27/VIII-64.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-1737

А.А.Логунов, Нгуен Ван Хьеу, И.Т.Тодоров

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ АМПЛИТУДАМИ ПРОЦЕССОВ С ПЕРЕМЕННЫМ ЧИСЛОМ ЧАСТИЦ

Phys. Lett, 1964, v 12, n 2, p 139-140.
Nucl. Phys., 1965 v 67, n 3,
p. 666-672.

1964

А.А.Логунов, Нгуен Ван Хьеу, И.Т.Тодоров

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ АМПЛИТУДАМИ ПРОЦЕССОВ С ПЕРЕМЕННЫМ ЧИСЛОМ ЧАСТИЦ

1. Введение

В работах [1-3] были получены асимптотические соотношения между амплитудами бинарных перекрестных процессов (рассеяния и фоторождения). На основе этих соотношений были установлены асимптотические равенства дифференциальных сечений и поляризаций.

В настоящей работе мы установим асимптотические соотношения между амплитудами процессов с переменным числом частиц. Далее с их помощью мы получим равенства между дифференциальными сечениями этих процессов.

Для простоты рассмотрим процессы рождения π -мезонов в мезон-нуклонных столкновениях:

$$\pi + N \to \pi' + \pi'' + N' \ , \tag{I}$$

$$\bar{\pi} + N' \to \bar{\pi}' + \bar{\pi}'' + N \ . \tag{II}$$

Рассуждения, приведенные ниже, с небольшими изменениями кинематического характера могут быть применены к любым другим процессам вида

$$a + b \to c + d + e, \tag{I'}$$

$$\bar{a} + e \to \bar{c} + \bar{d} + b \ . \tag{II'}$$

Процессы (I) и (II) или (I') и (II') в дальнейшем будем называть перекрестными. Аналогичное определение перекрестных процессов фоторождения было дано в [3].

2. Кинематика процесса рождения мезона в мезон-нуклонных столкновениях

Рассмотрим, например, (I). Обозначим 4-импульсы нуклонов в начальном и конечном состояниях через p и p', соответственно, а 4-импульсы мезонов - через q, q' и q''

$$p + q = p' + q' + q'', \tag{1}$$

$$p^2 = p'^2 = M^2, \quad q^2 = q'^2 = q''^2 = m^2, \tag{2}$$

где M и m –массы нуклона и мезона. Введем для удобства следующие более симметричные обозначения для импульсов и их квадратов:

$$p_1 = p\,,\; p_2 = q\,,\; p_3 = -p'\,,\; p_4 = -q'\,,\; p_5 = -q''\,, \tag{3}$$

$$p_j^2 = m_j^2\,.$$

Кинематика процесса с участием пяти частиц характеризуется пятью инвариантами, которые можно выбрать из следующих десяти переменных

$$s_{ij} = (p_i + p_j)^2\,,\quad i = j\,,\quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5; \tag{4}$$

между величинами s_{ij} и m_j^2 существуют пять линейных соотношений

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{5} s_{ij} = m_i^2 + \sum_{j=1}^{5} m_j^2\,,\quad i = 1,2,3,4,5, \tag{5}$$

или

$$s_{ij} + s_{ik} + s_{ki} - s_{\ell n} = m_i^2 + m_j^2 + m_k^2\,, \tag{6}$$

где i, j, k, ℓ, n – любая перестановка чисел 1, 2, 3, 4, 5 (среди 120 равенств (6) имеются только пять независимых, и они эквивалентны равенствам (5)).

