциал сам по себе, а соответствующие ему волновые функции или, точнее говоря, некоторые квадратичные формы, содержащие волновые функции^{xx)}.

x) См. по этому поводу замечание в п.3.

xx) Это важное замечание принадлежит Я.А.Сморозинскому.

Поэтому представляет интерес рассмотреть вопрос о корректности обратной задачи с этой точки зрения. Речь идет фактически о корректности в слабом смысле (например, для преобразований Фурье-ядра $K(x, t)$, как указано в п.4).

Среди методов, применявшихся до сих пор к обратной задаче, наиболее удобным для этой цели является метод В.А.Марченко. Следуя этому методу, нужно было бы исследовать вопрос о слабой корректности решения $A(x, y)$ интегрального уравнения $A(x, y) + f(x, y) + \int_{-\infty}^{\infty} f(y, t) A(x, t) dt = 0$,

где $f(x, y)$ фактически представляет собой преобразование Фурье S - функций.

В настоящей работе предлагается новый метод восстановления потенциала по предельной фазе, основанный на применении интегрального преобразования типа Гельфанда-Левитана. Этот метод сводит вопрос к исследованию слабой корректности задачи Коши для функционально-дифференциального уравнения второго порядка, близкого к волновому уравнению, или для еще более простого уравнения первого порядка.

Предлагаемый метод, благодаря своей элементарности, оказался более удобным для численных расчетов, чем метод В.А.Марченко^{х)}). Дело сводится к решению (той или иной разност-

х) При численном решении линейного интегрального уравнения В.А.Марченко приходится решать системы линейных уравнений с полной матрицей. Более удобно для численных расчетов нелинейное интегральное уравнение, приведенное в цитированной работе В.А.Марченко. Оно приводит к "треугольной" системе уравнений, но функция $F(x, y)$, входящая в это уравнение, вычисляется довольно сложно.

ной схеме дифференциально-функционального уравнения для ядра $K(x, t)$. Описание одной такой схемы, проведенной в экспериментальных расчетах, приведено в Приложении.

x

x

x

В разработке и проверке разностной схемы принимала участие Р.Н.Федорова; И.А.Кропина и К.Н.Данилова выполнили большую работу по опытной проверке схемы на точность и устойчивость и провели некоторые другие расчеты, связанные с настоящей работой. Л.И.Лепилова и К.Н.Железнова под руководством В.Л.Евтеева выполнили расчеты по приближенному вычислению интегралов в смысле главного значения, возникающих при определении начальных данных Коши по предельной фазе (п.3)

I. Уравнение Шредингера и ядро $K(x, t)$ оператора преобразования. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-y'' + V(x)y = \kappa^2 y, \quad (I)$$

где $V(x)$ — непрерывная на замкнутом отрезке $[0, x_0]$

функция, равная нулю вне этого отрезка. Всюду в дальнейшем,

кроме п.4, функцию $V(x)$ можно считать комплексной. Для

упрощения рассуждений мы будем предполагать, что дискретный

спектр отсутствует; дискретные собственные значения (в слу-

чае финитного потенциала их число конечно) вносят лишь

несущественные изменения. Решение уравнения (I), определяе-

мое начальными условиями

$$y = 0, \quad y' = \kappa \quad \text{при } x = 0, \quad (2)$$

обозначим $\varphi(x; \kappa)$. При $V(x) \equiv 0$ соответствующим реше-

нием уравнения (I) будет $y = \sin \kappa x$. Следуя Гельфан-

ду-Левитану /I/, рассмотрим "треугольный" оператор преобразо-

вания, переводящий $\sin \kappa x$ в $\varphi(x; \kappa)$:

$$\varphi(x; \kappa) = \sin \kappa x + \int_0^x K(x, t) \sin \kappa t dt \quad (3)$$

Для того, чтобы функция $\varphi(x, \kappa)$, определяемая согласно

(3), являлась решением уравнения (I) с начальными данными

(2), необходимо и достаточно, чтобы ядро $K(x, t)$ удовлетво-

ряло следующим условиям:

$$K_{xx}(x, t) - K_{tt}(x, t) = V(x)K(x, t) \quad (4a)$$

$$K(x, 0) = 0, \quad (4b)$$

$$\frac{d}{dx} K(x, x) = \frac{1}{2} V(x) \quad (4c)$$

Доказательство этого утверждения получается путем непосредственной подстановки $\varphi(x, k)$ в (1) и (2).
 Существование функции $K(x, t)$, удовлетворяющей условиям (4), можно доказать, решая по методу Римана^{/3/} соответствующую краевую задачу для гиперболического уравнения (4а).

