

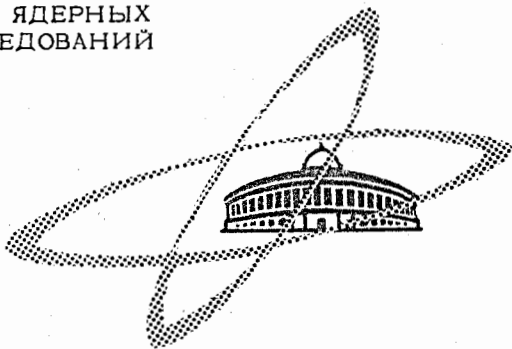
1736

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Экз. Чит. зала

P-1736



Я.А. Смородинский

УНИТАРНАЯ СИММЕТРИЯ  
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1964

*Бурдakov*

P-1736

Я.А. Смородинский

УНИТАРНАЯ СИММЕТРИЯ  
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

ОИЯИ  
БИБЛИОТЕКА

## § 1. Введение

Современный физик, исследуя явление в мире элементарных частиц, считает свою работу завершенной, если он может сформулировать закономерности экспериментального материала в краткой форме законов сохранения.

Может быть обилие законов сохранения связано с тем, что мы еще не знаем более глубокого механизма, который регулирует многообразие процессов, происходящих с частицами. В будущем, вероятно, окажется, что многие законы сохранения связаны общей причиной и являются следствием некоторой общей симметрии пространства и времени. Однако сейчас они выступают как независимые и их изучение является основным направлением современных исследований.

Законы сохранения в физике элементарных частиц и связанная с ней симметрия характерны тем, что они во многих случаях оказываются не точными, а лишь приближенными. В связи с этим в физике появилась новая возможность изучения явлений, связанная с тем, что нарушение симметрии оказывается во многих случаях относительно малым и достаточно простым по своим свойствам.

Примером такой симметрии является изотопическая симметрия; нарушающие ее электромагнитные и слабые взаимодействия хорошо изучены. Не будет большим преувеличением сказать, что наиболее интересные результаты были достигнуты в физике именно тогда, когда выяснились законы нарушения симметрии. Эту линию можно проследить даже в астрономических наблюдениях. Галилей считал, что планеты совершают свой путь по "естественным" круговым орбитам. Нарушение аксиальной симметрии путей планет, открытое Кеплером, привело к созданию классической механики. Триумфом общей теории относительности было открытие движения перигелия Меркурия, знаменующее собой нарушение симметрии — замкнутости орбит классической механики.

В квантовой физике вопрос о новых законах сохранения возникает тогда, когда пытаются понять строение связанных состояний системы. Открытие уровней атома водорода привело к модели Бора. Систематика уровней оказалась связанной с новыми свойствами симметрии, которые только много лет спустя были сформулированы Фоком, в форме симметрии вращения в четырехмерном мире<sup>х)</sup>. Возможность чисто группового описания атома водорода представляет собой очень важное явление в атомной физике, которое незаслуженно обходится в большинстве курсов квантовой механики.

х) Тот факт, что уровни атома водорода отражают симметрию не в физическом трехмерном пространстве, очень поучителен, так как делает менее неожиданным явление в дальнейшем пространств изотопического и унитарного.

Симметрия относительно перестановок и связанный с ним принцип Паули дают возможность понять структуру уровней атомов со многими электронами.

В ядерной физике изучение уровней атомных ядер привело к открытию зарядовой инвариантности и связанного с ним изотопического пространства. Изотопический спин частиц и ядер является сейчас не менее привычной характеристикой ядра, чем обычный спин или заряд ядра.

Открытый Вигнером в 1937 году закон сохранения изотопического спина обнаружил свою полную силу в физике элементарных частиц.

До тех пор пока были известны только две тяжелые частицы — протон и нейтрон, вопрос о новых квантовых числах не возникал; когда же были открыты гипероны, то возник вопрос о том, в чем состоит причина их большой стабильности, так как время их жизни ( $10^{-10}$  сек) по ядерным масштабам велико. Первым шагом построения теории, как и в истории атома, явилось введение "главного квантового числа" для системы уровней барионов (так можно назвать семейство нуклонов и гиперонов). Таким главным квантовым числом оказалась открытая Гелл-Манном и Нишиджимой "странность"  $S$  (или гиперзаряд  $Y$ , равный сумме  $S$  и барионного числа  $B$ ).

Сейчас мы не имеем ни малейшего представления о том, с какими свойствами сильно взаимодействующих частиц связано это квантовое число. Может быть, странность есть просто компактное описание взаимодействия частиц и того не очень понятного фона, который принято называть "физическим вакуумом". Но как бы то ни было, открытие странности является одним из самых существенных этапов развития физики элементарных частиц.

Для того, чтобы включить "странность" в аппарат теории, необходимо было расширить схему изотопического спина. Первая попытка такого рода была сделана Сакатой ( $A_1, A_2$ ), рассмотревшим схему  $U(3)$  унитарного вектора (протон-нейтрон- $\Lambda$ -гиперон), а также Марковым и Окунем. Однако выделение из всех гиперонов в основной вектор только трех оказалось недостаточно радикальным, и реальный успех теории принесла схема  $SU(3)$ , предложенная Гелл-Манном и Нейманом. Эта схема, которая была принята сначала очень сдержанно, оказалась наиболее эффективной. Триумфом ее было открытие предсказанного ею  $\Omega^-$ -мезона /81/.

Схема Гелл-Манна и Неймана [C1,2,3] была названа первым автором "восьми-ричным путем — "eight-fold way" <sup>x)</sup>. Интересно отметить, что группа  $SU(3)$  определяет симметрию уровней трехмерного гармонического осциллятора.

<sup>x)</sup> Название схемы связано с легендой о Будде и восьми дорогах к уничтожению страдания: правильные взгляды, правильные намерения, правильные слова, правильные действия, правильная жизнь, правильные усилия, правильное мышление и правильная концентрация.

Несмотря на то, что разности масс гиперона, равные нулю в  $SU(3)$ , велики, выяснилось, что весьма простые предположения о симметрии взаимодействия, нарушающего симметрию  $SU(3)$ , позволяют описать фактическое расщепление масс. Более того, расщепление изотопических мультиплетов также уложилось в простую схему. Успех теории все время нарастает. Полученные данные позволяют ожидать значительного передвижения в теории слабых взаимодействий и в изучении реакций между элементарными частицами.

Уже сейчас большое количество частиц-резонансов, еще два года назад казавшихся бессистемными, уложилось в стройную схему 3 октетов и одного декаплета (не считая антибарионов, образующих еще один октет и один декаплет), так что "пасьянс" из элементарных частиц имеет сейчас все основания "выйти".

Как бы то ни было, теория унитарной симметрии становится сейчас необходимым аппаратом, который должен быть широко известен. С точки зрения унитарной модели, однако, остается непонятным, почему в природе нет частиц, отвечающих представлению минимальной размерности - трехкомпонентному спинору, который в теории Саката был фундаментальным. Положение здесь такое же, какое было бы в квантовой механике, если бы не существовали частицы со спином  $1/2$ . Попытка введения таких частиц была сделана Гелл-Манном (кварки - quarks) [F1], однако, такие частицы не были обнаружены в опыте [F2].

Теория, включающая ненаблюдаемые "прачастицы", развивалась Швингером [E2]. Пока, однако, еще рано говорить о сколько-нибудь удовлетворительном решении этого фундаментального для теории вопроса.

Настоящая статья представляет собой элементарное введение в теорию унитарной симметрии. В ней изложена тензорная алгебра, связанная с группой  $SU(3)$ .

Изложение ведется так, чтобы подчеркнуть аналогию с обычной тензорной алгеброй, связанной с группой вращения или, что то же самое, унитарной группой на плоскости - группой  $SU(2)$ . Поэтому изложение начинается кратким обзором свойств  $SU(2)$ . В §§ 3, 4 рассказывается о тензорах  $SU(3)$ .

Теория унитарной симметрии элементарных частиц начинается с § 5, где описаны свойства мультиплетов. В этом параграфе описаны два класса мультиплетов: (1) фермионные мультиплеты, описываемые комплексными матрицами - их известно 4 (октет, декуплет и их антимultiплеты) и (2) бозонные мультиплеты, описываемые эрмитовыми матрицами; их известно 2; к ним надо добавить еще и унитарный скаляр -  $\omega$ -мезон.

Формулы для расщепления масс выведены в §§ 6 и 7. Правила интервалов удивительно напоминают формулы элементарного эффекта Зеемана. Аналогия с атомной

спектроскопией настолько очевидна, что возникает желание описать расщепление с помощью введения некоторого квазимагнитного поля, которое эффективно описывает взаимодействие мультиплета с вакуумом<sup>х)</sup>. Такое поле может быть трактовано как поле мезонов [F1, F4] или унитарных спиноров кварков [F2].

Если принять такой способ описания, то вся теория становится совсем простой. Фактически все сказанное о формулах расщепления масс сконцентрировано в выводе формулы (7.16) в конце § 7, которая и содержит в себе практически все результаты. Можно поэтому ограничиться чтением конца обзора (начиная с формулы (7.16)).

Формулы интервалов, которые служат примером применения теории, не являются единственным ее результатом. Кроме правил интервалов существуют еще много других результатов, связанных с магнитными моментами и форм-факторами. Особенно интересна развивающаяся теория слабых взаимодействий. Эти вопросы будут изложены в следующей статье.

Последнее замечание относится к литературе. Так как количество статей, посвященных унитарной симметрии очень велико, то было отобрано сравнительно немного статей, в которых содержится большая часть идей и результатов, опубликованных к 1 июня 1964 г. В этих статьях читатель найдет и дальнейшие литературные указания.

## § 2. Изотопический спин

Как мы уже говорили, зарядовая инвариантность ядерных сил приводит к тому, что состояние систем нуклонов и других фундаментальных частиц удобно классифицировать с помощью изотопического спина. Если пренебречь электромагнитным полем и слабым взаимодействием, то свойства системы определяются только величиной изотопического спина  $T$  и не зависят от его проекции  $T_3$ .

Электромагнитное поле и слабое взаимодействие приводят к "расщеплению" уровней, так что свойства системы зависят и от проекции изотопического спина.

Волновая функция протона и нейтрона описывается двухкомпонентной функцией-спинором<sup>хх)</sup>

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{-1/2} \\ \Psi_{1/2} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

х) Картина напоминает также описание квазичастиц в теории твердого тела и их взаимодействие с фононами решетки.

хх) Каждая из компонент, в свою очередь, зависит еще и от координат и спинов, которые мы здесь не будем вводить явно.

Проекция изотопического спина  $T_3 = +\frac{1}{2}$  соответствует заряженное состояние  $p$  (протон), а проекция  $T_3 = -\frac{1}{2}$  - нейтральное состояние  $n$  (нейтрон):

$$\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Сопряженную функцию мы будем записывать в виде:

$$\bar{\Psi} = (\bar{\Psi}_{-\frac{1}{2}}, \bar{\Psi}_{\frac{1}{2}}) \quad (2.3)$$

или

$$\bar{\Psi} = (\bar{p}, \bar{n}). \quad (2.4)$$

Функцию (2.1) можно подвергнуть линейному преобразованию с помощью матрицы  $U$ :

$$\Psi' = U \Psi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{-\frac{1}{2}} \\ \Psi_{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Если существует изотопическая инвариантность, то компоненты новой функции  $\Psi'$  можно с таким же успехом считать функциями, описывающими два зарядовых состояния, как и компоненты исходной функции  $\Psi$ . Однако для этого новые функции должны быть ортогональны и нормированы. Это требование будет выполнено, если матрица  $U$  унитарна, т.е. если обратная матрица равна эрмитово-сопряженной:

$$U^{-1} = U^\dagger; \quad U U^\dagger = 1. \quad (2.6)$$

Если соотношения (2.6) справедливы, то матрица  $U$  имеет вид:

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

причем

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (2.8)$$

Условие (2.8) одновременно означает, что детерминант матрицы равен 1. В двухмерном пространстве равенство детерминанта единице есть следствие унитарности. В пространстве большего числа измерений унитарность не влечет за собой равенства детерминанта единице.

