ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-1744

Е. Червонко

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЬНЫХ ГАМИЛЬТОНИАНОВ В ЯДЕРНОЙ ФИЗИКЕ 1. ОДНОЧАСТИЧНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ

ЯФ, 1965, т2, в1, с14-23.

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1964

P-1744

Е.Червонко[x)]

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЬНЫХ ГАМИЛЬТОНИАНОВ В ЯДЕРНОЙ ФИЗИКЕ I. ОДНОЧАСТИЧНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Направлено в ЖЭТФ

---

x) Прикомандирован из Вроцлавского Университета, Вроцлав, Польша.

§ 1. Введение

В работах Н.Н. Боголюбова и сотрудников [1-3] доказана асимптотическая точность решения для основного состояния, термодинамического потенциала и гриновских функций гамильтониана Бардина-Купера-Шриффера. Этот результат впоследствие был подтвержден многими другими авторами [4-6] и распространен на другие гамильтонианы [7-10]. В частности, в работах [7,8] рассматривалась модель кристалла, в котором бесспиновые фермионы обменивались импульсами, равными векторам обратной решетки, а в [9] – гамильтониан БКШ, дополненный билинейными членами, диагональными в числах заполнения, аналогично тому, как это сделано в работе Зубарева и Церковникова [10] для бозонов. Во всех этих работах число суммирований во вторично квантованном гамильтониане взаимодействия уменьшено на единицу по сравнению с реальными гамильтонианом. Именно это позволяет провести всю процедуру нахождения асимптотически точного решения.

Рассмотрим гамильтониан:

$$H = \sum_{1} \epsilon(1) a^{+}(1) a(1) - \frac{A}{2} \sum_{l=1}^{k} L_l^{+} L_l - \frac{A}{2} \sum_{l=1}^{n} R_l^{+} R_l , \qquad (1.1)$$

где

$$L_l = \frac{1}{A} \sum_{12} \lambda_{12}^{l} a^{+}(1) a(2), \quad R_l = \frac{1}{A} \sum_{12} \rho_{12}^{l} a(1) a(2), \quad \rho_{12}^{l} = -\rho_{21}^{l}$$

и предположим, что I) $\sum_{1} \approx A$ A – порядка массового числа,

II) $\sum_{2} |\rho_{12}^{l}| \approx \sum |\lambda_{12}^{l}| \approx 1$,   откуда следует,

что $\sum_{12} |\lambda_{12}| \approx \sum_{12} |\rho_{12}^{l}| \approx A$;

III) $k = n = 1$.

Суммирование по числам пробегает одночастичные уровни сферического или деформированного ядра, энергия которых меньше некой энергии E(A). Зависимость E от A определяется условием I . Так как плотность уровней является растущей функцией массового числа, то E(A) растет с A медленнее, чем линейно.

Для сохранения четности и проекции момента количества движения (в деформированных ядрах на ось симметрии) необходимо чтобы :

IV) все ρ и λ были бы пропорциональны $\delta(m_1 + m_2 - M^{l})$ и $\delta(m_1 - m_2 - \tilde{M}^{l})$ соответственно.

V) состояния 1 и 2 в ненулевых ρ_{12}^{l}, λ_{12}^{l} имели бы только одинаковую или только противоположную четность.

В IV $- m_1, m_2$ это проекции момента количества движения в состояниях 1 и 2 соответственно. Для сохранения числа протонов в отдельности достаточно предположить, что ρ_{12} и λ_{12} диагональны по изотопическим переменным, хотя это вообще не необходимо.

Если все M^i, $\tilde{M}^i = 0$, то сохраняется не только проекция момента количества движения, но и

$$\sum_I \{a^+(mI)a(mI) - a^+(-mI)a(-mI)\} , \tag{1.2}$$

хотя сохранение проекции момента не гарантирует сохранения (1.2). В (1.2) суммирования проводятся по всем состояниям с определенным m. Если совокупность состояний Im при этом можно разбить на такие непересекающиеся классы, что все ρ и λ будут нулевыми при квантовых числах, взятых из разных классов, при суммировании (1.2) можно ограничиться одним таким классом, увеличивая, таким образом, число законов сохранения. В частности, когда все ρ и λ пропорциональны $\delta_{I,II}$ суммирование вообще можно опустить, получая сохранение старшинства (seniority).

Введем, следуя работе [3], вспомогательный гамильтониан

$$\sum_1 E(1)a^+(1)a(1) - \frac{A}{2}\sum_{i=1}^{k} L_i^+ L_i - \frac{A}{2}\sum_{i=1}^{n} R_i^+ R_i +$$

$$+ \frac{A}{2}\sum_{i=1}^{k} \phi_i (L_i^+ + L_i) + \frac{A}{2}\sum_{i=1}^{n} \nu_i (R_i^+ + R_i), \tag{1.3}$$

отличающийся от гамильтониана (1.1) прибавлением членов, линейных по $L_i^+ + L_i$ и $R_i^+ + R_i$ и вычитанием умноженных на соответствующие множители Лангранжа тех интегралов движения, которые неустойчивы к возмущению гамильтониана прибавленными членами. Это вычитание сказывается на замене $\epsilon(1)$ на $E(1)$. Вводим, согласно [1], [2], опережающую и запаздывающую термодинамические гриновские функции:

$$\pm i\Theta(\mp t)\langle [A(t), B]_+\rangle \equiv \langle\langle A(t); B\rangle\rangle^{ret}_{adv} ,$$

где $A(t)$ – оператор в гайзенберговском представлении, $B \equiv B(0)$ – антикоммутатор, Θ – функция Хевисайда.