В дальнейшем мы будем заниматься обратной задачей и будем считать $V(x)$ неизвестной функцией. Поэтому в уравнениях (4) исключим $V(x)$:

$$K_{xx}(x, t) - K_{tt}(x, t) = K(x, t) \cdot \left[2 \frac{d}{dx} K(x, x) \right] \quad (5a)$$

$$K(x, 0) = 0 \quad (5b)$$

Отметим, одно необходимое для дальнейшего свойство $K(x, t)$, связанное с финитностью потенциала. При $x \geq x_0 = 2x_a$ ядро $K(x, t)$ зависит только от $x - t$:

$$K(x, t) = K(x - t) \quad \text{при } x > 2x_a \quad (6)$$

Действительно, при $x > x_a$ уравнение (5а) превращается в обыкновенное волновое уравнение, поэтому $K(x, t) = f(x - t) + g(x + t)$. Но из (4^б) при $x > x_a$ следует, что $g(\xi) = \text{const}$ при $\xi > 2x_a$ (Область, где $K(x, t) = f(x - t)$, более точно определяется условиями $x + t \geq 2x_a, t < x$).

2. Ядро оператора преобразования $K(x, t)$ и предельная фаза $\omega(x)$. При $x > x_a$ мы можем положить

$$\varphi(x, k) = A(k) \sin(kx + \omega(k)) \quad (7)$$

Здесь $\omega(k)$ — так называемая предельная фаза, непосредственно связанная с величинами, наблюдаемыми экспериментально.

Что касается амплитудного множителя $A(k)$, то он не имеет физического смысла, но через него просто выражается спектральная функция $\rho(k)$, уравнения (I) при начальных данных (2):

$$d\rho(k) = \frac{2\pi dk}{\pi [A(k)]^2} \dots$$

Пользуясь формулами (3) и (6) и интегрируя по частям, получаем

$$\varphi'_x(x_0, k) = k \left(\cos kx_0 + \int_0^{x_0} K(x_0, t) \cos kt dt \right) \quad (8)$$

Подставляя (3) и (8) в соотношение

$$\frac{\varphi'_x(x_0, k)}{\varphi(x_0, k)} = \frac{k \cos(kx_0 + \omega(k))}{\sin(kx_0 + \omega(k))}$$

вытекающее из (7), находим после элементарных преобразований:

$$\int_0^{x_0} K(t) \sin [kt + \omega(k)] dt = -\sin \omega(k) \quad (9)$$

Формула (9) определяет $K(\tau)$ однозначно, если система функций $\{\sin(k\tau + \omega(k))\}$ является полной. При наших предположениях относительно $V(x)$ (финитность и отсутствие дискретного спектра) это всегда имеет место. Доказательство

x) Спектральная функция $\rho(k)$ может быть определена следующим образом: $\int \varphi(x, k) \varphi(y, k) d\rho(k) = \delta(x-y)$

этого утверждения будет приведено в п.6. Для оценки погрешностей, вызываемых в $K(\tau)$ ошибками в определении $\omega(k)$, соотношение (9) несколько неудобно, так как из него мы получаем коэффициенты Фурье $K(\tau)$ по неортогональной системе функций, зависящей к тому же от $\omega(k)$. Для получения коэффициентов Фурье $K(\tau)$ по системе $\{\sin k\tau\}$ можно воспользоваться непосредственно проверяемым соотношением

$$\sin(k\tau + \omega(k)) = \int_0^{\infty} B(k, k') \sin k'\tau d\tau$$

$$B(k, k') = \cos \omega(k) \delta(k - k') + \frac{\sin \omega(k)}{\pi} \frac{1}{k - k'}$$

(интеграл понимается в смысле главного значения по Коши).