Если  $\Psi$  преобразуется матрицей  $U$ , то  $\bar{\Psi}$  преобразуется матрицей  $U^\dagger$ , причем умножение на матрицу происходит слева:

$$\bar{\Psi}' = U \bar{\Psi} \quad (2.9)$$

$$\bar{\Psi}' = \bar{\Psi} U^\dagger. \quad (2.10)$$

Если выписывать индексы явно, то для спиноров, преобразующихся по закону (2.9), индекс ставят сверху и спиноры называют контрвариантными:

$$\Psi'^{\alpha} = U^{\alpha}_{\beta} \Psi^{\beta} \quad (2.11)$$

(суммировать по одинаковым значкам!)

Спиноры, преобразующиеся по закону (2.10), отмечают индексами снизу и называют ковариантными:

$$\bar{\Psi}'_{\beta} = (U^+)^{\alpha}_{\beta} \bar{\Psi}_{\alpha} \quad (2.12)$$

Поскольку индексы выписаны явно, то порядок множителей в правой части формулы несущественен.

Из написанных формул следует, что преобразование (2.9), (2.10) не изменяет скалярного произведения

$$(\bar{\Psi}', \Psi') = (\bar{\Psi} U^+, U \Psi) = \bar{\Psi} \Psi \quad (2.13)$$

Формула (2.11) служит определением унитарного преобразования.

Введем антисимметричную матрицу:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

и обратную ей

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Тогда каждому контрвариантному спинору можно сопоставить ковариантный, опустив индекс

$$\Psi_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta} \Psi^{\beta} \quad (2.16)$$

И наоборот, можно, подняв индекс, превратить ковариантный спинор в контрвариантный

$$\Psi^{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta} \Psi_{\beta} \quad (2.17)$$

Отсюда следует, что различие между контрвариантными и ковариантными компонентами чисто формальное и что



$$\Psi_1 = -\Psi^2 \quad (2.18)$$

$$\Psi_2 = \Psi^1 \quad (2.19)$$

Матрица  $\epsilon^{\alpha\beta}$  не меняется при унитарных преобразованиях

$$\epsilon = U \epsilon U^{-1} \quad (2.20)$$

Это равенство легко проверить; оно есть просто следствие равенства единице определителя  $U$ .

Таким образом, если

$$\Psi^\alpha = \begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

то

$$\Psi_\alpha = \begin{pmatrix} -p \\ p \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Заметим, кроме того, что

$$\Psi^\alpha \Psi_\alpha = 0. \quad (2.23)$$

Матрица  $\epsilon^{\alpha\beta}$  играет роль метрического тензора.

Так же как и в обычной тензорной алгебре вводятся тензоры, зависящие от нескольких индексов. Смешанный тензор второго ранга

$$A_b^a = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

преобразуется как произведение двух векторов, одного контрвариантного и одного ковариантного. След этого тензора

$$\text{Sp } A = A_1^1 + A_2^2, \quad (2.25)$$

очевидно, не меняется при преобразованиях и является скаляром.

Тензор

$$A_b^a = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & -A_1^1 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

уже неприводим. Этот тензор эквивалентен вектору в трехмерном пространстве. Связь между компонентами 3-вектора и тензора (2.26) устанавливается с помощью матриц

Паули. Умножая скалярно 3-вектор  $\vec{A}$  на вектор Паули  $\vec{\sigma} (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , получим

$$A_b^a = \begin{pmatrix} A_3 & A_1 - iA_2 \\ A_1 + iA_2 & -A_3 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Мы не будем доказывать, что унитарные преобразования тензора  $A_b^a$  эквивалентны вращению вектора  $\vec{A}$  в трехмерном пространстве.

Дальнейшие сведения о тензорах более высокого ранга нам здесь не нужны. Учтем теперь электромагнитное поле. В этом случае в изотопическом пространстве ось 3 оказывается выделенной, так как проекция на эту ось определяет заряд состояния. В этом случае взаимодействие уже не будет изотопически-инвариантным. Инвариантность сохранится лишь для преобразований диагональными матрицами, которые могут быть записаны в виде:

$$U = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Они описывают вращение в плоскости вокруг оси 3. Происходит переход к однопараметрической подгруппе двумерных вращений  $R(2)$ . Может быть имеет смысл напомнить, что все сказанное о свойствах матриц можно описать на модели частиц со спином, когда сферическая симметрия нарушается магнитным полем, направленным по оси  $Z$ .

Важным случаем спин-тензора является изотопический спин  $T$ . В согласии с (2.27) напомним

$$T = \begin{pmatrix} T_3 & T_- \\ T_+ & -T_3 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Элементами этой матрицы являются компоненты изотопического спина, которые сами по себе являются матрицами. Вид этих матрицы (число строк и столбцов) зависят от представления группы, т.е. от величины спина частицы, на волновую функцию которой действуют эти матрицы.

Для нуклона  $T = \frac{1}{2}$  компоненты  $T$  суть матрицы Паули

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad T_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad T_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

С помощью этих матриц можно, например, записать ток, входящий в слабое взаимодействие (векторный и псевдовекторный).

Так, векторный ток, отвечающий  $\beta$ -распаду нейтрона, представляет собой компоненту изотопического тока!

$$J_{\alpha-} = \langle p | \gamma_{\alpha} (1 + \lambda \gamma_5) T_{-} | n \rangle. \quad (2.31)$$

Здесь записано, что матричный элемент берется между начальным состоянием  $n$  и конечным  $p$  от оператора слабого взаимодействия  $\gamma_{\alpha} (1 + \lambda \gamma_5)$  ( $\lambda = 1,25$ ,  $\gamma_{\alpha}$ ,  $\gamma_5$  — матрицы Дирака), действующего на обычные спиновые индексы и от изотопического оператора  $T_{-}$ , превращающего нейтрон в протон.

Компонента тока  $J_{+}$ , связанная с оператором  $T_{+}$ , описывает позитронный распад, а нейтральная компонента  $J_3$  связана, согласно теории универсального взаимодействия, с электродинамическим током. Таким образом, например, векторный ток можно записать в матричной форме

$$V = \begin{pmatrix} V_3 & V_{-} \\ V_{+} & -V_3 \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

При этом у всех элементов подразумевается невыписанный индекс компоненты в обычном 4-пространстве Минковского. Возвращаясь к формуле (2.29), заметим, что  $\text{Sp } T = 0$ , а определитель этой матрицы

$$-\text{Det } D = \frac{1}{2} (T_{+} T_{-} + T_{-} T_{+}) + T_3^2 = T^2 \quad (2.33)$$

(при вычислении определителя он был симметризован по элементам  $T_{-}$  и  $T_{+}$ , так как эти матрицы не коммутируют). Формула (2.33) показывает, что определитель дает матрицу инварианта преобразования — квадрата изотопического спина. Ясно, что эта формула не зависит от представления, т.е. верна для любой величины спина.

Для полноты опишем кратко еще и расширение группы. Если отказаться от условия унитарности, сохранив только условие унимодулярности  $\text{Det } U = 1$ , то матрицы описывают преобразование Лоренца  $L(4)^x$ . Так как в этом случае  $U^{\dagger} \neq U^{-1}$ , то вместо 2 типов спиноров в тензорной алгебре группы Лоренца существует 4 типа спиноров, преобразующихся матрицами  $U$ ,  $U^{-1}$ ,  $U^{\dagger}$  и  $U^{\dagger-1}$ . Для описания этих типов вводится еще значок с точкой, так что преобразования записываются так:

$$\Psi^{\alpha'} = U^{\alpha}_{\beta} \Psi^{\beta},$$

$$\Psi'_{\alpha} = (U^{-1})^{\beta}_{\alpha} \Psi_{\beta},$$

x) Преобразование 4-мерного пространства, зависящее от 6 параметров.

$$\Psi_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = (U^+)_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \Psi_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}, \quad (2.34)$$

$$\Psi_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = (U^{-1})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \Psi_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}.$$

Однако в тензорной алгебре  $L(4)$  существует операция поднимания и опускания значков, так же как и в алгебре  $SU(2)$ . Поэтому в лоренцовой группе представление характеризуется двумя числами, числом пунктирных и числом непунктирных значков. Тензор в этой алгебре записывается с помощью четырех матриц Паули  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , где  $\sigma_0$  - единичная матрица. Тензор

$$A_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} t-z, & x-iy \\ x+iy, & t+z \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

отвечает 4-вектору и его преобразования эквивалентны преобразованиям Лоренца. Так как суммировать по пунктирному и непунктирному значкам нельзя (т.е. при таком суммировании инвариант не возникает), то след тензора (2.35) нельзя сделать равным нулю во всех системах координат.

Для перехода от группы Лоренца  $L(4)$  к группе трехмерных вращений  $R(3)$  (или что то же - группе  $SU(2)$ ) достаточно перестать различать значки с точкой и без точки. Тогда из тензора выделяется скаляр - его след. Оставляя лишь диагональные матрицы преобразования мы переходим к группе  $R(2)$ . Таким образом редукция группы

$$L(4) \supset R(3) \supset R(2) \quad (2.36)$$

сопровождается соответственным упрощением тензорной алгебры.

В заключение покажем, как сопоставляются компоненты тензора значениям проекции изотопического спина.

Тензор  $\chi$  с  $p$  верхними значками отвечает изотопическому спину  $\frac{p}{2} = T$ , так как тензор имеет  $p+1$  компоненту. Если все индексы равны 1, то условимся приписывать такой компоненте тензоры  $T_3 = -T = \frac{p}{2}$ . Тогда, если у тензора  $p(1)$  индексов равны 1, а  $p(2) = p - p(1)$  индексов равны 2, то для такой компоненты положим

$$T_3 = -T + p(2) = -\frac{p(1) + p(2)}{2} + p(2) = \frac{p(2) - p(1)}{2} \quad (2.37)$$

Аналогично получаем для тензора с  $q(1)$  нижними значками равными 1 и  $q(2)$  - нижними значками равными 2

$$T_3 = -\frac{q(2) - q(1)}{2} \quad (2.38)$$

$\chi$  неприводимый.

Для смешанного тензора с  $p$  - верхними и  $q$  - нижними индексами и со следом равным нулю получаем

$$T_3 = \frac{1}{2}(m_1 - m_2), \quad (2.39)$$

где

$$\begin{aligned} m_2 &= p(2) - q(2) \\ m_1 &= p(1) - q(1). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Можно сказать, что число  $\frac{1}{2}(p+q) = T$  характеризует представление, а число  $m_1 - m_2$  характеризует подгруппу вращений вокруг оси 3. значение проекции  $T_3$  на эту ось.