Уравнения движения для гриновских функций

$$\langle\langle a(1t)\Xi(t); a^+(2)\rangle\rangle \equiv G_\Xi(12;t), \quad \langle\langle a^+(1t)\Omega(t); a^+(2)\rangle\rangle \equiv \Gamma_\Omega(12;t),$$

где Ω и Ξ являются произведениями операторов L, R и сопряженных, в системе с гамильтонианом (1.3) примут вид:

$$[i\frac{d}{dt} - E(1)]G_\Xi(12;t) = \delta(t)\langle [a(1)\Xi, a^+(2)]_+\rangle$$

$$-\frac{1}{2}\sum_i^k \sum_s \{\lambda^i_{1s}\langle\langle L_i^+ a(3)\Xi; a^+(2)\rangle\rangle + \lambda^{i*}_{s1}\langle\langle a(3)L_i\Xi; a^+(2)\rangle\rangle - \phi_i(\lambda^i_{1s} + \lambda^{i*}_{s1})G_\Xi(32;t)\} -$$

$$-\sum_i^n \sum_s \{\rho^{i*}_{s1}[\langle\langle a^+(3)R_i\Xi; a^+(2)\rangle\rangle - \nu_i\Gamma_\Xi(32;t)]\} + i\langle\langle a(1)\frac{d\Xi}{dt}; a^+(2)\rangle\rangle , \tag{1.4}$$

$$[i\frac{d}{dt} + E(1)]\Gamma_\Omega(12;t) = \delta(t)\langle [a^+(1)\Omega, a^+(2)]_+\rangle$$

$$+\frac{1}{2}\sum_i^k \sum_s \{\lambda^{i*}_{1s}\langle\langle a^+(3)L_i\Omega; a^+(2)\rangle\rangle + \lambda^i_{s1}\langle\langle L_i^+ a^+(3)\Omega; a^+(2)\rangle\rangle - \phi_i(\lambda^i_{s1} + \lambda^{i*}_{1s})\Gamma_\Omega(32;t)\}$$

$$+\sum_i^n \sum_s \{\rho^i_{s1}[\langle\langle R_i^+ a(3)\Omega; a^+(2)\rangle\rangle - \nu_i G_\Omega(32;t)]\} + i\langle\langle a^+(1)\frac{d\Omega}{dt}; a^+(2)\rangle\rangle . \tag{1.5}$$

где мы для краткости опустили время t во всех операторах перед точкой с запятой.

Используя неравенство треугольника для нормы оператора x), легко доказать, что нормы коммутаторов от R, R^+, L, L^+, a, a^+ так же как и нормы коммутаторов от этих операторов с операторами a и a^+ стремятся к нулю в пределе больших A как A^{-1}. Отсюда можем сразу получить, что свободные члены уравнений (1.4) и (1.5) в пределе больших A_{12} стремятся к $\delta_{1,2}\delta(t)\langle\Xi\rangle$ и к нулю соответственно. Покажем, что системе уравнений (1,4), (1.5) можно удовлетворить с асимптотической точностью, если вместо усреднения по большому каноническому ансамблю с гамильтонианом (1.3) провести усреднение по большому каноническому ансамблю с линеаризованной формой:

$$H' = \sum_1 E(1)a^+(1)a(1) - \sum_{12}\Lambda_{12}a^+(1)a(2)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{12}[P_{12}a^+(1)a^+(2) + P^*_{12}a(2)a(1)] + \frac{A}{2}\sum_i^k |\langle L_i\rangle|^2 + \frac{A}{2}\sum_i^n |\langle R_i\rangle|^2 , \tag{1.6}$$

где матрицы Λ и P определены следующим образом:

---

x) Здесь, как в [3], используется минимальная норма, согласованная с метрикой гильбертового пространства.

$$\Lambda_{12} = \tfrac{1}{2}\sum_{i}^{k}[\lambda_{12}^{i}(\langle L_i\rangle^{*} - \phi_i) + \lambda_{21}^{i*}(\langle L_i\rangle - \phi_i)] = \Lambda_{21}^{*}$$

$$P_{12} = \sum_{i}^{n}\rho_{21}^{i}[\langle R_i\rangle - \nu_i] = -P_{21} \qquad (1.7)$$

$\langle..\rangle$ обозначает усреднение по большому каноническому ансамблю с формой (1.6). Если в уравнениях (1.4), (1.5) перейти к усреднению с новым статистическим оператором, то в связи с тем, что операторы квазичастиц, в которых (1.6) диагонально, выражаются линейно через операторы, a, a^{+} можно пользоваться статистическим вариантом теоремы Вика [12], доказанным Блохом и Де Доминикисом. Используя эту теорему, можем написать с асимптотической точностью

$$G_{\Xi}(12;t) = \langle\Xi\rangle\langle\langle a(1t); a^{+}(2)\rangle\rangle = \langle\Xi\rangle G(12;t)$$

$$\Gamma_{\Omega}(12;t) = \langle\Omega\rangle\langle\langle a^{+}(1t); a^{+}(2)\rangle\rangle = \langle\Omega\rangle\Gamma(12;t).$$