Однако при этом мы получим для

$$\tilde{K}_0(k) = \int_0^{x_0} K(\tau) \sin k\tau d\tau$$

интегральное уравнение

$$\cos \omega(k) \tilde{K}(k) + \frac{\sin \omega(k)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{K}_0(k')}{k - k'} dk' = -\sin \omega(k) \quad (10)$$

Решение уравнения (в общем случае комплексного потенциала нами не получено. В случае вещественного $V(x)$ оно может быть найдено другим путем.

3. Определение $K(x_0, t)$ по $\omega(k)$ в случае вещественного потенциала. Рассмотрим выражение

$$\Phi(k) = e^{-ikx_0} \left(\frac{y'_2(x_0, k)}{k} + iy(x_0, k) \right) \quad (11)$$

как функцию комплексного аргумента κ . Очевидно, $\varphi(\kappa)$ есть целая аналитическая функция. Легко показать, что $\varphi(\kappa)$ не имеет нулей в нижней полуплоскости, если, как мы предположили, дискретный спектр отсутствует^{x)}. Ввиду этого $\psi(\kappa) = \log \varphi(\kappa)$ может быть определена в замкнутой нижней полуплоскости как однозначная аналитическая функция. При вещественном κ в силу (3), (7) и (8)

$$\varphi(\kappa) = A(\kappa) e^{i\omega(\kappa)} = 1 + \int_0^{\alpha_0} K(\tau) e^{-i\kappa\tau} d\tau \quad (I2)$$

Для определения $K_0(\kappa)$ по $\omega(\kappa)$, т.е. аргументу $\varphi(\kappa)$, достаточно найти $A(\kappa)$, т.е. модуль $\varphi(\kappa)$. Переходя к $\psi(\kappa)$, получаем известную задачу об определении на вещественной оси вещественной части аналитической в нижней полуплоскости функции по ее мнимой части. Для того, чтобы применить интегральную формулу Коши, следует убедиться в том, что $\psi(\kappa)$ достаточно быстро стремится к нулю при $\kappa \rightarrow \infty$ (в нижней полуплоскости), и выбрать контур интегрирования так, чтобы он в пределе переходил в прямую $\text{Im} \kappa = 0$. В данном случае это легко сделать, пользуясь формулой (I2). Применяя формулу Коши, находим

$$1 + \int_0^{\alpha_0} K(\tau) e^{-i\kappa\tau} d\tau = \exp\left(i\omega(\kappa) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega(\kappa') d\kappa'}{\kappa - \kappa'}\right) \quad (I3)$$

x) Корню $\varphi(\kappa)$, лежащему в нижней полуплоскости, отвечает (при $x > x_0$) собственная функция $\varphi(x, \kappa) = C \exp(i\kappa x)$, имеющая интегрируемый квадрат. Поэтому κ^2 принадлежит дискретному спектру.

Соотношение (I3) позволяет высказать некоторые суждения о той неопределенности, которая неизбежно возникает в любой релятивистской реалистической постановке обратной задачи ввиду принципиальной невозможности узнать $\omega(k)$ для всех, сколь угодно больших значений k . Неполнота имеющихся данных должна компенсироваться какими-либо **априорными** суждениями о потенциале. Исходя из соотношения (I3), естественно вводить дополнительные предположения типа условий гладкости $V(x)$, так как подобные условия, как известно, обеспечивают соответствующую асимптотику $\omega(k)$ при $k \rightarrow \infty$. Формула (I3) дает возможность также оценивать влияние погрешности в $\omega(k)$ на $K(x_0, t)$ (точнее говоря, на коэффициенты Фурье этой функции). Для выяснения роли фаз, отвечающих высоким энергиям, представляется полезным привести следующий числовой пример. Для трех уравнений вида (I)

$$-y'' + V_i(x)y = k^2 y, \quad i = 1, 2, 3$$

были вычислены фазы $\omega_i(k)$, $i = 1, 2, 3$. Потенциалы были равны нулю при $x > 1$, а при $x < 1$ задавались следующими условиями:

$$V_1(x) = -1$$

$$V_2(x) = \begin{cases} -1,5, & 0 < x < 0,5; \\ -0,5, & 0,5 < x < 1; \end{cases}$$

$$V_3(x) = \begin{cases} -0,5, & 0 < x < 0,5; \\ -1,5, & 0,5 < x < 1; \end{cases}$$