### § 3. Унитарная группа

Алгебра унитарной группы комплексных матриц третьего порядка строится тем же путем, что и  $SU(2)$ . Будем обозначать матрицы третьего порядка также через  $U$  или  $U_b$  ( $a, b = 1, 2, 3$ ), если надо указать явно компоненты. Матрицы  $U$  выбираются так, что

$$U U^\dagger = 1, \quad \text{Det } U = 1. \quad (3.1)$$

$$(3.2)$$

Спинор в этом пространстве имеет три комплексные компоненты

$$\Psi^\alpha = \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \\ \Psi^3 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Этот контрвариантный спинор - спинор с верхним индексом преобразуется с помощью матрицы  $U$ . Существует еще и ковариантный спинор - спинор с нижними индексами

$$\Phi = (\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3). \quad (3.4)$$

Спинор  $\Phi$  преобразуется с помощью матрицы  $U^\dagger$ . Очевидно, что спинор, эрмитово-сопряженный спинору (3.3), преобразуется как  $\Phi$ .

Скалярное произведение, сохраняющееся при унитарных преобразованиях, определяется так:

$$(\Phi, \Psi) = \Phi_\alpha \Psi^\alpha. \quad (3.5)$$



(3) Аналогичные рассуждения можно повторить для тензоров с двумя нижними значками  $\Psi_{ab}$ , используя для этого тензор  $\epsilon^{ab}$ . В результате и этот тензор мы можем считать симметричным.

Все сказанное можно повторить для любой пары верхних или пары нижних значков. Поэтому общий случай неприводимого тензора характеризуется двумя числами, числом нижних и верхних значков. При этом все следы (суммы по любой паре значков: одного нижнего и одного верхнего) должны обращаться в ноль. Неприводимые тензоры и соответствующие им представления обозначают символом  $D(p, q)$ , где  $p$  - число верхних индексов, а  $q$  - число нижних индексов. Таким образом, мы приходим к следующей классификации тензоров в  $SU(3)$ :

- $D(0,0)$  - скаляр (1 компонента),
- $D(1,0)$  - контрвариантный спинор (3 - компоненты),
- $D(0,1)$  - ковариантный спинор (3 компоненты),
- $D(1,1)$  - смешанный тензор  $\Psi_b^a$  (8 компонент),
- $D(2,0)$  - ковариантный тензор  $\Psi^{ab}$  (6 компонент) и т.д.

Приведем две формулы для подсчета числа компонент. Симметричный тензор с  $k$  -индексами (только верхними или только нижними) имеет число компонент, равное

$$N(k,0) = N(0,k) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \quad (3.12)$$

Тензор с одинаковыми числом нижних и верхних индексов имеет число компонент, равное

$$N(k,k) = (k+1)^3. \quad (3.13)$$

Первая формула есть просто число способов, которыми можно составить  $k$  из трех целых чисел (число единиц, двоек и троек в индексах). Вторая получается из известной формулы для суммы кубов чисел натурального ряда

$$\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2 = \sum_{s=1}^{k+1} s^3.$$

Заметим, что слева стоит квадрат правой части (3.12), т.е. полное число компонент тензора, у которого число верхних и нижних индексов одинаково, а следы отличны от нуля. Поэтому можно интерпретировать последнюю формулу как формулу разложения такого тензора на неприводимые с меньшим числом индексов (доказательство легко провести по индукции).

Для случая тензора с  $p$  верхними и  $q$  нижними значками число компонент равно:

$$N(p,q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2) \quad (3.14)$$

Формула получается сразу, если заметить, что до обращения следа в нуль число компонент определяется по формуле (3.12) и равно  $\frac{1}{4}(p+1)(q+1)(p+2)(q+2)$ . Условие обращения следа в нуль эквивалентно равенству нулю тензора  $D(p-1, q-1)$  с числом компонент  $\frac{1}{4}p(p+1)(q+1)$ . Разность этих двух чисел и дает формулу (3.14).

Теперь мы можем сформулировать правило сложения векторов. В группе вращений это правило сводилось к тому, что из двух тензоров с  $2j_1+1$  и  $2j_2+1$  компонентами возникают тензоры с числом компонент  $2J+1$ , где  $J$  пробегает все целые значения (или полужелые) от  $|j_1 - j_2|$  до  $j_1 + j_2$ . В  $SU(3)$  правило выглядит сложнее, и проще всего действовать прямым путем.

Так из двух спиноров  $\Psi^a$  и  $\Psi_b$  можно составить скаляр  $\Psi$  и тензор  $\Psi_b^a$  с 8 компонентами. Символически мы будем это записывать следующим образом:

$$D(1,0) \times D(0,1) = D(0,0) + D(1,1) \quad (3.15)$$

или просто по числу компонент:

$$3 \times 3 = 1 + 8. \quad (3.16)$$

Рассмотрим произведение двух тензоров  $\Psi_b^a$  и  $\Phi_d^c$ . Для того, чтобы найти неприводимые части возьмем двойную сумму, получив скаляр

$$X = \Psi_b^a \Phi_a^b \quad (\text{одна компонента}). \quad (3.17)$$

Просуммировав только один раз, получим два тензора двумя способами (обратив еще в нуль следы):

$$X_d^a = \Psi_b^a \Phi_d^b, \quad X_b^c = \Psi_b^a \Phi_a^c \quad (\text{по 8 компонент}), \quad (3.18)$$

Если симметризовать по верхним значкам и антисимметризовать по нижним, а затем с помощью тензора  $\epsilon$  поднять значок, то мы придем к тензору 3-го ранга с верхними значками

$$X^{abc} = \epsilon^{ade} \Psi_{[d}^b \Phi_{e]}^c. \quad (3.19)$$

Аналогично построим тензор третьего ранга с тремя значками внизу

$$X_{abc} = \epsilon_{ade} \Psi_{[b}^d \Phi_{c]}^e. \quad (3.20)$$

Остается еще тензор 4-го ранга с двумя значками внизу и со следами, равными нулю. Этот тензор имеет  $(2+1)^3 = 27$  компонент

$$X_{cd}^{ab} = \Psi_{[c}^a \Phi_{d]}^b. \quad (3.21)$$

Формальная запись этого результата такова:

$$D(1,1) \times D(1,1) = D(0,0) + D(1,1) + D(1,1) + D(3,0) + D(0,3) + D(2,2) \quad (3.22)$$



или

$$8 \times 8 = 1 + 8 + 8 + 10 + 10 + 27. \quad (3.23)$$

В обозначениях отмечен тот факт, что оба октета (тензоры второго ранга) эквивалентны, т.е. преобразуются одним и тем же образом, а декаплеты (тензоры третьего ранга) преобразуются сопряженными матрицами.

Приведем еще формулу для произведения двух декаплетов: по формуле (3.14) можем сразу написать ( $k=2$ ):

$$10 \times 10 = 1 + 8 + 27 + 64 \quad (3.24)$$

или

$$D(3,0) \times D(0,3) = D(0,0) + D(1,1) + D(2,2) + D(3,3). \quad (3.25)$$

Приведем без вывода еще несколько формул

$$3 \times \bar{3} = 1 + 8,$$

$$D(1,0) \times D(0,1) = D(0,0) + D(1,1),$$

$$3 \times 3 = \bar{3} + 6,$$

$$D(1,0) \times D(1,0) = D(0,1) + D(2,0),$$

$$\bar{3} \times \bar{3} = 3 + \bar{6},$$

$$D(0,1) \times D(0,1) = D(1,0) + D(0,2),$$

$$6 \times 3 = 8 + 10,$$

$$D(2,0) \times D(0,1) = D(1,1) + D(3,0),$$

$$\bar{6} \times 3 = \bar{3} + \bar{15},$$

$$D(0,2) \times D(1,0) = D(0,1) + D(1,2)$$

$$6 \times 3 = 3 + 15,$$

$$D(2,0) \times D(0,1) = D(1,0) + D(2,1),$$

$$\bar{6} \times \bar{6} = 1 + 8 + 27$$

$$D(0,2) \times D(2,0) = D(0,0) + D(1,1) + D(2,2)$$

$$\bar{6} \times \bar{6} = \bar{6} + \bar{15} + \bar{15}$$

$$D(2,0) \times D(2,0) = D(0,2) + D(2,1) + D(4,0)$$

$$\bar{6} \times \bar{6} = \bar{6} + 15 + \bar{15}$$

$$D(0,2) \times D(0,2) = D(2,0) + D(1,2) + D(0,4)$$

#### § 4. Унитарный спин

Подобно тому, как в  $SU(2)$  представление характеризовалось величиной изотопического спина, так и в алгебре  $SU(3)$  можно ввести аналогичную характеристику - унитарный спин, который мы будем обозначать через  $U$ . Компоненты изотопического спина, которые записывались в виде матрицы  $2 \times 2$

$$T = \begin{pmatrix} T_3 & T_- \\ T_+ & -T_3 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

представляют собой генераторы группы вращений. Это значит, что матрица поворота на угол  $\delta\phi$ , вокруг оси 3 имеет вид:

$$M = 1 + i\delta\phi T_3. \quad (4.2)$$

Для поворота вокруг осей 1 и 2 справедлива аналогичная формула, в которую будут входить соответственно матрицы

$$T_1 = \frac{1}{2}(T_+ + T_-), \quad T_2 = \frac{1}{2i}(T_+ - T_-). \quad (4.3)$$

Унитарный спин вводится матрицей  $3 \times 3$ :

$$U = \begin{pmatrix} Q & T_- & L_- \\ T_+ & Y-Q & K_- \\ L_+ & K_+ & -Y \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Четыре элемента, стоящие в левом верхнем углу, образуют матрицу типа матрицы (4.1), в которой, однако, след не равен нулю (т.е. эта матрица приводима в  $SU(2)$ ). Эту матрицу можно записать в виде суммы матриц, одна из которых имеет след равный нулю:

$$\begin{matrix} Q & T_- \\ T_+ & Y-Q \end{matrix} = \begin{pmatrix} Q - \frac{1}{2}Y & T_- \\ T_+ & \frac{1}{2}Y - Q \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Сравнивая с (4.1), мы видим, что

$$Q - \frac{1}{2}Y = T_3 \quad (4.6)$$

или

$$Q = T_3 + \frac{1}{2}Y. \quad (4.7)$$

Если под собственным значением  $Q$  понимать заряд, то  $Y$  есть матрица, отвечающая гиперзаряду  $S+B$  ( $S$  - странность,  $B$  - барионное число). Остальные элементы (элементы стоящие в 3 столбце), представляют собой матрицы, имеющие ту же форму, что и матрицы изотопического спина  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ , только определяемые в подпространствах  $(2; 3)$  и  $(1; 3)$ . Так как группа  $SU(3)$  состоит из преобразований, сохра-

няющих квадратичную форму  $|x|^2 + |y|^2 + |z|^2$ , то в каждом из двумерных подпространств существует подгруппа, содержащая сумму двух квадратов модулей, т.е. подгруппа, эквивалентная  $SU(2)$ . Из структуры матрицы (4.4) видно, что можно разным образом выбирать системы коммутирующих матриц. Выбирая в качестве подгруппы матрицы (4.5), мы получим систему матриц  $Y$ ,  $T^2$  и  $T_3$ . Если в качестве подгрупп выбрать матрицу  $2 \times 2$ , стоящую в нижнем правом углу (4.4), то получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} Y - Q & K_- \\ K_+ & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y - \frac{1}{2} Q & K_- \\ K_+ & -Y + \frac{1}{2} Q \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

В этом случае коммутирующими матрицами будут матрицы  $Q$ ,  $K^2$  и  $K_3$ , где

$$K_3 = Y - \frac{1}{2} Q. \quad (4.9)$$

При таком выборе коммутирующих операторов одним из квантовых чисел будет определяться заряд частицы. Такое представление удобно при рассмотрении электромагнитного взаимодействия.

Вернемся к выбору системы коммутирующих матриц  $Y$ ,  $T^2$ ,  $T_3$ .