Здесь мы не учли спаривания операторов $a(1), a^{+}(q), a^{+}(2)$ с операторами внутри Ω и Ξ. Но в связи с тем, что такие спаривания фактически уменьшают число суммирований в операторах L, R – сомножителях Ω и Ξ, их вклад асимптотически мал. По той же причине средние $\langle\Xi\rangle$ и $\langle\Omega\rangle$ асимптотически совпадают с произведениями средних своих сомножителей. Если учесть все вышесказанное, то уравнения (1.4), (1.5) можно переписать в форме

$$\left[i\frac{d}{dt} - E(1)\right]G(12;t) = \delta(t)\delta_{12} - \sum_{3}\Lambda_{13}G(32;t) - \sum_{3}P_{13}\Gamma(32;t)$$
$$+ iG(12;t)\sum_{j=1}\left\langle\frac{dV_j}{dt}\right\rangle/\langle V_j\rangle, \qquad (1.8)$$

$$\left[i\frac{d}{dt} + E(1)\right]\Gamma(12;t) = \sum_{3}\Lambda_{31}\Gamma(32;t) + \sum_{3}P_{13}^{*}G(32;t)$$
$$+ i\Gamma(12;t)\sum_{j=1}^{r}\left\langle\frac{dW_j}{dt}\right\rangle/\langle W_j\rangle, \qquad (1.9)$$

где $\quad \Xi = \prod_{j=1}^{P} V_j, \quad \Omega = \prod_{j=1}^{r} W_j \qquad V_j, W_j$

могут принимать значения всех $2(n+k)$ операторов $R_i, R_i^{+}, L_i, L_i^{+}$. Если в уравнениях (1.8), (1.9) отбросить последние члены, то мы получим уравнения для гриновских функций линеаризованной формы (1.6). Поэтому, если мы докажем, что последние члены в рассматриваемом приближении будут исчезать, то значит эти уравнения удовлетворяются. Нам потребуется доказать, что в рассматриваемом приближении:

$$\langle[a(1)a(2), H]\rangle = \langle[a^{+}(1)a(2), H]\rangle = 0. \qquad (1.10)$$

Забегая вперед, скажем, что такие соотношения всегда справедливы при стремлении температуры к нулю, что означает усреднение в (1.10) по вакууму квазичастиц, диаго-

нализирующих линеаризированный гамильтониан (1.6), как это следует из таких же соотношений в работе [13]. В дальнейшем мы докажем, что при всех наших ограничениях для гамильтониана соотношения (1.10) будут справедливы также при произвольной температуре. Поэтому при наложенных ограничениях мы можем получить таким же образом асимптотически точные выражения для средней энергии и одночастичных температурных возбуждений. Устремляя температуру к нулю, мы можем получить энергию основного состояния и энергию одночастичных возбуждений. Сам процесс предельного перехода в этом случае тривиален.

Все наши рассуждения можно провести также для более общего гамильтониана, не состоящего из факторизующихся членов. Этот гамильтониан может быть записан в виде:

$$\sum_{1}\epsilon(1)a^{+}(1)a(1) - \frac{1}{A}\sum_{1234}[\langle 12|G|34\rangle + \langle 12|F|34\rangle]\,a^{+}(1)a^{+}(2)a(3)a(4), \qquad (1.11)$$

где матрицы G и F кроме условий антисимметрии и эрмитовости:

$$\langle 12|\binom{F}{G}|34\rangle = -\langle 12|\binom{F}{G}|43\rangle = \langle 21|\binom{F}{G}|43\rangle$$

$$\langle 12|\binom{F}{G}|34\rangle = [\langle 43|\binom{F}{G}|21\rangle]^{*}$$

удовлетворяют также условиям:

$$\sum_{12}|\langle 12|G|34\rangle| = \sum_{23}|\langle 12|F|34\rangle| = A$$

$$\sum_{13}|\langle 12|G|34\rangle| = \sum_{12}|\langle 12|F|34\rangle| = 1.$$

Здесь мы можем совершить предельный переход $\nu_i, \phi_i \to 0$; тогда средние, выступающее в наших формулах, станут вообще говоря, квазисредними [14] и мы должны дополнительно потребовать сохранения неустойчивых интегралов движения.