График K раз выходит на общую асимптотику (как и следовало ожидать, поскольку все $V_i(x)$ имеют одинаковый интеграл), однако они заметно отличаются еще при $K \sim 2,5$. Если пересчитать все величины на случай взаимодействия двух частиц, имеющих массу протонов, то окажется, что $K \sim 2,5$ отвечает энергии $\sim 250 \text{ MeV}$, при глубине потенциальной ямы $\sim 40 \text{ MeV}$ (в случае потенциала V_1) и ширине ее 10^{-13} см. Таким образом, в этом довольно реальном примере грубая асимптотика, учитывающая лишь член вида $\frac{A}{K}$, начинает действовать при весьма высоких энергиях.

4. Постановка задачи Коши для $K(x, t)$. Вопросы единственности, существования и корректности.

Соотношения (9) и (13) однозначно определяют $K(x_0, t)$ и тем самым $K'_x(x_0, t)$, так как вследствие (6)

$K'_x(x_0, t) = -K'_t(x_0, t)$. Таким образом мы получаем для определения $K(x, t)$ следующую краевую задачу:

$$K_{xx}(x, t) - K_{tt}(x, t) = K(x, t) \left[2 \frac{d}{dx} K(x, x) \right]_{x_0} \quad (5a)$$

$$\left. \begin{aligned} K(x_0, t) &= K_0(x_0 - t), \\ K_x(x_0, t) &= K'_0(x_0 - t), \\ K(x, 0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (I4)$$

Последнее из условий (I4) иногда удобно заменять антисимметричным продолжением $K(x_0, t)$ и $K_x(x_0, t)$ на отрицательные значения t . В этом случае мы получаем обыч-

ную задачу Коши (в направлении оси X) для нелинейного функционально-дифференциального уравнения (5a), главная часть которого линейна и принадлежит к гиперболическому типу.

Для приближенного решения этой задачи можно воспользоваться численным методом, описание которого дано в приложении.

Исходя из сходства уравнения (5a) с обычным волновым уравнением, естественно пытаться применить метод последовательных приближений в форме Пикара^{/4/} для исследования вопросов существования и единственности решения, а также корректности поставленной задачи. Приведем результаты исследования. Единственность дважды непрерывно дифференцируемого решения имеет место в треугольнике, ограниченном характеристиками $t = \pm x$ и начальной прямой $x = x_0$. Последовательные приближения, получаемые по способу Пикара, сходятся к решению поставленной задачи в некоторой окрестности начальной прямой. Сходимость во всем характеристическом треугольнике также имеет место, если последовательные приближения ограничены в совокупности. По поводу последней оговорки следует заметить, что уравнение (5a) допускает неограниченно возрастающие решения (например, решения, не зависящие от t). Поэтому существование непрерывного решения в рассматриваемой задаче обусловлено специфическими свойствами начальных данных.

Исходя из соотношения (3), представляющего волновую функцию как преобразование Фурье от $K(x, t)$ по t , и формулы (13), выражающей преобразование Фурье начальной функции

$K(x_0, t)$ через $\omega(k)$, естественно искать условия корректности в слабом смысле, т.е. формулировать свойства непрерывной зависимости решения от начальных данных не для самой функции $K(x, t)$, а для ее преобразования Фурье, — или тоже самое для волновых функций. Укажем два подхода к решению задачи в этой постановке.