Следуя работам [4,5], мы выберем следующие независимые переменные

$$t \equiv s_{13} = (p - p')\,,\quad t'' \equiv s_{25} = (q - q'')\,,$$

$$w^2 \equiv s_{45} = (q' + q'')\,,$$

$$e^{2\xi} = \frac{q'(p+p')}{q''(p+p')}\,,\qquad \omega = \frac{q\,(p+p')}{4\,\mathrm{ch}\,\xi\sqrt{M^2 - t/4}}\,. \tag{7}$$

Такой выбор переменных удобен тем, что, фиксируя переменные $t \le 0$, $t'' \le 0$, $w^2 \ge 4m^2\,\mathrm{ch}^2\xi$, $\xi \ge 0$, можно устремить энергетическую переменную ω к бесконечности, оставаясь в физической области. Три первых переменных t, t'' и w^2 имеют ясный физический смысл. Энергетическая переменная ω связана с полной энергией реакции в системе центра масс следующим равенством:

$$s \equiv s_{12} = 4\omega\,\mathrm{ch}\,\xi\sqrt{M^2 - t/4} + M^2 + \frac{m^2 + w^2 - t}{2}\,. \tag{8}$$

Что касается переменной ξ, то при больших ω она выражается через отношение энергии системы нуклона и одного из мезонов в конечном состоянии, например, $\sqrt{s_{34}}$ к полной энергии процесса ($\sqrt{s}$). Действительно, нетрудно проверить, что

$$u \equiv s_{23} = (q - p')^2 = -4\omega\,\mathrm{ch}\,\xi\sqrt{M^2 - t/4} + M^2 + \frac{m^2 + w^2 - t}{2}\,,$$

$$s' \equiv s_{34} = (q' + p')^2 = 2\omega\, e^{\xi}\sqrt{M^2 - t/4} + M^2 + \frac{m^2 + t'' - t}{2}\,,$$

$$u' \equiv s_{14} = (q' - p)^2 = -2\omega\, e^{\xi}\sqrt{M^2 - t/4} + M^2 + \frac{m^2 + t'' - t}{2}\,, \tag{9}$$

$$s'' \equiv s_{35} = (q'' + p')^2 = 2\omega\, e^{-\xi}\sqrt{M^2 - t/4} + M^2 + 2m^2 - \frac{w^2 + t''}{2}\,,$$

$$u'' \equiv s_{15} = (q'' - p)^2 = -2\omega\, e^{-\xi}\sqrt{M^2 - t/4} + M^2 + 2m^2 - \frac{w^2 + t''}{2}\,,$$

$$t' \equiv s_{24} = (q - q')^2 = 3m^2 + t - t'' + w^2\,,$$

и

$$e^{2\xi} = \frac{s' - u'}{s'' - u''} \xrightarrow[(s\to\infty)]{} \frac{s'}{s - s'}\,. \tag{10}$$

Вместо векторов q' и q'' удобно ввести ортогональные между собой векторы Q и Δ по формулам

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\,(e^{-\xi} q' - e^{\xi} q'')\,,$$

$$Q = \tfrac{1}{2}\,(e^{-\xi} q' + e^{\xi} q'') + \frac{m^2}{2\Delta^2}\,\mathrm{sh}\,2\xi\,\Delta\,. \tag{11}$$

Мы будем рассматривать процессы (I) и (II) в системе Брайта для нуклона

$$\vec{p} + \vec{p}\,' = 0\,. \tag{12}$$

Тогда среди векторов p, p', Q и Δ, через которые можно выразить (линейно) любой 4-вектор, только вектор Q зависит от ω.

3. Аналитические свойства асимптотической амплитуды

Запаздывающая амплитуда процесса (1) может быть записана в виде[4-8]:

$$T^{I}(p,q;p',q',q'') = \int d^4x'\, d^4x''\, e^{i(q'x'+q''x'')} \langle p' | \frac{\delta^2 j_\pi(0)}{\delta\phi_{\pi'}(x')\,\delta\phi_{\pi''}(x'')} | p \rangle$$

$$= T^{ret}(\omega) = \int d^4x\, d^4y\, e^{i(Qx+\Delta y)} F^{ret}(x,y), \tag{13}$$