§ 2. Диагонализация линеаризованного гамильтониана

В этой главе мы применяем методику, разработанную в работе [13], (см. также [15]) для диагонализации линеаризованного гамильтониана. Он диагонализуется при помощи общего преобразования Боголюбова

$$a(1) = \sum_{2}\{u_{12}\alpha(2) + v_{12}\alpha^{+}(2)\} \qquad (2.1)$$

с условиями унитарности

$$\sum_{3}[u_{13}u_{23}^{*} + v_{13}v_{23}^{*}] = \delta_{12}$$
$$\sum_{3}[u_{13}v_{23} + v_{13}u_{23}] = 0. \qquad (2.2)$$

Вследствие неустойчивости одночастичных интегралов движения одночастичные энергии заменяются в общем случае на

$$E(1) = \epsilon(1) - \lambda - \sigma q_1 - \mu m_1 , \tag{2.3}$$

где q_1 и m_1 – заряд и проекция момента в состоянии "1". Когда все M^i, $\tilde{M}^j$ равны нулю, лагранжев множитель μ можно приравнять нулю (см. условие 4° предыдущей главы). Иногда можно получить $\mu = 0$ из условий симметрии. Нельзя ввести соответствующий лагранжев множитель, если (1.3) не сохраняет четность, так как она не является одночастичным оператором. Для избежания этой трудности будем рассматривать только такие гамильтонианы L и R , операторы которых не перемешивают состояния различной четности. В связи с этим, а также наложенными условиями сохранения числа частиц любого сорта, u_{12} и v_{12} , нужные для диагонализации (1.6), будут диагональны по четности и по заряду.

После преобразования (2.1) гамильтониан (1.6) примет вид:

$$U + \sum_{12} T_{12} a^+(1) a(2) + \tfrac{1}{2} \sum_{12} (M_{12} a^+(1) a^+(2) + \text{h.c}), \tag{2.4}$$

где

$$U = \sum_1 E(1) F(11) - \sum_{12} \Lambda_{12} F(12) - \tfrac{1}{2} \sum_{12} [P_{12} \phi^*(21) + P^*_{12} \phi(21)] +$$
$$+ \frac{A}{2} \sum_i^k |\langle L_i \rangle|^2 + \frac{A}{2} \sum_i^n |\langle R_i \rangle|^2 \tag{2.5}$$

$$M_{12} = -M_{21} = \sum_3 E(3) [u^*_{31} v_{32} - u^*_{32} v_{31}] -$$
$$- \sum_{34} \Lambda_{34} [u^*_{31} v_{42} - u^*_{32} v_{41}] - \sum_{34} [P_{34} u^*_{31} u^*_{42} + P_{34} v_{32} v_{41}] , \tag{2.6}$$

$$T_{12} = T^*_{21} = \sum_3 E(3) [u^*_{31} u_{32} - v^*_{32} v_{31}] -$$
$$- \sum_{34} \Lambda_{34} [u^*_{31} u_{42} - v^*_{32} v_{41}] - \sum_{34} [P_{34} u^*_{31} v^*_{42} + P^*_{34} u_{32} v_{41}] . \tag{2.7}$$

Здесь

$$F(12) = F^*(21) = \sum_3 v^*_{13} v_{23}$$
$$\phi(21) = -\phi(12) = \sum_3 u_{23} v_{13} \tag{2.8}$$

являются средними значениями операторов $a^+(1)a(2)$ и $a(2)a(1)$ по вакууму квазичастиц. Условия диагональности формы (2.4) запишутся, конечно, в виде:

$$M_{12} = 0, \quad T_{12} = \tilde{E}(1) \delta_{12} , \tag{2.9}$$

что дает, в принципе , решение для параметров u и v как функции от $\langle L_i \rangle, \langle R_i \rangle$, на которые налагаются соответствующие условия самосогласованности. Эти условия могут быть получены как при помощи усреднения соответствующих операторов с употребляемой нами матрицей плотности, так и непосредственно из решения уравнений (1.8), (1.9) в предположении, что последние члены этих уравнений исчезают. Выбрав второй путь, мы легко получим, что фурье-образы гриновских функций квазичастиц $\langle\langle a(1t); a^+(2) \rangle\rangle$ и $\langle\langle a(1t); a(2) \rangle\rangle$ будут соответственно равны $\delta_{12} \{2\pi [E - \tilde{E}(1)]\}^{-1}$ и нулю. Использовав преобразование (2.1), получим фурье-образы функций G и Γ :

$$G(12;E) = \frac{1}{2\pi} \sum_3 \left[\frac{u_{13} u^*_{23}}{E - \tilde{E}(3)} + \frac{v_{13} v^*_{23}}{E + \tilde{E}(3)} \right] ,$$
$$\Gamma(12;E) = \frac{1}{2\pi} \sum_3 \left[\frac{v^*_{13} u^*_{23}}{E - \tilde{E}(3)} + \frac{u^*_{13} v^*_{23}}{E + \tilde{E}(3)} \right] , \tag{2.10}$$

их спектральные интенсивности

$$I(12;E) = \sum_3 \{ u_{13} u^*_{23} n(3) \delta(E - \tilde{E}(3)) + v_{13} v^*_{23} [1 - n(3)] \delta(E + \tilde{E}(3)) \}$$
$$i(12;E) = \sum_3 \{ v^*_{13} u^*_{23} n(3) \delta(E - \tilde{E}(3)) + u^*_{13} v^*_{23} [1 - n(3)] \delta(E + \tilde{E}(3)) \} \tag{2.11}$$

и связанные с ними корреляционные функции

$$\langle a^+(2) a(1) \rangle = \sum_3 \{ u_{13} u^*_{23} n(3) + v_{13} v^*_{23} [1 - n(3)] \}$$
$$\langle a^+(2) a^+(1) \rangle = \sum_3 \{ v^*_{13} u^*_{23} n(3) + u^*_{13} v^*_{23} [1 - n(3)] \} , \tag{2.12}$$