Рассмотрим произвольный тензор с  $p$  верхними и  $q$  нижними индексами  $D(p, q)$ . Каждый из  $p+q$  индексов может принимать значение 1, 2, 3. Введем следующие обозначения

$$\begin{array}{ll} p(1) & \text{число верхних индексов равных 1,} \\ p(2) & \text{" " " " " 2,} \\ p(3) & \text{" " " " " 3,} \\ q(1) & \text{число нижних индексов, равных 1,} \\ q(2) & \text{" " " " " 2,} \\ q(3) & \text{" " " " " 3.} \end{array} \quad (4.10)$$

Связь собственных значений  $Y$ ,  $T^2$  и  $T_3$  с компонентами тензора  $D(p, q)$  устанавливается, если мы зададим  $Y$  для компонент какого-нибудь одного тензора. Именно в этом пункте и происходит выбор представления для описания реальных частиц. В модели Гелл-Манна и Неймана в основу принимается октет  $D(1, 1)$ . Припишем значения  $Y$  следующим образом.

Компонента

$$\begin{array}{ll} \Psi_b^a (a, b = 1, 2) & Y = 0, \\ \Psi_b^3 (b = 1, 2) & Y = 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Psi_3^a \quad (a=1,2) & \quad Y = -1, \\ \Psi_3^3 & \quad Y = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Напомним, что компоненты  $\Psi_b^a$  являются смесью изотопического вектора и изотопического скаляра (здесь  $\text{Sp } \Psi = \Psi_1^1 + \Psi_2^2$ )

$$\begin{aligned} \Psi_b^a - \frac{1}{2} \delta_b^a \text{Sp } \Psi \quad (a, b=1,2) & \quad T - \text{вектор,} \\ \text{Sp } \Psi & \quad T - \text{скаляр} \\ \Psi_3^a, \Psi_b^3 & \quad T - \text{спиноры,} \\ \Psi_3^3 & \quad T - \text{скаляр.} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Будем составлять из октетов тензоры высших порядков. При перемножении октетов мы будем получать, вообще говоря, несимметричные тензоры, у которых число верхних и нижних индексов одинаково, а следы не равны нулю. Обозначим такой тензор через  $D^{\prime}(k, k)$ , отмечая штрихом тот факт, что тензор приводим. Гиперзаряд, отвечающий компоненте тензора, определяется числом индексов равных 3, т.е. числами  $p(3)$  и  $q(3)$ . Так как, согласно (4.11), каждый верхний индекс вносит вклад в  $Y$ , равный 1, а каждый нижний индекс вносит вклад, равный  $-1$ , то для компонент тензора  $D^{\prime}(k, k)$  гиперзаряд равен  $p(3) - q(3)$ . Отсюда видно, что у компонент этого тензора  $Y$  изменяется в пределах  $-k \leq Y \leq k$ .

Теперь выделим из тензора неприводимые составляющие. Для этого симметризуем тензор по  $p$  верхним и отдельно по  $q$  нижним значкам и обратим в нуль следы. Получим неприводимый тензор  $D(k, k)$ , для которого  $Y$  меняется в тех же пределах  $-k \leq Y \leq k$ .

Если  $p \geq 2$ , то с помощью тензора  $\epsilon_{abc}$  можно опустить два индекса, превратив два верхних индекса в один нижний. Точно так же если  $q \geq 2$ , то с помощью тензора  $\epsilon^{abc}$  можно поднять два нижних индекса, превратив их в один верхний. Поэтому можно превратить тензор  $D^{\prime}(k, k)$  в тензор  $D^{\prime}(k-2, k+1)$  или в тензор  $D^{\prime}(k+1, k-2)$ . После этого надо симметризовать полученные тензоры, обратить в ноль следы и получать тензоры  $D(k-2, k+1)$  или  $D(k+1, k-2)$ , соответственно.

Тензоры  $\epsilon$  антисимметричны, поэтому если у компоненты тензора  $D^{\prime}(p, q)$  все  $p$  индексов равны 3, то умножение его на  $\epsilon_{abc}$  дает ноль. Точно так же, если у компоненты тензора  $D^{\prime}(p, q)$  все нижние индексы равны 3, то его умножение

на  $\epsilon^{abc}$  дает ноль. Отсюда можно заключить, что тензор  $D(k-2, k+1)$  имеет на одно значение  $Y$  меньше, чем исходный тензор  $D(k, k)$ : он не имеет компонент с  $Y=k$ . Таким образом тензор  $D(k-2, k+1)$  имеет компоненты с  $Y$  в пределах  $-k \leq Y \leq k-1$ . Таким же путем можно прийти к заключению, что тензор  $D(k+1, k-2)$  имеет компоненты с  $Y$  в пределах  $-k+1 < Y < k$ . Если мы опустим 2s верхних индекса, превратив их в s нижних, то рассуждая так же найдем, что у нового тензора  $D(k-2s, k+s)$  гиперзаряд изменяется в пределах  $-k \leq Y \leq k-s$ . Аналогично для тензора  $D(k+s, k-2s)$ ,  $-k+s \leq Y \leq k$ .

Отсюда для произвольного тензора  $D(p, q)$  находим, полагая  $s = -\frac{p-q}{3}$  и  $k = \frac{p+2q}{3}$ , что гиперзаряд изменяется в пределах

$$-\frac{p+2q}{3} \leq Y \leq \frac{2p+q}{3}. \quad (4.13)$$

Гиперзаряд компоненты тензора  $D(p, q)$  определяется числом индексов равных 3. Положим  $Y = p(3) - q(3) + a$ , где  $a$  - постоянная. Эту постоянную найдем, заметив, что при  $p(3) = p$  и  $q(3) = 0$ ,  $Y$  равен своему максимальному значению  $\frac{1}{2}(2p+q)$ . Отсюда  $a = -1/3(p-q)$ :

$$Y = p(3) - q(3) - \frac{p-q}{3}. \quad (4.14)$$

Эту формулу можно сопоставить с формулой для изотопического спина (2.32), которую можно написать в виде<sup>x)</sup>:

$$-T_3 = p(1) - q(1) - \frac{p(1,2) - q(1,2)}{2}$$

или

$$T_3 = p(2) - q(2) - \frac{p(1,2) - q(1,2)}{2}, \quad (4.15)$$

где под  $p(1,2)$  и  $q(1,2)$  понимается число индексов равных 1 или 2.

Из формулы (4.13) можно получить выражение для "ширины" унитарного мультиплетта:

$$Y_{\max} - Y_{\min} = p + q. \quad (4.16)$$

По аналогии с изотопическим спином половину полного числа индексов можно назвать величиной унитарного спина  $U$

<sup>x)</sup> Для заряда можно написать:  $Q = -p(1) + q(1) + \frac{p-q}{3}$

формулу, получающуюся из (4.14) заменой  $1 \rightarrow 3$  и изменением знака. Сравнивая ее с (4.15) и (4.16), получим старую формулу  $T_3 = Q - \frac{1}{2}Y$ .

$$U = \frac{p+q}{2}, \quad (4.17)$$

так что число разных значений  $Y$  равно  $2U + 1$ . Для "центра тяжести" мультиплета, получаем

$$Y_{\max} + Y_{\min} = \frac{p-q}{3}. \quad (4.18)$$

Эти формулы дают для  $Y$  целые значения только для таких тензоров, для которых разность  $|p-q| = 3n$ , где  $n$  - целое положительное число. В принятой нами схеме построения тензоров, из тензора  $D(k, k)$  возникают тензоры  $D(k+s, k-2s)$  и  $D(k-2s, k+s)$ , которые удовлетворяют этому условию. Тензоры с  $|p-q| \neq 3n$  не могут быть получены таким путем. Это напоминает положение в группе вращений, где с помощью векторов можно построить тензоры лишь с целыми значениями изотопического спина; спиноры с полуцелым изотопическим спином должны быть введены независимо. В группе  $SU(3)$  возникают спиноры с нецелыми значениями гиперзаряда кратными  $1/3$ . Сохраняя правила для тензоров с  $|p-q| = 3n$ , мы получим, например, что для спинора с одним верхним значком  $D(1,0)$ , для которого  $\frac{1}{3}(p-q) = \frac{1}{3}$  сопоставление  $Y$  с компонентами выглядит так:

$$\begin{aligned} \Psi^1 \quad p(3) = 0 & \quad Y = -\frac{1}{3} \\ \Psi^2 \quad p(3) = 0 & \quad Y = -\frac{1}{3} \\ \Psi^3 \quad p(3) = 1 & \quad Y = \frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Аналогично тензор  $\Psi_3$  имеет компоненты с  $Y = \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ . Таким образом в  $SU(3)$  появляются дробные значения гиперзаряда. Попытки обнаружить частицы, отвечающие таким представлениям (кварки, по терминологии Гелл-Манна), потерпели пока неудачу.

Теперь мы можем продолжить классификацию компонент тензора и перейти к значениям изотопического спина и его проекций. Если в тензоре  $D(p, q)$  мы положим некоторое число индексов равными 3, то остальные индексы, принимая значения 1, 2, образуют тензор в изотопическом пространстве с  $p(1) + p(2) = p(1,2)$  - верхними индексами и  $q(1) + q(2) = q(1,2)$  - нижними индексами. Разложение такого тензора  $SU(2)$  на неприводимые тензоры происходит по обычной схеме суммирования по одному нижнему и одному верхнему индексу по значениям 1, 2. Так как тензор с  $p(1,2)$  индексами, принимающими значения 1, 2, имеет  $p(1,2) + 1$  компоненту, то изотопический спин такого тензора равен

$$T_p = \frac{1}{2} p(1,2). \quad (4.20)$$

Аналогично для тензора с  $q(1,2)$  нижними индексами

$$T_q = \frac{1}{2} q(1,2). \quad (4.21)$$

Тензор с  $p(1,2)$  верхними и  $q(1,2)$  нижними индексами разлагается на неприводимые тензоры, спины которых равны

$$T_p + T_q, \quad T_p + T_q - 1, \dots, T_p - T_q. \quad (4.22)$$

Наконец, величину 3- компоненты изотопического спина определяем по формуле (2.32)

$$T_3 = m_2 - m_1 = \frac{1}{2} [ p(2) - q(2) - p(1) + q(1) ]. \quad (4.23)$$

или по эквивалентным ей формулам (4.15).

Таким образом, мы приходим к следующей классификации компонент унитарных тензоров. Компоненты неприводимого унитарного тензора характеризуются 5 квантовыми числами:

- (1) числом верхних значков  $p$ ,
- (2) числом нижних значков,  $q$ ,
- (3) изотопическим спином  $T$ ,
- (4) гиперзарядом  $Y$ ; формула (4.14),
- (5) проекцией изотопического спина  $T_3$ ; формула (4.23).

Вместо  $p$  и  $q$  можно использовать:

- (1<sup>1</sup>) унитарный спин  $U = \frac{1}{2}(p+q)$ ; формула (4.17);
- (2<sup>2</sup>) "центр тяжести" мультиплетета  $C = \frac{1}{3}(p-q)$ , формула (4.18).

Вместо  $C$ ,  $Y$  и  $T_3$  можно вводить квантовые числа

$$m_s = [ p(s) - q(s) ], \quad s = 1, 2, 3. \quad (4.24)$$

Тогда

$$C = \frac{1}{3} (m_1 + m_2 + m_3),$$

$$T_3 = (m_2 - m_1) / 2 \quad (4.25)$$

$$Y = \frac{1}{3} (2m_3 - m_1 - m_2).$$

Числа  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  вместе с  $U$  и  $T$  представляют собой другой набор 5 квантовых чисел, описывающих унитарный мультиплет.