Пользуясь соотношениями (3) и (4), можно выразить $V(x)$ через волновые функции $\varphi(x, k)$:

$$V(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} dq' [\varphi(x, q') - \sin q'x] \sin q'x \right]^{*1} \quad (I5)$$

Для волновых функций получается интегродифференциальное уравнение

$$\varphi''(x, q) + q^2 \varphi(x, q) = \varphi(x, q) \frac{d}{dx} \left\{ \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} dq' (\varphi(x, q') - \sin q'x) \sin q'x \right\} \quad (I6)$$

с начальными условиями:

$$\varphi(x_0, q) = \sin q x_0 + \int_0^{x_0} K(x_0, t) \sin q t dt$$

$$\varphi'_x(x_0, q) = q \left(\cos q x_0 + \int_0^{x_0} K(x_0, t) \cos q t dt \right).$$

- x) При выводе формулы (I5) учтено, что в точке разрыва первого рода интеграл Фурье сходится к полусумме предельных значений слева и справа от разрыва (мы продолжаем $K(x, t)$ на область $t > x$ ~~на область~~, полагая $K(x, t) \equiv 0$ при $t > x$).

К этому уравнению, повидимому, можно применить метод последовательных приближений или разложения по малому параметру.

Второй подход приводит к более простому уравнению. Он опирается на следующее соотношение между $K(x, t)$ и резольвентой $\Gamma_x(t, 0)$, которая используется в работах М.Г.Крейна по обратной задаче [8]:

$$K(x, t) = \Gamma_{2x}(x+t, 0) - \Gamma_{2x}(x-t, 0).$$

Положим

$$K(x, t) = f(2x, x-t) - f(2x, x+t) \quad (I7)$$

Непосредственной проверкой можно установить, что функция $K(x, t)$, определенная согласно (I7), удовлетворяет уравнению (5a) и условиям (I4), если $f(u, v)$ удовлетворяет уравнению первого порядка

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} = f(u, u-v) f(u, v) \quad (I8)$$

начальному условию $f(x_0, x_0 - t) = K_0(x_0 - t)$. (При $u > x_0 = 2x_0$ $f(u, v)$ не зависит от u , так как уравнение (5a) в этой области превращается в волновое уравнение).

Таким образом, мы имеем в треугольнике $0 < v < u < x_0$ уравнение (I8) с начальным условием $f(x_0, v) = K_0(v)$. Заметим попутно, что уравнение (I8) очень легко решать численно.

Обозначим

$$\tilde{f}(u, q) = \int_0^u e^{-uqv} f(u, v) dv \quad (19)$$

Из (18) получаем уравнение для $\tilde{f}(u, q)$:

$$\tilde{f}'_u(u, q) = \{1 + \tilde{f}(u, q)\} \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \tilde{f}(u, q') e^{i(q'-q)u} dq' \quad (20)$$

С учетом начальных условий получаем из (20) нелинейное интегральное уравнение

$$1 + \tilde{f}(u, q) = \{1 + \tilde{f}(x_0, q)\} \exp\left\{-\frac{4}{\pi} \int_{x_0}^u du \int_0^\infty \tilde{f}(u, q') e^{i(q'-q)u} dq'\right\} \quad (21)$$

Это соотношение уже весьма наглядно выражает взаимное влияние различных гармоник и, повидимому, может быть изучено достаточно подробно.

6. Полнота системы асимптотических функций. В случае финитного комплексного потенциала можно элементарно доказать существование оператора преобразования, связывающего асимптотические функции $\sin(kx + \omega(k))$ и собственные функции непрерывного спектра $\Psi(x, k)$ *):

$$\Psi(x, k) = \sin(kx + \omega(k)) + \int_x^{2x_0 - x} A(x, t) \sin(kt + \omega(k)) dt \quad (22)$$

x) Ср. /5/

Подставляя $\Psi(x, \kappa)$ в уравнение (I), получаем уравнение в частных производных и граничные условия для $A(x, t)$:

$$A_{xx}(x, t) - A_{tt}(x, t) = V(x)A(x, t), \quad (23a)$$

$$\frac{d}{dx} A(x, x) = -\frac{1}{2} V(x), \quad (23b)$$

$$A(x, 2x_0 - x) = 0 \quad (23c)$$

Мы имеем так называемую задачу Гурса или первую краевую задачу с данными на характеристиках для гиперболического уравнения (23a). Решение этой задачи приведено, например, в [3]. Оно справедливо и в случае нелинейного комплексного потенциала. Вследствие обратимости соотношения (22), вопрос о полноте системы асимптотических функций равносильен вопросу о полноте системы собственных функций непрерывного спектра. Как показал М.А. Наймарк [6], при наших предположениях о $V(x)$ система собственных функций непрерывного спектра полна, если дискретный спектр отсутствует.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Разностная схема для вычисления $K(x, t)$