где

$$n(3) = [\exp \beta \tilde{E}(3) + 1]^{-1} .$$

Используя (2.12), можем написать условия самосогласованности:

$$\langle L_i \rangle = \frac{1}{A} \sum_{12} \lambda^i_{12} \langle a^+(1) a(2) \rangle ; \quad \langle R_i \rangle = \frac{1}{A} \sum_{12} \rho^i_{12} \langle a(1) a(2) \rangle \tag{2.13}$$

и исключить параметры λ , σ , μ , полагая

$$N = \sum_1 \langle a^+(1)a(1)\rangle, \quad Q = \sum_1 q_1 \langle a^+(1)a(1)\rangle$$

$$M^2 = \sum_1 m_1 \langle a^+(1)a(1)\rangle . \qquad (2.14)$$

Средняя энергия примет вид:

$$\langle H\rangle = \sum_1 \epsilon(1)\langle a\ (1)\, a(1)\rangle - \frac{A}{2}\sum_i^k |\langle L_i\rangle|^2 - \frac{A}{2}\sum_i^n |\langle R_i\rangle|^2 , \qquad (2.15)$$

где по сравнению с гамильтонианом (1.3) мы положили все ϕ_i, ν_i равными нулю и прибавили неустойчивые интегралы движения, умноженные на соответствующие лагранжевы множители. Как отмечалось в работе [15], решение задачи на собственные значения (2.9) определяет их с точностью до знака. Поэтому мы можем принять, что все $\tilde{E}(1)$ неотрицательны. В связи с этим в пределе нулевой температуры получим вместо функций (2.12) функции $F(21)$ и $\phi^*(12)$, соответственно. Формулы (2.13-15) имеют тот же вид. В этом случае средние пары фермионных операторов будут связаны между собой[13] соотношениями

$$\sum_3 [F(13)F(32) + \phi^*(31)\phi(32)] = F(12)$$

$$\sum_3 [F(13)\phi^*(32) + F(23)\phi^*(31)] = 0 . \qquad (2.16)$$

Как показал Н.Н. Боголюбов[13], при усреднении по вакууму квазичастиц формулы (1.10) будут следствием первого из уравнений (2.9), так как имеют место тождества:

$$\sum_{12} M_{12}u_{31}v^*_{42} + \sum_{12} M^*_{12}u^*_{42}v_{31} = \langle [a^+(4)a(3), H']\rangle$$

$$\sum_{12} M_{12}u_{31}u_{42} + \sum_{12} M^*_{12}v_{31}v_{42} = \langle [a(4)a(3), H']\rangle_0 \qquad (2.17)$$

и легко доказывается асимптотическое равенство

$$\langle [A, H]\rangle_0 = \langle [A, H']\rangle_0 ,$$

где A – любой оператор, являющийся произведением конечного числа фермионных операторов. Для рассматриваемого класса модельных гамильтонианов легко доказать, что если в (1.10), где усреднение заменено усреднением по большому каноническому ансамблю с линеаризованной формой (1.6), подставим средние (2.12), то получим тождество. Действительно, $Sp\{[A, H']\exp(-\beta H')\}$ равно нулю вследствие циклической инвариантности шпура, а $Sp\{[A, H]\exp(-\beta H')\}$ асимптотически совпадает с прежним выражением, в чем нетрудно убедиться. Выражения (1.10) в нашем случае можем записать в виде:

$$[E(1) + E(2)]\langle a(1)a(2)\rangle - \sum_3 [\Lambda_{23}\langle a(1)a(3)\rangle + \Lambda_{13}\langle a(3)a(2)\rangle]$$

$$+ P_{12} - \sum_3 [P_{32}\langle a^+(3)a(1)\rangle - P_{31}\langle a^+(3)a(2)\rangle] = 0 \qquad (2.18a)$$

$$[E(2) - E(1)]\langle a^+(1)a(2)\rangle - \sum_3 [\Lambda_{23}\langle a^+(1)a(3)\rangle - \Lambda_{31}\langle a^+(3)a(2)\rangle]$$

$$- \sum_3 [P_{23}\langle a^+(1)a^+(3)\rangle + P^*_{31}\langle a(3)a(2)\rangle] = 0 . \qquad (2.18б)$$

В этом случае трудно пока что-либо сказать о логической связи между уравнениями (2.9) с условиями самосогласованности и уравнениями (2.18). Поскольку соотношения (2.17) чисто алгебраические, то соотношения (2.18) будут действительны при температуре отличной от нуля также и тогда, когда мы вместо $\langle a\ (1)a(2)\rangle$, $\langle a(1)a(2)\rangle$, $\langle a\ (1)a\ (2)\rangle$ подставим соответственно $F(12)$, $\phi(12)$, $\phi^*(21)$, сконструированные из параметров u, v, удовлетворяющих первому из уравнений (2.9). В пределе нулевой темперутуры эти уравнения и уравнения (2.18), конечно, совпадут.