Отметим еще полезную формулу для тензоров, у которых есть значки только одного сорта: тензоров типа  $D(p,0)$  и  $D(0,q)$ . Гиперзаряд компоненты тензора

$D(p, 0)$  равен, согласно (4.14),  $Y = p(3) - \frac{p}{3}$ . Изотопический спин компонент с заданным  $Y$ , равен, очевидно,  $\frac{1}{2}[p - p(3)]$ , так как  $p - p(3)$  есть число индексов, равных 1 или 2. Отсюда мы видим, что для тензоров типа  $D(p, 0)$  существует соотношение

$$D(p, 0): Y + 2T = \frac{2}{3} p \quad (4.26)$$

и аналогично для тензоров  $D(0, q)$ :

$$D(0, q): -Y + 2T = \frac{2}{3} q. \quad (4.27)$$

Таким образом, у таких тензоров  $T$  определяется заданием  $Y$ .

Рассмотрим несколько мультиплетов.

Таблица 1

Мультиплеты SU(3)

1. Октет  $D(1,1), U=1$

Компоненты  $\Psi_b^a$  распадаются на три типа

	Y	T
$\Psi_b^a (a, b = 1, 2)$	0	1 и 0
$\Psi_b^3 (b = 1, 2)$	1	1/2
$\Psi_3^a (a = 1, 2)$	-1	1/2

$\Psi_3^3 = -\Psi_1^1 - \Psi_2^2$  и не включен поэтому в таблицу.

II. Декаплет ковариантный  $D(0,3), U = \frac{3}{2}$ .

	Y	T
$\Psi_{abc} (a, b, c = 1, 2, )$	1	3/2
$\Psi_{ab3} (a, b = 1, 2, )$	0	1
$\Psi_{a33} (a = 1, 2, )$	-1	1/2
$\Psi_{333}$	-2	0



III . Декаплет контрвариантный  $D(3,0)$ ,  $U = \frac{3}{2}$

	Y	T
$\Psi^{abc}$ ( a, b, c = 1, 2, )	-1	3/2
$\Psi^{ab3}$ ( a, b = 1, 2, )	0	1
$\Psi^{a33}$ ( a = 1, 2, )	1	1/2
$\Psi^{333}$	2	0

IV . 27-плет  $D(2,2)$ ,  $U = 2$

	Y	T
$\Psi_{od}^{33}$ ( c, d = 1, 2, )	2	1
$\Psi_{od}^{3b}$ ( b, c, d = 1, 2, )	1	3/2 и 1/2
$\Psi_{od}^{ab}$ ( a, b, c, d = 1, 2, )	0	2, 1 и 0
$\Psi_{sd}^{ab}$ ( a, b, d = 1, 2, )	-1	3/2 и 1/2
$\Psi_{ss}^{ab}$ ( a, b = 1, 2, )	-2	1

В изотопической группе вектор может быть записан, как уже говорилось выше, двумя способами: либо как компонентный вектор в 3-мерном вещественном пространстве, либо как тензор второго ранга в комплексной плоскости. В унитарной группе октет также можно записать в виде 8-компонентного вектора  $(C2,3)$ . Такое представление можно ввести в частности для 8-вектора унитарного спина  $F_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ). Связь  $F_i$  с компонентами  $U$  дается таблицей

$$\begin{pmatrix} F_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} F_8 & F_1 - i F_2 & F_4 - i F_5 \\ F_1 + i F_2 & -F_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} F_8 & F_6 - i F_7 \\ F_4 + i F_5 & F_6 + i F_7 & -\frac{2}{\sqrt{3}} F_8 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Связь  $F$  и  $U$  можно записать короче

$$F_a = Sp \lambda_a U \quad (4.29)$$

$$U = \sum_a F_a \lambda_a, \quad (4.30)$$

где  $\lambda_a$  — восемь эрмитовых матриц, со следом равным нулю, играющих роль аналогичную роли матриц Паули в алгебре  $SU(2)$ .

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

### § 5. Мезоны и барионы

Сопоставим теперь унитарным тензорам реальные частицы. Октет барионов состоит из нуклона и гиперонов  $\Lambda, \Sigma$  и  $\Xi$ . В согласии с правилами предыдущего параграфа, его можно записать в виде матрицы (верхний индекс — строка, нижний — столбец):

$$\Psi_b^a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda & \Sigma^- & \Xi^- \\ \Sigma^+ & -\frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda & \Xi^0 \\ -p & p & -\sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Знак минус у  $p$  появляется как у ковариантной компоненты, согласно формуле (2.22).

Коэффициенты в матрице выбраны так, чтобы в выражении

$$\text{Sp } \bar{\Psi} \Psi = \bar{p} p + \bar{n} n + \bar{\Sigma}^+ \Sigma^+ + \bar{\Sigma}^0 \Sigma^0 + \bar{\Sigma}^- \Sigma^- + \bar{\Xi}^0 \Xi^0 + \bar{\Xi}^- \Xi^-$$

все коэффициенты были бы равны 1 и чтобы  $\text{Sp } \Psi = 0$ . Матрица барионного октета неэрмитова. Это соответствует тому, что барионный заряд частиц  $B$  не равен нулю. Операция эрмитового сопряжения отвечает изменению знака заряда ( $R$  — сопряжение).

Мезоны (и резонансы) образуют два известных октета. Октет псевдоскалярных

мезонов состоит из  $\pi$ ,  $\eta$  и  $K$ -мезонов. Матрица этих мезонов оставляется аналогично (5.1) и имеет вид:

$$(P_b^a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta_0 & \pi^- & K^- \\ \pi^+ & \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta_0 & K^0 \\ K^+ & K^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \eta_0 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Октет векторных мезонов  $\rho, K^*$  (резонанс  $K\pi$ ) и  $\phi$  образует матрицу

$$(V_b^a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \rho^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \phi & \rho^- & K^{*-} \\ \rho^+ & -\frac{1}{\sqrt{2}} \rho^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \phi & K^{*0} \\ K^{*+} & K^{*0} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \phi \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Мезонные октеты отличаются от барионного октета тем, что частицы в них входят одновременно со своими античастицами. Они описываются эрмитовыми матрицами

$$P^+ = P, \quad V^+ = V. \quad (5.4)$$

Операции эрмитового сопряжения можно сопоставить физическую операцию сопряжения зарядового. Элементы матриц (5.2) и (5.3) не обладают определенной зарядовой четностью (кроме диагональных). Однако если их записать в форме (4.28) (т.е. написать, например,  $P_2^1 = P_1 - iP_2$  и т.д.), то элементы  $P_a$  и  $V_a$  соответственно ( $a=1, \dots, 8$ ) будут иметь уже определенную зарядовую четность, но разную у разных компонент. Введем дискретную операцию  $R$  - транспортирование матрицы. Очевидно, это  $R^2 = 1$ . Эта операция может либо совпадать с зарядовым сопряжением  $C$ , либо отличаться от зарядового сопряжения знаком.

Операция

$$C = RC, \quad C^2 = 1 \quad (5.5)$$

при действии на эрмитовскую матрицу умножает ее на  $\pm 1$ . Таким образом эрмитовские матрицы можно характеризовать еще одним квантовым числом - собственным значением операции  $C$ .

Если  $C = 1$ , то  $R = C$ ; это значит, что диагональные элементы (элементы 3,8)

и элементы 1, 4, 6 по схеме (4.28) зарядово четны, а элементы 2, 5, 7 - зарядово нечетны.

Если  $b = -1$ , то зарядово четными являются элементы 2, 5, 7, а зарядово нечетными - элементы 1, 3, 4, 6, 8.

Таким образом собственное значение  $C$  определяется зарядовой четностью диагональных элементов.

Так как  $\pi^0$ -мезон зарядово четен, то псевдоскалярный октет имеет  $b = +1$ . Октет псевдовекторных мезонов имеет  $C = -1$ .

После задания собственного значения  $C$  элементы матриц определяются полностью. Так для псевдоскалярного мезона элемент  $P_3^2 = P_6 + iP_7$ , где  $P_6$  зарядово четен, а  $P_7$  зарядово нечетен. Поэтому  $P_7$  надо сопоставить  $K_1^0$ , а  $P_6$  надо сопоставить  $K_2^0$ . Это значит, что  $P_3^2 = iK_1^0$ .

В этом обзоре величины фазовых множителей нам не понадобятся, и мы не будем здесь их вводить.

Кроме октета (5.1) известен еще барионный декаплет, возглавляемый знаменитым  $\Omega^-$ -гипероном. Этот декаплет описывается тензором с 3 нижними знаками  $\Psi_{abc}$ , имеющими 10 разных компонент, которые собраны в таблицу II. После номера компоненты (нижние индексы!) мы отмечаем в скобках число одинаковых компонент тензора  $\Psi_{abc}$ , полученных перестановкой индексов. Это число определяет нормировку в последнем столбце.

Т а б л и ц а II

Компоненты барионного декаплета

Компонента	Y	T	T <sub>3</sub>	резонанс
333 (1)	-2	0	0	$\Omega^-$
331 (3)	-1	1/2	-1/2	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Xi^{*-}$
332 (3)			1/2	$1/\sqrt{3} \Xi^{*0}$
311 (3)	0	1	-1	$1/\sqrt{3} \Sigma^{*-}$
312 (6)			0	$1/\sqrt{6} \Sigma^{*0}$
322 (3)			1	$1/\sqrt{3} \Sigma^{*+}$
111 (1)	1	3/2	-3/2	$\Delta^-$
112 (3)			-1/2	$1/\sqrt{3} \Delta^0$
122 (3)			1/2	$1/\sqrt{3} \Delta^+$
222 (1)			3/2	$\Delta^{++}$

Нормировки выбраны так, чтобы в квадратичном выражении  $\text{Sp } \bar{\Psi} \Psi$  все частицы входили с одинаковым коэффициентом, равным единице.

### § 6. Массы (расщепление мультиплетов)

Мультиплеты частиц полностью вырождены: все их компоненты имели бы строго одинаковые массы, если бы они ни с кем не взаимодействовали. Наличие сильного взаимодействия с виртуальными частицами (будем говорить для краткости с вакуумом) приводит к расщеплению мультиплетов. Это расщепление можно описать способом, весьма близким к тому, которым в квантовой механике описывают зеемановское расщепление атомных уровней.

Будем считать, что взаимодействие мультиплета с вакуумом описывается некоторым эффективным постоянным полем, которое по своим свойствам есть эрмитов тензор  $D(1,1)$ . Обозначим его через  $H = H_b^a$ ,  $\text{Sp } H = 0$ . Для более точного описания расщепления следует ввести "поля" и более высокого ранга  $H_{od}^{ab}$ ,  $H_{def}^{abc}$  и т.д.; Однако сравнение с опытом показывает, что соответствующие члены взаимодействия оказываются малыми. В свободный (невозмущенный) лагранжиан системы входит масса частицы в комбинации

$$\begin{aligned} m \text{Sp } \bar{\Psi} \Psi & \quad \text{для барионов,} \\ m^2 \text{Sp } \bar{\Psi} \Psi & \quad \text{для мезонов.} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Возмущение (взаимодействие с "полем") будет добавлять слагаемое к массе для барионов и к квадрату массы — для мезонов<sup>х)</sup>. Чтобы вычислить эту добавку найдем аналог мультиполей системы. Из функции  $\Psi$  и ее сопряженной  $\bar{\Psi}$  можно составить<sup>xx)</sup>

$$\left. \begin{aligned} 0 - \text{поль} & \quad \text{Sp } \bar{\Psi} \Psi, \\ 8 - \text{полю} & \quad \bar{\Psi}_o^a \Psi_b^c \pm \Psi_o^a \bar{\Psi}_b^c. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Остальные компоненты образуют 27 - поль.