Согласно п.п. 3, 4 мы можем считать известными функции $K(x_0, t)$ и $K_x(x_0, t)$, где $x_0 = 2x_a$. По формуле Даламбера можно перенести эти начальные условия на отрезок $0 < t < x_a$ прямой $x = x_a$ и решать уравнение

$$\frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} = K(x, t) \cdot \left[2 \frac{d}{dx} K(x, x) \right] \quad (24)$$

в треугольнике $\{0 < t < x < x_a\}$. Уравнение (24)

мы заменим эквивалентной системой уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial K}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial t}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \psi, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\psi K, \quad (27)$$

где положено $\psi = 2 \frac{d}{dx} K(x, x)$. Первые два уравнения приведем к характеристической форме, а последнее проинтегрируем по x :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) (K + p) = -\psi, \quad (28)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \right) (K - p) = \psi, \quad (29)$$

$$y(x, t) = \int_{x_1}^{x_2} \psi(\xi) K(\xi, t) d\xi \quad (30)$$

Введем в области $0 < t < x < x_a$ основную квадратную сетку с шагом $\Delta x = \Delta t = h$ и занумеруем точки сетки, как указано на рис. I, индексами m, n , принимающими целые значения. По этой сетке будем вычислять величины K_m^n и P_m^n . Введем, кроме того, "полуцелые" точки (см. рис. I), в которых будем вычислять $y_{m+1/2}^{n+1/2}$.

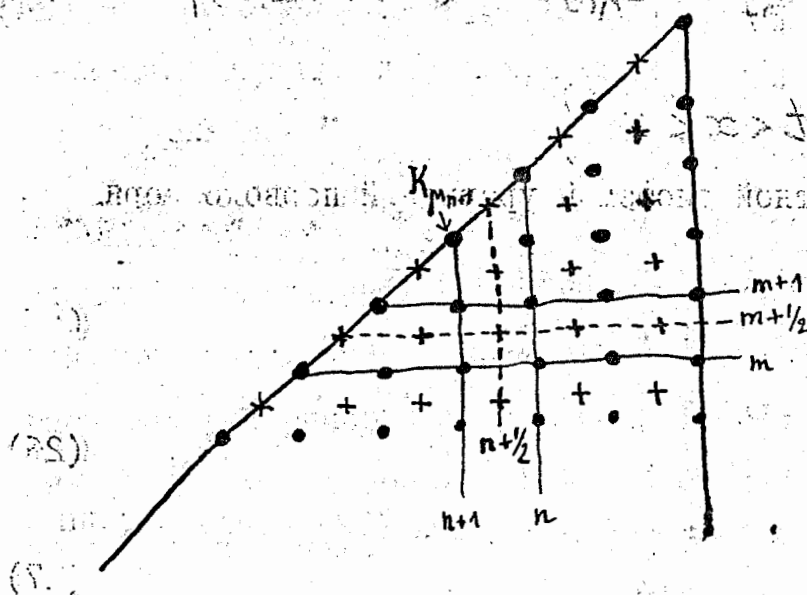


Рис. I.