Таким образом, мы закончили доказательство всех нужных нам предположений, о которых говорилось в главе 1. Поэтому можно считать завершенным доказательство асимптотической точности со строгостью, сравнимой со строгостью работы[2]. Легко убедиться, что в нашем случае так же легко выполняется программа работы[1], приводя к тем же результатам. Мы, к сожалению, не можем продвинуться в общем случае по пути исследования[3], поскольку это требует знания решений уравнений (2.9) в явиой форме.

§ 3. Частные случаи

В этой главе будут рассмотрены системы, удовлетворяющие условию

$$\sum_3 [K_{13}P^*_{32} + K_{23}P^*_{31}] = 0 , \quad K_{13} = E(1)\delta_{13} - \Lambda_{13} . \qquad (3.1)$$

Значение (3.1) будет раскрыто в дальнейшем. Эрмитовскую матрицу K можно в общем случае записать в виде:

$$K_{13} = \sum_4 C^*_{14} C_{34}\Omega(4) ,$$

где

$$\sum_3 K_{13}C_{34} = E(1)C_{14} - \sum_3 \Lambda_{13}C_{34} = \Omega(4)C_{14} \qquad (3.2)$$

и C нормированы на единицу: $\sum_3 C^*_{31}C_{32} = \delta_{12}$. Подставляя (3.2) в (3.1), умножим затем (3.1) на $C_{15}C_{26}$ и суммируя по состояниям "1" и "2", получим:

$$[\Omega(5) - \Omega(6)]\tilde{P}^*_{56} = 0 ; \quad \tilde{P}^*_{56} = \sum_{12} C_{15}P^*_{12}C_{26} = -\tilde{P}^*_{65} . \qquad (3.3)$$

Все предыдущее рассмотрение очень похоже на рассмотрение Блоха и Мессия[16] проблемы канонической формы антисимметрического тензора (см.также[17]). Продолжая эти рассуждения, можем установить, что $\tilde{P}_{56}$ может не исчезать при закрепленном состоянии "5" лишь для одного состояния "6", если уровень $\Omega(5)$ только дважды вырожден. Если $\Omega(5)$ более чем дважды вырожден, то мы можем получить то же самое, используя унитарное преобразование в подпространстве определенного $\Omega(5)$. За подробностями отошлем читателя к упомянутой работе[16], а особенно к статье Зумино[17]. Мы условимся обозначать в дальнейшем $\tilde{P} = \delta_{5\bar{5}}\,\nu(5)$, где $\bar{5}$ по определению такое состояние, что только $P = -P_{\bar{5}5}$ может быть ненулевым. Из антисимметрии вытекает $\nu(\bar{5}) = -\nu(5)$.

Рассмотрим уравнения (1.8), (1.9) (без последних членов) при наложенных ограничениях (3.1). Функции G и Γ запишем в виде

$$G(12;t) = \sum_{45} C_{14} C^*_{25}\, g(45;t);\; \Gamma(12;t) = \sum_{45} C^*_{14} C^*_{25}\, \gamma(45;t)$$

затем в уравнениях воспользуемся уравнением на собственные значения (3.2). Если таким образом преобразованные уравнения для G и Γ умножить соответственно на $C^*_{16}C_{27}$ и $C_{16}C_{27}$ и просуммировать по "1" и "2", то получим:

$$\left[i\frac{d}{dt} - \Omega(6)\right] g(67;t) = \delta(t)\,\delta_{67} - \sum_4 \tilde{P}_{64}\,\gamma(47;t) \tag{3.4}$$

$$\left[i\frac{d}{dt} + \Omega(6)\right] \gamma(67;t) = \sum_4 \tilde{P}^*_{64}\, g(47;t)\,.$$

Мы пока не использовали следствия условия (3.1), поэтому мы можем упростить таким же образом уравнения (1.8), (1.9) в любом случае. Однако легко заметить, что в общем случае решение системы (3.4) так же сложно, как и первоначальной, поскольку сводится оно к диагонализации билинейной формы типа (1.6) с диагональным K_{12}, что также требует применения общего преобразования Боголюбова. Если использовать следствия (3.1), то после преобразования Фурье (3.4) получим:

$$[E - \Omega(6)]\, g(67;E) = \delta_{67}/2\pi - \nu(6)\gamma(\bar{6}7;E);\; [E + \Omega(6)]\,\gamma(\bar{6}7;E) = -\nu^*(6)\, g(67;E)\,. \tag{3.5}$$

Решая (3,5), имеем:

$$g(67;E) = \frac{\delta_{67}}{4\pi \tilde{E}(6)}\left[\frac{\tilde{E}(6) + \Omega(6)}{E - \tilde{E}(6)} + \frac{\tilde{E}(6) - \Omega(6)}{E + \tilde{E}(6)}\right],$$

$$\gamma(67;E) = \frac{\delta_{\bar{6}7}\,\nu^*(6)}{4\pi \tilde{E}(6)}\left[\frac{1}{E - \tilde{E}(6)} - \frac{1}{E + \tilde{E}(6)}\right],$$

$$\tilde{E}(6) = [\Omega^2(6) + |\nu(6)|^2]^{1/2},$$

откуда

$$G(12;E) = \frac{1}{4\pi}\sum_4 \frac{C_{14}C^*_{24}}{\tilde{E}(4)}\left[\frac{\tilde{E}(4) + \Omega(4)}{E - \tilde{E}(4)} + \frac{\tilde{E}(4) - \Omega(4)}{E + \tilde{E}(4)}\right].$$

$$\Gamma(12;E) = \frac{1}{4\pi}\sum_4 \frac{C^*_{14}C^*_{\bar{2}4}\,\nu^*(4)}{\tilde{E}(4)}\left[\frac{1}{E - \tilde{E}(4)} - \frac{1}{E + \tilde{E}(4)}\right]$$