Среднее значение 0 - поля определяет невозмущенную массу, 8 - поль приведет к возмущению, пропорциональному  $H_b^a$ , 27 - поль к возмущению, пропорциональному  $H_{od}^{ab}$ .

Если  $\Psi$  эрмитово, то оба 8-поля равны, так как для эрмитовых матриц  $\bar{\Psi} \Psi = \Psi \bar{\Psi}$ ; поэтому из компонент барионного октета можно составить два 8-поля, а из компонент мезонного октета — только один 8-поль.

х) Так как расщепление у барионов сравнительно мало, то можно считать, что и для них получаются соотношения для квадратов масс.

xx) Для краткости мультиполь с  $k$  компонентами мы называем  $k$ -полем.

Аналогично из компонент декаплета можно составить

$$\left. \begin{array}{l}
 0 - \text{полю} \quad (\bar{\Psi}, \Psi) \\
 8 - \text{полю} \quad \left( \begin{array}{l} \bar{\Psi}_{abc} \\ \bar{\Psi}_{abf} \end{array}, \begin{array}{l} \Psi \\ \Psi_{abf} \end{array} \right) \\
 27 - \text{полю} \quad \left( \begin{array}{l} \bar{\Psi}_{abc} \\ \bar{\Psi}_{abf} \end{array}, \begin{array}{l} \Psi \\ \Psi_{abf} \end{array} \right) \\
 64 - \text{полю} \quad \left( \begin{array}{l} \bar{\Psi}_{abc} \\ \bar{\Psi}_{def} \end{array}, \begin{array}{l} \Psi \\ \Psi_{def} \end{array} \right)
 \end{array} \right\} \quad (6.3)$$

(все следы обращены в нуль).

При выводе формул мы, согласно сказанному выше, будем учитывать только взаимодействие с 8-полем.

Начнем с барионного октета. Взаимодействие с полем  $N$  описывается двумя членами вида

$$\text{Sp } N \bar{\Psi} \Psi \quad \text{и} \quad \text{Sp } N \Psi \bar{\Psi}. \quad (6.4)$$

Выберем теперь вид  $N$ . Естественно в первом приближении пренебречь разностью масс внутри изотопического мультиплета, считая, что  $T$  продолжает оставаться хорошим числом. В конце мы рассмотрим также и расщепление изотопического мультиплета.

Выберем  $N$  так, чтобы отличной от нуля была бы компонента  $N_8^8$ . Тогда взаимодействие с полем (6.4) переписывается в виде:

$$\Delta M = a \bar{\Psi}_b^3 \Psi_3^b + b \bar{\Psi}_3^a \Psi_a^3. \quad (6.5)$$

Постоянные  $a$  и  $b$  определяют силу взаимодействия поля с обоими 8-полями.

Если теперь обратиться к (5.1), то увидим, что для масс барионов получаются следующие значения (где  $m_0$  масса невозмущенного октета):

$$\left. \begin{array}{l}
 m(\Xi) = m_0 + a \\
 m(N) = m_0 + b \\
 m(\Sigma) = m_0 \\
 m(\Lambda) = m_0 + \frac{2}{3}(a+b)
 \end{array} \right\} \quad (6.6)$$

Отсюда следует формула Гелл-Манна-Окубо:

$$\frac{1}{2} [m(\Xi) + m(N)] = \frac{1}{3} [m(\Sigma) + 3m(\Lambda)]. \quad (6.7)$$

Если принять массу  $\Sigma$  за начало отсчета<sup>х)</sup>, то из известных масс барионов можно составить следующую таблицу (для  $\Xi$  и  $N$  берем полусумму масс обеих компонент)

Т а б л и ц а П И  
Интервалы в барионном октете

	Масса $-m(\Sigma)$	в Мэв
$\Xi$	122	
$N$	-254	
$\Sigma^0$	0	
$\Lambda$	-78	
$\frac{\Xi + N}{2}$	-66	
$\frac{1}{2} \Lambda$	-59	

Разногласие по порядку величины сравнимо с разностью масс внутри изотопического мультиплета. Формулам (6.6) можно придать другой вид. Из формулы (4.5) можно получить, что после понижения симметрии до  $SU(2)$ , инвариантами группы остаются след матрицы  $2 \times 2$  и ее определитель.

Определитель равен

$$QY - Q^2 + \frac{1}{2}(T_+ T_- + T_- T_+). \quad (6.8)$$

Но из формулы (4.6) следует, что

$$Q^2 - QY = T_3^2 - \frac{1}{2} Y^2.$$

Откуда получаем, что квантовыми числами, характеризующими расщепленный мультиплет будут

$$Y \text{ и } T(T+1) - \frac{1}{2} Y^2. \quad (6.9)$$

Отсюда масса бариона с точностью до членов первого порядка равна

$$M = M_0 + M_1 Y + M_2 [T(T+1) - \frac{1}{2} Y^2], \quad (6.10)$$

где  $M_0$ ,  $M_1$  и  $M_2$  новые постоянные. В таком виде формулу можно применить к любому барионному мультиплету. Связь между  $a$ ,  $b$  и  $M_0$ ,  $M_1$  и  $M_2$  устанавливается легко.

х) Если обозначать символом бариона разность массы бариона и массы  $\Sigma^0$ , то формула (6.7) примет вид:  $\Xi^0 + N = \frac{3}{2} \Lambda$ .

Возникает естественный вопрос о законности использования формул теории возмущений первого порядка. Прежде всего отметим, что мерой малости возмущения здесь не может служить отношение расщепления масс к массе невозмущенного мультиплета.

Можно представить себе, что в барионном мультиплете нет вовсе примеси более высокой мультипольности, подобно тому, как у дейтрона нет электрических моментов выше квадрупольного. Это означает, что не существует другого барионного мультиплета с близкой массой, который бы мог внести возмущение более низкой симметрии. Во всяком случае резкое выделение взаимодействия низшей мультипольности является важным фактором, обуславливающим успех всей схемы нарушения унитарной симметрии.

Если все же учесть в массовой формуле поле  $H_{od}^{ab}$  (компонента  $H_{33}^{33}$ ), то к (6.5) добавится слагаемое<sup>x)</sup>

$$c \bar{\Psi}_3^3 \Psi_3^3,$$

которое сдвинет массу  $\Lambda$  в формулах (6.6) на величину  $c$ . Ясно, что эта постоянная будет определять отклонение от формулы (6.7), так что

$$c = \frac{1}{3} [2m(\Xi) + 2m(N) - m(\Sigma) - 3m(\Lambda)]. \quad (6.11)$$

Отсюда следует, что  $c \approx 9$  Мэв, что и определяет величину связи 27-поля с  $H_{33}^{33}$ .

Перейдем теперь к декаплету. В этом случае поправка к массе определится следующим образом:

$$(\Delta M)_3 = d \bar{\Psi}^{ab3} \Psi_{ab3}. \quad (6.12)$$

С помощью таблицы II получим следующие значения масс

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= m_1 + d \\ m(\Xi^*) &= m_1 + \frac{2}{3} d \\ m(\Sigma^*) &= m_1 + \frac{1}{3} d \\ m(\Delta) &= m_1 \end{aligned} \quad (6.13)$$

x) 27-поль имеет компоненты:

$$\Psi_{od}^{ab} = \bar{\Psi}_o^a \Psi_d^b - \frac{1}{3} \bar{\Psi}_o^c \Psi_c^b \delta_d^a - \frac{1}{3} \bar{\Psi}_c^a \Psi_d^c \delta_o^b + \frac{1}{9} \bar{\Psi}_\kappa^\epsilon \Psi_\epsilon^\kappa \delta_d^a \delta_o^b$$

Справа предполагается, что произведена симметризация всех членов по  $a$  и  $b$ , а также по  $c$  и  $d$ . Умножение 27-поля на  $H_{33}^{33}$ , поэтому приведет еще к смещению остальных масс. Однако это смещение приведет только к переобозначению постоянных, так что можно явно рассматривать лишь первый член в написанной формуле.



Таким образом в декаплете уровни расположены эквидистантно, с расстоянием  $\frac{1}{3} d$ . Из опыта это расстояние равно 147 Мэв, так что

$$d = 441 \text{ Мэв} . \quad (6.14)$$

Эквидистантность можно получить из формулы (6.10), если учесть, что для декаплета по формуле (4.20):

$$T = \frac{1}{2} Y + 1 , \quad (6.15)$$

откуда

$$M = ( M_0 + 2 M_2 ) + ( M_1 + \frac{3}{2} M_2 ) Y , \quad (6.16)$$

где, вообще говоря, постоянные не равны постоянным октета.

Для мезонных октетов формула получается из формул для октета барионного, если положить в ней  $a = b = e$  (или в формуле (6.10)  $M_1 = 0$ ) и применять эти формулы не для самих масс, а для их квадратов. Для октета псевдоскалярных мезонов получим, по аналогии с (6.6):

$$\Delta m^2 = e \text{ Sp } ( N \bar{P} P ) \quad (6.17)$$

и

$$m^2 ( K ) = \mu_0^2 + e \quad (6.18)$$

$$m^2 ( \pi ) = \mu_0^2$$

$$m^2 ( \eta ) = \mu_0^2 + \frac{4}{3} e$$

$\mu_0^2$  в этой формуле - новая постоянная.

Отсюда получаем соотношение, подобное (6.7)

$$m^2 ( K ) = \frac{1}{4} [ m^2(\pi) + 3 m^2(\eta) ] . \quad (6.19)$$

#### Т а б л и ц а IV

Квадраты масс псевдоскалярных мезонов (интервалы)

	(масса) <sup>2</sup> - m <sup>2</sup> (π) в (Бэв) <sup>2</sup>
η	0,28
K	0,22
π	0

Соотношение (разностей квадратов масс):

$$K = \frac{1}{4} \eta \quad (6.20)$$

выполняется достаточно хорошо.

Для октета векторных мезонов согласие оказывается значительно хуже. Это, по-видимому, можно объяснить тем, что внутри октета лежит еще один векторный мезон  $\omega$  ( $Y = T = 0$ ). Этот мезон естественно должен возмущать октет (см. таблицу У).

Т а б л и ц а У

Квадраты масс векторных мезонов (интервалы)

	(масса) <sup>2</sup> - m <sup>2</sup> (ρ) в (Бэв) <sup>2</sup>
φ	0,48
K*	0,22
ω	0,06
ρ	0

Описание возмущения, которое вносит  $\omega$ -мезон в векторный октет, выходит, вообще говоря, как за рамки группы SU(3), так и за схему нарушения симметрии, описанную выше. То, что в природе обнаружены два мезона ( $\omega$ -мезон и  $\phi$ -мезон) с близкими массами и с одинаковыми квантовыми числами, указывает, по-видимому на существование более высокой симметрии, нарушение которой демонстрируется расщеплением  $\omega$  и  $\phi$  мезона, подобно тому как нарушение симметрии SU(3) приводит к расщеплению масс  $\phi$  и  $\rho^0$ -мезонов. Однако простое расширение группы, например, до SU(4) приводит к увеличению числа компонент мультиплетта, так что решение этой загадки должно быть более хитрым<sup>х)</sup>. Следует отметить и вторую загадку, которую преподносят нам мезонные октеты. Из приведенных данных видно, что в двух октетах равны первые интервалы

$$m^2(k) - m^2(\pi) = m^2(K^*) - m^2(\rho) \quad (6.21)$$

Ясно, что такое соотношение не может следовать из симметрии SU(3). Здесь

<sup>х)</sup> Как пример похожей ситуации можно указать на расширение группы вращений до группы Лоренца. Как известно, при таком расширении происходит перемешивание состояний с заданным спином с состояниями с меньшими спинами.