где

$$j_\pi(x) = i\,\frac{\delta S}{\delta\phi^+_\pi(x)}\,S^+ . \tag{14}$$

В силу условия микропричинности[4-7]

$$F^{ret}(x,y) \neq 0$$

лишь в области

$$x > 0\,,\quad -\left(1 - \frac{m^2}{2\vec\Delta^2}\,\mathrm{sh}\,2\xi\right)x < y < \left(1 + \frac{m^2}{2\vec\Delta^2}\,\mathrm{sh}\,2\xi\right)x . \tag{15}$$

Вводя обозначение

$$G^{ret}(x_0,x_1) = \int dx_2\, dx_3\, d^4y\, e^{i(\Delta y - Q_2x_2 - Q_3x_3)} F^{ret}(x,y), \tag{16}$$

мы можем написать $T^{ret}(\omega)$ в виде

$$T^{ret}(\omega) = \int dx_0\, dx_1\, e^{i\{\omega x_0 - \sqrt{\omega^2-\omega_0^2}\,x_1\}} G^{ret}(x_0,x_1), \tag{17}$$

где ω_0 определяется формулой

$$4\,\mathrm{ch}^2\xi\,\omega_0^2 = w^2 + \frac{w^4}{4\vec\Delta^2}\,\frac{\mathrm{sh}^2\xi}{\sin^2\alpha} - \frac{(w^2+t-m^2)^2}{4t\,\sin^2\alpha} \tag{18}$$

$$+ \frac{w^2(w^2+t-m^2)}{4|\vec\Delta||\vec p|}\,\frac{\mathrm{sh}\,\xi\,\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\cos\alpha = \frac{(w^2-m^2)e^{\xi} - t\,e^{-\xi} - 2(m^2-t'')\,\mathrm{ch}\,\xi}{8|\vec\Delta||\vec p|}. \tag{19}$$

Так как амплитуду $T^{ret}(\omega)$ мы рассматриваем как функцию от ω при фиксированных остальных переменных, то в (17) ω_0 является постоянной.

Далее, следуя работе[8], мы сделаем предположение, что при больших $\omega(|\omega| \gg \omega_0)$ асимптотическая амплитуда (17) имеет вид x):

$$T^{ret}_\infty(\omega) = \int dx_0\, dx_1\, e^{i\omega(x_0 - x_1)}\, G^{ret}(x_0,x_1). \tag{20}$$

В силу условия микропричинности $G^{ret}(x_0,x_1) \neq 0$ только при $x_0 > |x_1|$. (21)

Поэтому функция $T^{ret}_\infty(\omega)$ аналитична в верхней полуплоскости ω (т.е. при $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ и к ней можно применить теорему Фрагмена-Линделефа[1-3].

Теперь установим соотношения перекрестной симметрии между амплитудами процессов (I) и (II). Обозначим через p и p' 4-импульсы нуклонов в начальном и конечном состояниях процесса (II), а 4-импульсы мезонов – через q, q' и q'' соответственно. Амплитуда этого процесса имеет вид

$$T^{II}(p,q;p',q',q'') = \int d^4x'\, d^4x''\, e^{i(q'x'+q''x'')} \langle p' | \frac{\delta^2 j^+_\pi(0)}{\delta\phi^+_{\pi'}(x')\,\delta\phi^+_{\pi''}(x'')} | p \rangle . \tag{22}$$

Рассмотрим амплитуду (22) при нефизических импульсах $T^{II}(p',-q;p,-q',-q'')$. Для этих значений импульсов мы имеем также закон сохранения (1). Тогда

$$T^{II}(p',-q,p,-q',-q'') = \left[\int d^4x'\, d^4x''\, e^{i(q'x'+q''x'')} \langle p' | \frac{\delta^2 j_\pi(0)}{\delta\phi_{\pi'}(x')\,\delta\phi_{\pi''}(x'')} | p \rangle\right]^*, \tag{23}$$