подсчитав спектральную плотность и проинтегрировав ее, найдем

$$\langle a^+(2)a(1)\rangle = \tfrac{1}{2}\delta_{12} - \tfrac{1}{2}\sum_4 \frac{C^*_{24}C_{14}\Omega(4)}{\tilde{E}(4)}\,\mathrm{th}\,\frac{\tilde{E}(4)}{2\theta}$$

$$\langle a^+(2)a^+(1)\rangle = \tfrac{1}{2}\sum_4 \frac{C^*_{\bar{1}4}C^*_{24}\,\nu^*(4)}{\tilde{E}(4)}\,\mathrm{th}\,\frac{\tilde{E}(4)}{2\theta}\,,\quad \theta = \beta^{-1}. \tag{3.6}$$

Из предыдущего видно, что условие (3.1) является достаточным условием для того, чтобы уравнения для гриновских функций можно было привести к виду (3.5), используя лишь преобразование Хартри-Фока. Легко увидеть, что это будет также необходимым условием, так как всегда существует обратный переход от (3.3) к (3.1). В работе[16] было доказано, что общее преобразование Боголюбова является суперпозицией преобразования Х-Ф специального преобразования Боголюбова и еще одного преобразования Х-Ф, отличного в общем случае от первого. (3.1) является достаточным условием для того, что для диагонализации билинейной формы (1.6) достаточно одного преобразования Хартри-Фока и специального преобразования. Легко написать условие, при котором формулу (1.6) можно диагонализовать посредством преобразования Х-Ф, применяя к ней вначале специальное преобразование Боголюбова; однако это условие нельзя записать таким образом, чтобы в нем выступали лишь матрицы K и P, туда войдут еще параметры u и v. В частном случае, исследуемом нами, можно проверить, что условия (2.18) будут выполняться тождественно, если подставить в них решения (3.6). Вытекает это только из уравнений для собственных значений Ω (3.2) и условия (3.1); условия самосогласованности не играют здесь роли.

Вернемся теперь к условию (3.1). В нем выступают средние от операторов R и L, на этом этапе вычислений еще неизвестные. Потому мы не всегда можем определить, выполняется ли условие (3.1) или нет. Следует иметь в виду, что вычисление средних в предположении, что (3.1) выполняется с последующей проверкой этого соотношения является довольно сомнительной процедурой. Потому мы найдем условия, при выполнении которых (3.1) будет однородно по средним L и R. Заметим, что если $P_{12}[E(1) - E(2)] = 0$, то условие (3.1) будет иметь ту же форму, но вместо K в нем будет стоять матрица Λ. Однако, если форма (1.6) не сохраняет проекцию момента количества движения, то отличие от нуля лагранжевого множителя μ (см. (2.3)) практически снимает все вырождение и допускает равенства $P_{12}[E(1) - E(2)] = 0$, при "1" $\neq$ "2". Условие (3.1) будет однородно по $\langle L\rangle$ и $\langle R\rangle$, когда при всех i,j выполняются условия

$$\sum_3[\lambda^i_{13}\rho^i_{32}+\lambda^i_{23}\rho^i_{31}] = \sum_3[\lambda^{i*}_{31}\rho^i_{32}+\lambda^{i*}_{32}\rho^i_{31}] = 0. \qquad (3.7)$$

Второму из условий (3.7) можно удовлетворить, когда

$$\rho_{12} = \delta n_1 n_2 \delta j_1 j_2 \delta m_1 - m_2 (-1)^{j_1 - m_1} \rho(n_1) ,$$

а все λ^i_{12} принимают вид $\lambda^i(n_1 n_2, j_1 j_2) \langle j_1 m_1 | Y_{k\mu} | j_2 m_2 \rangle$, где n – радиальное квантовое число, jm – момент количества движения и его проекция, $Y_{k\mu}$ – сферическая функция, k – четно. На матрицу λ^i наложено ограничение

$$\left(\begin{smallmatrix}\lambda^i\\ \lambda^{i*}\end{smallmatrix}\right)(n_1 n_2, j_1 j_2)\rho(n_1) = \left(\begin{smallmatrix}\lambda^i\\ \lambda^{i*}\end{smallmatrix}\right)(n_2 n_1, j_2 j_1)\rho(n_2). \qquad (3.8)$$

Во всех предыдущих формулах мы опускали четность и изотопическую переменную, по которым ρ и λ диагональны и от которых они могут зависеть. Действительно, использовав (3.8), можно доказать, что второе соотношение (3.7) для λ^i пропорционально

$$\langle j_1 m_1 | Y_{k\mu} | j_2 - m_2 \rangle (-1)^{j_2 + m_2} + \langle j_2 m_2 | Y_{k\mu} | j_1 - m_1 \rangle (-1)^{j_1 + m_1}.$$

Используя формализм углового момента [18], можем доказать, что это выражение пропорционально

$$\begin{pmatrix} j_1 & k & j_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}[(-1)^{j_1+j_2} - 1] ,$$

и значит равно нулю при всех четных k и полуцелых j_1 , j_2 , как это следует из свойств символа Вигнера. Для выполнения первого условия (3.7) необходимо, чтобы все M равнялись нулю, так как в противоположном случае мы должны будем ввести лагранжев множитель для проекции углового момента.