речь идет о том, что связь разных мезонных октетов с полем  $N$  одинакова (универсальное взаимодействие). Можно еще указать, что если заменить (массы)<sup>2</sup>  $\phi$  и  $\omega$  их полусуммой, то полученная схема практически совпадает со схемой псевдоскалярного октета.

Оставляя, однако, спекулятивные рассуждения, обратимся к возможности описания расщепления, указанной Швингером<sup>х)</sup>.

Предположим, действительно, что девятый мезон входит в октет, который в этом случае имеет след не равный нулю. Такой октет описывается матрицей:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\phi + \frac{1}{\sqrt{3}}\omega & \rho^- & K^{*-} \\ \rho^+ & -\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\phi + \frac{1}{\sqrt{3}}\omega & \bar{K}^0 \\ K^+ & K^0 & -\frac{\sqrt{2}}{3}\phi + \frac{1}{\sqrt{3}}\omega \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

В качестве взаимодействия, нарушающего симметрию, возьмем два слагаемых: одно обычного типа  $Sp \Pi \bar{V} V$ , а другое простейшее, которое расщепляет массу  $\omega$  и  $\phi$ . Это второе слагаемое мы запишем просто в виде  $h \bar{\omega} \omega$ . В отличие от вычислений, приведенных выше, взаимодействие, которое мы рассматриваем, теперь будет перемешивать  $\phi$  и  $\omega$  мезоны, так как оно содержит квадрат элемента, стоящего в нижнем правом углу (6.17). Итак, рассмотрим взаимодействие:

$$\Delta M = g \bar{V}_\alpha^3 V_\alpha^3 + h \bar{\omega} \omega. \quad (6.23)$$

Взаимодействие (6.23) приводит к следующим массам мезонов: ( $\mu_1^2$  - новая постоянная, не связанная с постоянной в (6.18))

$$\begin{aligned} m^2(K) &= \mu_1^2 + g \\ m^2(\rho) &= \mu_1^2 \\ m^2(\phi) &= \mu_1^2 + \frac{4}{3}g \\ m^2(\omega) &= \mu_1^2 + \frac{2}{3}g + h \\ m^2(\omega, \phi) &= \frac{2\sqrt{2}}{3}g \end{aligned} \quad (6.24)$$

<sup>х)</sup> Смешивание  $\omega$  и  $\phi$  рассматривалось в работе Сакураи

$m(\omega, \phi)$  обозначает матричный элемент, перепутывающий исходные  $\phi$  и  $\omega$ . Как и в теории Зееман-эффекта реальные уровни-массы реальных  $\phi$  и  $\omega$  описываются корнями уравнения собственных значений

$$\left(\mu_0^2 + \frac{2}{3}g\right)m^2(\phi) + \frac{2\sqrt{2}}{3}gm^2(\omega) = \lambda m^2(\phi) \quad (6.25)$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}gm^2(\phi) + \left(\mu_0^2 + \frac{2}{3}g + h\right)m^2(\omega) = \lambda m^2(\omega) .$$

Определитель этого уравнения имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \mu_0^2 + \frac{4}{3}g & \frac{2\sqrt{2}}{3}g \\ \frac{2\sqrt{2}}{3}g & \mu_0^2 + \frac{2}{3}g + h \end{vmatrix} = 0 \quad (6.26)$$

Сумма корней уравнения собственных значений равна следу (6.20)

$$m^2(\phi) + m^2(\omega) = 2 + 2g + h .$$

Сравнивая с (6.24), получим

$$h = m^2(\phi) + m^2(\omega) - 2m^2(K^*) .$$

Произведение корней уравнения (6.25) равно величине определителя (6.20). Вместо формулы для масс будем получать формулу для интервалов, выбирая за начало отсчета массу  $\rho$ . Это значит, что мы положим постоянную  $\mu_0^2$  в формуле (6.24), равной нулю. Обозначая теперь квадраты масс в такой шкале символами самих частиц, найдем, что определитель (4.26) равен  $\frac{4}{3}hg$ . Так как  $g$  это масса  $K^*$ , а  $h$  определено выше, то

$$\omega\phi = \frac{4}{3}K^*(\omega + \phi - 2K^*) \quad (6.27)$$

или в квадратах масс

$$\begin{aligned} [m^2(\omega) - m^2(\rho)]\{m^2(\phi) - m^2(\rho)\} &= \frac{4}{3}[m^2(K^*) - m^2(\rho)] \times \\ &\times [m^2(\phi) + m^2(\omega) - 2m^2(K^*)] . \end{aligned} \quad (6.28)$$

В пределах ошибок эксперимента это соотношение удовлетворяется экспериментальными значениями масс. Описанная процедура основана на не вполне понятных предположениях. Формально мы должны были рассмотреть взаимодействие общего типа  $h(\bar{\omega}\phi + \bar{\phi}\omega)$ , вводя две новых постоянных  $h$  и  $h'$ . Сравнение с опытом в этом случае привело бы к некоторому соотношению между  $h$  и  $h'$ ; однако никакого соотношения между массами, очевидно, не возникло. Решение Швингера отвечает

выбору  $\eta' = \frac{2\sqrt{2}}{3} d$ . Имеет ли такой выбор какой-либо глубокий смысл, покажет дальнейшее развитие теории.

### § 7. Расщепление изотопических мультиплетов

Схема описания расщепления унитарных мультиплетов может быть расширена так, чтобы включить в себя и описание расщеплений зарядовых мультиплетов, которые по условию задачи оставались вырожденными в полях  $\Pi_3^8$  и  $\Pi_{33}^{88}$ .

Наиболее простой путь обобщения схемы использует симметрию унитарного мультиплетта относительно замены заряда на гиперзаряд. Выпишем еще раз матрицу барионного октета

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda & & \Sigma^- & \Xi^- \\ & \Sigma^+ & & \Xi^0 \\ & & -\frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda & \\ \rho & & & \text{p} \\ & & & -\sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

Рассмотрим подгруппу, отвечающую матрице очерченной в правом нижнем углу. Ее структура, очевидно, аналогична структуре матрицы изотопического спина; ее квантовое число называют  $K$ -спином. Компоненты  $K$ -мультиплетта определяются тем же путем, что и для  $T$ -мультиплетта (изотопического мультиплетта). След матрицы после умножения на  $\frac{2}{\sqrt{6}}$  дает состояние с  $K=0$  (сравни, как получается  $\Lambda$  из матрицы  $T$ -мультиплетта).

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} (\sqrt{3} \Sigma^0 + \Lambda^0). \quad (7.2)$$

Вычитая из диагональных элементов очерченной матрицы  $2 \times 2$  половину ее следа, получим функцию с  $K=1$ :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \Sigma^0 + \sqrt{\frac{3}{8}} \Lambda, & \Xi^0 \\ \text{p}, & \frac{1}{2\sqrt{2}} \Sigma^0 - \sqrt{\frac{3}{8}} \Lambda \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

(3-я  $K$ -компонента  $\Phi_1$ , равна  $\frac{1}{2} (-\Sigma^0 + \sqrt{3} \Lambda^0)$ ].

Наконец, две функции имеют  $K$ -спин, равный  $1/2$

$$\Phi_{\frac{1}{2}}^{(1)} = (\Sigma^-, \Xi^-), \quad \Phi_{\frac{1}{2}}^{(2)} = (\Sigma^+, \rho). \quad (7.4)$$

Компоненты каждой из функций имеют одинаковый заряд, подобно тому как компоненты изотопических мультиплетов имеют одинаковый гиперзаряд.

Возмущение, сохраняющее заряд, вводится компонентами поля  $N_1^I$  и  $N_{11}^{II}$ . Здесь у нас нет оснований пренебречь полем  $N_{11}^{II}$ , так как один из процессов, приводящих к расщеплению изотопических мультиплетов, есть излучение и поглощение фотона, матричный элемент такого процесса преобразуется как квадрат  $N_1^I$  или, что то же самое, как  $N_{11}^{II}$ .

Компоненты возмущающегося поля имеют те же квантовые числа, что и соответствующие компоненты барионного или мезонного мультиплета, так как классификация, очевидно, не связана с конкретным выбором частиц. Поле  $N_{11}^{II}$  преобразуется как соответствующая компонента 27-плета. Заметим, что в теории слабых взаимодействий будут играть роль компоненты  $N_3^2$  и  $N_2^3$ , имеющие заряд и странность (они преобразуются как  $K^0$  и  $\bar{K}^0$ ).

$$(\Delta M)_1 = \alpha \bar{\Psi}_\alpha^1 \Psi_1^\alpha + \beta \bar{\Psi}_1^\alpha \Psi_\alpha^1 - 2\gamma \bar{\Psi}_1^1 \Psi_1^1. \quad (7.5)$$

Вместе со старым расщеплением получаем:

$$\begin{aligned} m(\Xi^-) &= m_0 + a + a, \\ m(\Xi^0) &= m_0 + a, \\ m(\Sigma^-) &= m_0 + a, \\ m(\Sigma^0) &= m_0 + \frac{1}{2}(a + \beta) - \gamma, \\ m(\Sigma^+) &= m_0 + \beta, \\ m(\Lambda) &= m_0 + \frac{2}{3}(a + b) + \frac{1}{6}(a + \beta) - \frac{1}{3}\gamma, \\ m(n) &= m_0 + b, \\ m(p) &= m_0 + b + \beta, \\ m(\Lambda\Sigma) &= \frac{1}{\sqrt{3} \cdot 2}(a + \beta) - \frac{2}{\sqrt{3}}\gamma. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Коэффициент  $\gamma$  оценивается из

$$\gamma = m(\Sigma^0) - \frac{1}{2} [m(\Sigma^+) + m(\Sigma^-)] \dots \quad (7.7)$$

Из экспериментальных значений масс следует, что  $\gamma = -1,2 \pm 0,8$ . Мы положим  $\gamma = 0$ . После этого из (7.6) возникает еще одно соотношение, связывающее три разности масс

$$[m(\Xi^-) - m(\Xi^0)] - [m(p) - m(n)] = m(\Sigma^-) - m(\Sigma^+), \quad (7.8)$$

которое достаточно хорошо согласуется с опытом:

$$\alpha = m(\Xi^-) - m(\Xi^0) = 6,1 \pm 1,6, \quad (7.9)$$

$$\beta = m(p) - m(n) = -1,3 \pm 0,7,$$

$$\alpha - \beta = m(\Sigma^-) - m(\Sigma^+) = 6,5 \pm 0,5.$$

Аналогично барионному октету можно рассмотреть барионный декаплет. Если и здесь ограничиться низшим мультипольным взаимодействием, то по аналогии с расщеплением унитарным, мы получим, что уровни расщепляются эквидистантно, так что:

$$\begin{aligned} m(\Delta^{++}) - m(\Delta^+) &= m(\Delta^+) - m(\Delta^0) = m(\Delta^0) - \\ &- m(\Delta^-) = m(\Sigma^{*+}) - m(\Sigma^{*0}) = m(\Sigma^{*0}) - \\ &- m(\Sigma^{*-}) = m(\Xi^{*0}) - m(\Xi^{*-}). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Отклонение от линейной зависимости будет указывать на примесь взаимодействия с более высокой мультипольностью.