т.е. мы получим соотношение перекрестной симметрии между амплитудами процессов (I) и (II)

$$T^{I}(p,q;p',q',q'') = T^{II}(p',-q;p,-q',-q'')^* . \tag{24}$$

4. Асимптотическое равенство дифференциальных сечений

Из соображений инвариантности следует, что амплитуды $T^J(p,q;p',q',q'')$ имеют вид

$$T^J(p,q;p',q',q'') = \sum_{i=1}^{4} F^J_i(\omega,t,t'',w^2,\xi)\,\bar u(p')\,M_i\,u(p), \tag{25}$$

---

x) Это предположение легко доказывается, если функция $G^{ret}(x_0,x_1)$ непрерывна и абсолютно интегрируема; оно остается справедливым и для широкого класса обобщенных функций.

где

$$M_1 = \gamma_5\,, \quad M_2 = (\hat{q}_1 + \hat{q}_2)\,\gamma_5\,,$$

$$M_3 = (\hat{q}_1 - \hat{q}_2)\,\gamma_5\,, \quad M_4 = (\hat{q}_1 + \hat{q}_2)(\hat{q}_1 - \hat{q}_2)\,\gamma_5\,. \tag{26}$$

Подставляя (25) и (26) в (24), мы получим соотношения перекрестной симметрии между инвариантными амплитудами

$$F_i^{I}(\omega, t, t'', w^2, \xi) = \begin{cases} -F_i^{II}(-\omega, t, t'', w^2, \xi)^*\,, & i = 1,2,3, \\ F_i^{II}(-\omega, t, t'', w^2, \xi)^*\,, & i = 4. \end{cases} \tag{27}$$

Дифференциальные сечения процессов (I) и (II)

$$\frac{d^4\sigma^J}{dt\, dt''\, dw^2 d\xi}$$

пропорциональны величинам

$$H^J = \sum_{i=1}^{4} A_i\, |F_i^J|^2 + \sum_{i<j} A_{ij}\, \mathrm{Re}\, F_i^J F_j^{J*}\,, \tag{28}$$

где в асимптотике $(\omega \to \infty)$

$$A_1 = -2t\,, \quad A_2 \approx 2(s' + s'')^2\,, \quad A_3 \approx 2(s' - s'')^2$$

$$A_4 \approx 2(s' + s'')^2 (w^2 - 4m^2) + 2(s' - s'')^2 w^2\,,$$

$$A_{12} = -4M(t' + t'' - 2t)\,, \quad A_{13} = -4M(t'' - t')\,, \tag{29}$$

$$A_{14} \approx -4[(t+m^2)(s' - s'') - t's' + t''s'']\,, \quad A_{23} \approx 4(s''^2 - s'^2)\,,$$

$$A_{24} \approx -8M(s' - s'')\, w^2\,, \quad A_{34} \approx -8M(s' + s'')(w^2 - 4m^2).$$

Пользуясь выражением (28) и (29) для сечений и соотношением перекрестной симметрии (27), с помощью метода, развитого в работах [1-3], можно доказать асимптотическое равенство дифференциальных сечений процессов (I) и (II). В частности, имеет место асимптотическое равенство дифференциальных сечений процессов

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + \pi^0 + p \qquad \text{и} \qquad \pi^- + p \to \pi^- + \pi^0 + p$$

при $\omega \to \infty$ и фиксированных t, t'', w^2 и ξ.

В случае образования систем двух π-мезонов в резонансном состоянии с $J = 1$, $I = 1$ (ρ-мезон), мы имеем равенство дифференциальных сечений для процессов

$$\pi^+ + p \to \rho^+ + p \qquad \pi^- + p \to \rho^- + p\,.$$

5. Заключение

Обсудим возможные обобщения полученных результатов. Выше мы рассмотрели случай, когда полная энергия системы двух π-мезонов (в системе центра масс этих двух частиц) $w_{\pi\pi}$ фиксирована, а полная энергия системы нуклона и одного из мезонов (в с.ц.м. этих частиц) $w_{\pi N}$ стремится к бесконечности вместе с полной энергией реакции s (ξ фиксировано). Аналогичным образом можно рассмотреть случай, когда энергия $w_{\pi N}$ фиксирована, а энергия $w_{\pi\pi}$ стремится к бесконечности вместе с s, и доказать равенство дифференциальных сечений. В случае образования систем нуклонно-мезонной системы в резонансной состоянии мы имеем равенство дифференциальных сечений процессов, например,