Если ρ не зависит от n , то следуя работе Дайсона [19] получаем, что если K – кватернионно-действительная матрица, т.е. после обращения времени она совпадает с $K^+ = K$, то ее можно привести к диагональному виду при помощи симплектической группы, а матрица после преобразования будет иметь вид:

$$\rho \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для кватернионной действительности нужна кватернионная действительность всех матриц λ^i и матрицы $E(1)\delta_{12}$. Последнее требование ограничивает снова область применения этих рассуждений k $M = 0$. Можно убедиться, что условия (3.7) и условия кватернионной действительности не противоречат друг другу[x)].

x) На следствие, вытекающее из теоремы, доказанной Дайсоном, обратил мое внимание И.Н.Михайлов.

Приведем теперь те из условий (2.14) и (2.13), которые существенно упрощаются вследствие (3.1). Условие сохранения в среднем можно написать в виде, совпадающем с формулой теории сверхпроводимости с гамильтонианом БКШ:

$$N = ½ \sum_4 [1 - \frac{\Omega(4)}{\tilde{E}(4)} \operatorname{th} \frac{\tilde{E}(4)}{2\theta}].$$

Если матрицы P и Λ диагональны по изотопической переменной, то предполагалось что к аналогичному виду можно привести условие сохранения заряда

$$Q = ½ \sum_4 q_4 [1 - \frac{\Omega(4)}{\tilde{E}(4)} \operatorname{th} \frac{\tilde{E}(4)}{2\theta}].$$

К дальнейшим упрощениям соотношений (2.13) приводит предположение, что имеется только одна матрица ρ . В этом случае имеем:

$$|\langle R \rangle|^2 = \frac{1}{2A} \sum_4 \frac{|\nu(4)|^2}{\tilde{E}(4)} \operatorname{th} \frac{\tilde{E}(n)}{2\theta} ,$$

что находится в полном согласии с теорией сверхпроводимости. Если, наоборот, имеется только одна матрица λ , которая действительна и симметрична, то можно упростить уравнение для $\langle L \rangle$, приведя его к виду:

$$|\langle L \rangle|^2 = \frac{1}{2A} \sum_3 [E(3) - \Omega(3)] - \frac{1}{2A} \sum_{23} |C_{23}|^2 [E(2) - \Omega(3)] \frac{\Omega(3)}{\tilde{E}(3)} \operatorname{th} \frac{\tilde{E}(3)}{2\theta} .$$

В работе совершенно не затрагивались вопросы, касающиеся коллективных возбуждений гамильтониана (1.3). Они будут рассмотрены в последующей работе.

Автор пользуется случаем выразить свою глубокую благодарность Н.Н.Боголюбову и В.Г.Соловьеву за ценное обсуждение и интерес к работе, И.Н.Михайлову, указавшему на возможность применения симплектической группы, П.Фогелю за ценные дискуссии и обсуждения.

Литература

1. Н.Н. Боголюбов, Д.Н.Зубарев, Ю.А.Церковников, ДАН СССР, 117, 788 (1957).
2. Н.Н.Боголюбов, Д.Н.Зубарев, Ю.А.Церковников, ЖЭТФ, 39 , 120 (1960).
3. Н.Н. Боголюбов, Препринт Р-511, Дубна, 1960.
4. D.Mattis, E.Lieb, Journ. Math.Phys. 3, 522 (1962).
5. B.Muehlschlegel. Jorn. Math.Phys. 3, 522 (1962).
6. A. Klein. Nuovo Cim. XXIY, 788 (1962).
7. I.P. Bazarov. Physica 28, 479 (1962).
8. И.П.Базаров, Вестник МГУ, № 6, 85 (1963).
9. J.Czervonko. Bull. Pol. Sci. Cl. III, 99 (1961).

10. Д.Н.Зубарев, Ю.А.Церковников, ДАН СССР, 120, 991 (1958).

11. Н.Н.Боголюбов, С.В.Тябликов, ДАН СССР, 2 126, 53, (1959).

12. C.Bloch, C.De Dominicis, Nucl. Phys., 7, 459 (1958).

13. Н.Н.Боголюбов, 1 УФН, LXVII , 549 (1959).

14. Н.Н.Боголюбов, Препринт Д-781 (1961), R-1451 (1963), Дубна, Physica 26, SI (1960).

15. J.G.Valatin. Phys. Rev. 122, 1012 (1961).

16. C.Bloch, A.Messiah, Nucl. Phys., 39, 95 (1962).

17. B.Zumino, J.Math. Phys. 3, 1055 (1962).

18. A.R. Edmonds. Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton, 1957, Ch.5.4.

19. F.J.Dyson. Journ. Math. Phys. 3, 140 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
29 июня 1964 г.