Заменяя в (28), (29) производные симметричными разностными отношениями, и выражая интеграл в (30) по формуле трапеций, приходим к следующей системе уравнений:

$$y_{m+1/2}^{n+1/2} = y_{m+1/2}^{n-1/2} + h \frac{K_m^n + K_{m+1}^n}{2} \cdot \frac{\psi_{m+1/2}^{n+1/2} + \psi_{m+1/2}^{n-1/2}}{2} \quad (31)$$

$$K_m^{n+1} = \frac{1}{2}(K_{m+1}^n + K_{m-1}^n) + \frac{1}{2}(P_{m+1}^n - P_{m-1}^n) + \frac{1}{2}h(\psi_{m+1/2}^{n+1/2} + \psi_{m-1/2}^{n+1/2}) \quad (32)$$

$$P_m^{n+1} = \frac{1}{2}(K_{m+1}^n - K_{m-1}^n) + \frac{1}{2}(P_{m+1}^n + P_{m-1}^n) + \frac{1}{2}h(\psi_{m+1/2}^{n+1/2} - \psi_{m-1/2}^{n+1/2}) \quad (33)$$

Учитывая граничное условие при $t = 0$, получаем особые формулы для $m = 0$:

$$K_0^{n+1} = 0, \quad P_0^{n+1} = K_1^n + P_1^n + h \cdot \psi_{1/2}^{n+1/2}$$

Особым образом вычисляется также значение K_{m+1}^{n+1} значение K на диагонали $x = \bar{t}$:

$$K_m^{n+1} = \frac{(K_{m+1}^n + K_{m-1}^n) + (P_{m+1}^n - P_{m-1}^n) + h(\psi_{m+1/2}^{n+1/2} + \psi_{m-1/2}^{n+1/2}) + \frac{h}{4}(K_{m+1}^n + 2K_m^n + K_{m-1}^n)K_{m+2}^{n-1}}{2 + \frac{h}{4}(K_{m+1}^n + 2K_m^n + K_{m-1}^n)} \quad (34)$$

Эта формула получена из уравнения (31) и (32) путем замены $\psi_{m+1/2}^{n+1/2}$ разностным отношением:

$$\psi_{m+1/2}^{n+1/2} = 2 \frac{K_{m+1}^n - K_m^{n+1}}{h} \quad (35)$$

и исключением неизвестной величины K_m^{n+1} из полученных уравнений. Укажем последовательность счета:

$$K_m^{n+1} \rightarrow \psi_{m+1/2}^{n+1/2} \rightarrow \psi_{m+1/2}^{n+1/2} \rightarrow K_m^{n+1} \rightarrow P_m^{n+1}$$

По этой схеме производились опытные расчеты для случая, когда потенциал $V(x)$ задается условиями:

$$V(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x < 1, \\ +0,25, & 1 < x < 4, \\ 0, & x > 4 \end{cases} \quad (36)$$

Соответствующее ядро $K(x,t)$ имеет разрывы первого рода в производных (слабые разрывы). Если принять, что единица измерения для x равна 10^{-13} см. и предполагать, что уравнение (I) записано для случая $d-d$ взаимодействия, то глубина потенциальной ямы будет равна 20 Мэв. Для $p-p$ рассеяния глубина потенциальной ямы окажется равной 40 Мэв.

Опытные расчеты показали, что при тех порядках величин, которые отвечают $p-p$, $d-d$ и $d-d$ рассеянию, описанная схема является устойчивой, весьма точной и экономичной. Она может быть использована как для исследовательских расчетов (например, с целью выяснения влияния "высших гармоник"), так и для восстановления потенциала по экспериментально найденной фазе.

Цитированная литература

1. И.М.Гельфанд, Б.М.Левитан, Изв. АН СССР, сер.матем., 15, № 4, 309 (1951).
2. М.А.Наймарк "Линейные дифференциальные операторы", Гостехиздат, гл.УШ, 1954.
3. С.Л.Соболев "Уравнения математической физики", Гостехиздат, 1956 г., издание 3-е.
4. Р.Курант и Д.Гильберт "Методы математической физики", т.П, гл.У, № 5, Гостехиздат, 1951.
5. В.А.Марченко, ДАН СССР, 1955, 104, № 5.
6. М.А.Наймарк, Труды Московского математического общества, т.3.
7. М.Г.Крейн, ДАН СССР 105 (1955) № 3, (и еще ряд статей, опубликованных ранее в ДАН СССР).
8. М.Г.Крейн, Лекции, прочитанные в Московском университете в 1956-1957 гг.