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + \Delta^+ \qquad \text{и} \qquad \pi^- + p \to \pi^- + \Delta^+$$
$$\qquad\quad \to p + \pi^0 \qquad\qquad\qquad\qquad \to p + \pi^0$$

Далее можно рассмотреть также случай мезонов с различными массами и, в частности, получить асимптотические равенства дифференциальных сечений для процессов:

$$\pi^- + p \to K^+ + K^- + n \qquad \text{и} \qquad \pi^+ + n \to K^- + K^+ + p\,,$$

$$K^+ + p \to K^0 + \pi^+ + p \qquad \text{и} \qquad K^- + p \to \bar{K}^0 + \pi^- + p\,,$$

$$K^+ + p \to K^+ + \pi^0 + p \qquad \text{и} \qquad K^- + p \to K^- + \pi^0 + p\,.$$

В случае образования систем двух мезонов или мезонно-нуклонной системы в резонансном состоянии мы имеем, соответственно, равенства дифференциальных сечений для процессов

$$\pi^- + p \to \phi + n \qquad \text{и} \qquad \pi^+ + n \to \phi + p\,,$$

$$K^+ + p \to K^{*+} + p \qquad \text{и} \qquad K^- + p \to K^{*-} + p\,,$$

или

$$K^+ + p \to K^+ + \Delta^+ \qquad \text{и} \qquad K^- + p \to K^- + \Delta^+\,.$$
$$\qquad\quad \to p + \pi^0 \qquad\qquad\qquad\qquad \to p + \pi^0$$

Аналогично можно рассмотреть процессы фоторождения двух мезонов и процессы рождения мезонов в нуклон-нуклонных столкновениях, например,

$$\gamma + p \to \pi^+ + \pi^0 + n \qquad \text{и} \qquad \gamma + n \to \pi^- + \pi^0 + p\,,$$

$$p + p \to n + \pi^+ + p \qquad \text{и} \qquad \bar{n} + p \to \bar{p} + \pi^+ + p\,;$$

а в частном случае

$$\gamma + p \to \rho^{+} + n \quad \text{и} \quad \gamma + n \to p^{-} + p ,$$

$$p + p \to n + \Delta^{++} \quad \text{и} \quad \bar{n} + p \to \bar{p} + \Delta^{++} .$$

В заключение авторы выражают глубокую благодарность Н.Н.Боголюбову, Д.И.Блохинцеву, С.С.Герштейну, П.С.Исаеву, М.А.Маркову, А.Н.Тавхелидзе и О.А.Хрусталеву за интерес к работе и ценные обсуждения.

Литература

1. А.А.Логунов, Нгуен Ван Хьеу, И.Т.Тодоров и О.А.Хрусталев, ЖЭТФ, 46, 1079 (1964).

2. А.А.Логунов, Нгуен Ван Хьеу, И.Т.Тодоров, Препринт ОИЯИ Е-1520 (1964).

3. Nguyen-van-Hieu, Phys. Lett., 9, 81 (1964).

4. A.A.Logunov and I.T. Todorov, Nucl. Phys., 10, 522 (1959).

5. И.Т.Тодоров, Научные доклады высшей школы, физ.мат. науки, № 5, 131 (1958).

6. А.А.Логунов и А.Н.Тавхелидзе, ДАН СССР, 120, 501 (1958).

7. Н.Н.Боголюбов, Б.В.Медведев и М.К.Поливанов "Вопросы теории дисперсионных соотношений." М.Физматгиз (1958).

8. Н.Н.Мейман, ЖЭТФ, 46, 1502 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел
29 июня 1964 г.