В случае мезонных октетов соотношение (7.8) обращается в тождество. Возникает вопрос о природе разности масс  $\rho^0$  и  $\pi^+$  ( $\rho^0$   $\rho^+$ ), которая должна быть равна нулю в 8-польном приближении. Ее следует отнести за счет электромагнитного взаимодействия типа  $H_{11}^{11}$ .

Выбор взаимодействия в форме (6.4) не вполне отвечает принятой нами точке зрения. Если у поля  $H_b^a$  отличны от нуля лишь компоненты  $H_1^1$  и  $H_3^3$ , то такое

поле не обладает симметрией унитарного октета так как  $\text{Sp } H \neq 0$ .

Если считать, что  $H_b^a$  должен быть октетом, то надо изменить его вид.

Поле  $H_b^a$  должно иметь квантовые числа  $Q=Y=0$ ; его можно записать в форме диагональной матрицы с элементами на диагонали  $A, -A+B, -B$ , где  $A$  и  $B$  — произвольные вещественные числа.

Вычтем из такой матрицы единичную матрицу, умноженную на  $\frac{1}{2}B$ . Такая операция сводится просто к смещению начала отсчета масс, так как она не вызывает расщепления. Мы увидим, что таким образом мы закрепляем массу  $\Sigma^0$ , как начало отсчета.

Обозначая  $A - \frac{1}{2}B = \kappa$  и  $3/2B = -\lambda$ , получим, что поле можно записать в форме матрицы

$$H_b^a = \begin{pmatrix} \kappa & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

Элемент  $\lambda$  в старых обозначениях есть просто  $H_3^3$ . Различие с проведенными выше вычислениями состоит в том, что теперь  $H_3^2$  равно не нулю, а  $-H_1^1$ . С помощью матрицы (7.11) мы получим набор формул для масс барьонов, из которых могут быть получены все соотношения между массами:

$$\begin{aligned} m(\Xi^-) &= m_0 + b + a, \\ m(\Xi^0) &= m_0 + b - a, \\ m(\Sigma^-) &= m_0 + a - \beta, \\ m(\Sigma^0) &= m_0, \\ m(\Sigma^+) &= m_0 - \alpha + \beta, \\ m(\Lambda) &= m_0 + \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b, \\ m(n) &= m_0 + a - \beta, \\ m(p) &= m_0 + a + \beta. \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$m(\bar{\Sigma}\Lambda) = \frac{1}{\sqrt{3}}a + \frac{1}{\sqrt{3}}\beta$$



Там на неведомых дорожках  
Следы невиданных зверей ...

В нашу задачу не входило изложение всех идей и результатов унитарной теории, и мы оставили в стороне такое, например, важное, но еще не оформившееся направление, как теорию слабых взаимодействий; тем не менее, имеет смысл отметить некоторые новые, пока еще спекулятивные идеи, так как они указывают на то, что фауна унитарного мира может быть весьма необычна. Расщепление масс показало, что взаимодействие частиц с вакуумом можно с успехом описывать некоторым полем  $H_b^a$ , нейтральные компоненты которого  $H_3^3$  и  $H_1^1$  ответственны за унитарное и изотопическое расщепление, соответственно. Возникает понятное желание придать этому полю смысл реального физического поля, сопоставив квадратам такого унитарного поля новый унитарный мезонный мультиплет. Такой мезонный октет был рассмотрен в работе Глешоу и Колемана.

Представим себе, что это поле  $H_b^a$  есть поле скалярных мезонов. Если написать матрицу этого поля по аналогии с матрицей псевдоскалярных мезонов, то диагональными компонентами окажутся две нейтральные частицы, которые, чтобы подчеркнуть тождественность унитарных свойств, обозначим через  $\pi^{*0}$  и  $\eta^*$  (остальные компоненты октета  $\pi^{*\pm}$ ,  $K^{*+}$ ,  $K^{*0}$ ,  $\bar{K}^{*0}$  связаны с изменением заряда или изотопического спина и они не вносят вклада в расщепление, так же как и подобные компоненты поля  $H_b^a$ ).

Так как квантовые числа  $\pi^{*0}$  и  $\eta^*$  те же, что и у вакуума, то они могут аннигилировать бесследно, превращаясь, например, в ненаблюдаемое связанное состояние протон-антипротон с полной массой равной нулю!

Это значит, что формально существует процесс излучения нейтрального мезона, имеющего в виртуальном состоянии энергию, равную нулю; так как на диаграмме такой процесс изображается линией с "кляксой" на конце, то такой мезон назовем "головастиком"<sup>x)</sup>.

Такая схема, очевидно, формально совпадает со схемой поля  $H_b^a$ . Если к сказанному добавить предположение о том, что взаимодействие головастика со всеми мультиполями описывается универсальной постоянной, то мы получаем модель, в которой правила интервалов, связывающие разные мультиплеты, получают естественную интерпретацию.

x) Читатель, конечно, заметил, что "головастик" принадлежит к семейству "шпунронов", вводимых разными авторами для описания процессов нарушения симметрии. Диаграмма "головастика", очевидно, может существовать и для обычных  $\rho\pi^0$  и  $\eta$  мезонов, но если их взаимодействие унитарно-инвариантно, то такие "головастики" не приведут к расщеплению. Идея "головастика" была высказана в работах Швингера (Annals of Phys. 2, 407, 1957) и Салама и Варда (Phys. Rev. Lett. 5, 390, 1960 и Rev. Mod. Phys., 33, 428 (1961)). Мезонный октет был введен Сакураи [F4].

Скалярный мезон, из которого строится "головастик" в свободном состоянии, может иметь массу, не равную нулю. В этом случае авторы модели указывают на возможное отождествление его с резонансами  $k^* \rightarrow \kappa$  (730 Мэв),  $\pi^* \rightarrow \zeta$  (570 Мэв) и  $\eta^*$  с массой  $\approx 770$  Мэв, близкой к  $\rho$ . У таких трех компонент квадраты масс хорошо удовлетворяет правилу интервалов

$$m^2(k^*) - m^2(\pi^*) = 0,22 \quad (8.1)$$

$$m^2(\eta^*) - m^2(\pi^*) = 0,28.$$

Однако само существование резонансов и их квантовые числа плохо установлены и к такому сопоставлению нельзя еще относиться серьезно<sup>х)</sup>.

Можно попытаться описать "головастики" и иначе, используя идею Гелл-Манна об унитарных спинорах, которые по-русски, по-видимому, надо называть "бесами".

Поле  $\Pi_b^a$  можно представить, как произведение двух унитарных спиноров  $\Psi^a$  и  $\phi_b$

$$\Pi_b^a = \Psi^a \phi_b. \quad (8.2)$$

Унитарный спинор имеет компоненты с зарядами  $-\frac{e}{3}$ ,  $-\frac{e}{3}$  и  $+\frac{2e}{3}$ ; унитарный спинор  $\phi_b$  имеет компоненты с зарядами  $+\frac{e}{3}$ ,  $+\frac{e}{3}$ ,  $-\frac{2e}{3}$ . Такие же дробные значения имеет и гиперзаряд спиноров.

Появление дробного заряда связано с тем, что в группе  $SU(3)$  матрицы заряда  $Q$  и гиперзаряда  $Y$  диагональны и имеют след, равный нулю. В группе  $U(3)$  мы имели бы три диагональных оператора соответствующих поворотам вокруг трех осей; им отвечали бы три "магнитных" квантовых числа  $m_a$  ( $a=1,2,3$ ). В группе  $SU(3)$  сумма трех собственных значений должна быть равна нулю. Отсюда, сравнивая с (4.4), получим, что  $-Y = m_3 - \frac{m}{3}$ ,  $Q = m_2 - \frac{m}{3}$ ,  $Y - Q = m_1 - \frac{m}{3}$ , ( $m = m_1 + m_2 + m_3$ ), что и приводит к дробным значениям зарядов.

Если принять (8.2), то действие поля  $\Pi_b^a$  можно описать как излучение и поглощение "беса" в одной и той же точке диаграммы (или излучение пары  $\bar{\Psi}^a$  и  $\phi_b$  с последующей аннигиляцией). Такая петля приводит к расщеплению масс и тождественна "головастике". Если, однако,  $\bar{\Psi}^a$  и  $\phi_b$  могут рождаться в свободном состоянии, то мы приходим к схеме Гелл-Манна, не подтвержденной, однако, опытом.

<sup>х)</sup> Глешоу и Колеман ссылаются на следующие эксперименты G. Alexander et al. Phys. Rev. Lett., 8, 447 (1962); D.H. Miller et al. Phys. Lett., 5, 279 (1963); S.G. Wojcicki et al. Phys. Lett., 5, 233 (1963); D.B. Lichtenberg, Stanford Linear Accel. Rep. Nr. 13 (1963) p. 53L с 53;  $\eta^*$ : H. Haropian, W. Selore. Phys. Rev. Lett., 10, 533 (1963); Z. Gioragossian. Phys. Rev. Lett., 11, 85 (1963).

Поиски частиц, ответственных за нарушение унитарной симметрии, напоминают охоту за нейтрино, оставившим след в форме несохранения энергии. Чем кончится новая охота покажет будущее.

## § 9. З а к л ю ч е н и е

Формулы для масс частиц, или как их можно назвать следуя спектроскопической терминологии, правила интервалов не исчерпывают применение схемы унитарной симметрии и ее нарушение. Эти формулы, однако, имеют особое значение.

Унитарная схема впервые позволила рассматривать массы частиц с единой, пусть еще очень несовершенной точки зрения. До сих пор различие в массах частиц рассматривалось часто как досадное нарушение симметрии.

В схеме  $SU(3)$  неожиданно оказалось, что нарушение симметрии обладают простыми свойствами и описывается очень естественно в схеме унитарных мультиплетов. Возникает вопрос, нельзя ли по характеру нарушения симметрии изучать свойства взаимодействия мультиплетов с вакуумом. Такой вопрос становится, естественным, если вспомнить, что нарушение изотопической симметрии вызывается электромагнитным полем (взаимодействие частицы с электромагнитным полем вакуума) и изучая отклонения от изотопической симметрии в разных реакциях, можно было бы в принципе получить довольно много сведений об этом взаимодействии (хотя расщепление в этом случае мало). Этого, конечно, не надо делать, так как у нас есть тоже совершенные методы изучения электромагнитного поля. Иначе обстоит дело в случае взаимодействия поля  $\Pi^3_8$ , нарушающего симметрию  $SU(3)$ .

Это взаимодействие, которое, к счастью, сравнительно велико, не сводится к какому-либо известному полю. Поэтому изучение распадов и реакций с точки зрения группы  $SU(3)$  служит хорошим источником информации о взаимодействии частиц с вакуумом.

Простота возникающей схемы позволяет ожидать в этом направлении существенного продвижения в понимании законов взаимодействия элементарных частиц.

Рукопись поступила в издательский отдел  
30 июня 1964 г.

## Л и т е р а т у р а

### A. Старая теория $S(3)$

1. M.Ikeda, S.Okawa and Y.Onuki. *Progr. Theor. Phys.* 22, 715 (1959).
2. S.Sakata, *Progr. Theor. Phys.*, 6, 686 (1962).
3. L.Okun, *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, 9, 61 (1959).
4. М.А.Марков, Гипероны и К-мезоны, М-Л. 1958.

### B. Обзоры $SU(3)$

1. A.E.Edmonds, *Proc. Roy. Soc. A* 268, 567 (1962).
2. R. E. Behrens, J.Dreilein, C. Fronsdal and B.W.Lee, *Revs. Mod. Phys.* 34, 1 (1962).  
B.W.Lee, *Revs. Mod. Phys.*, 34, 1 (1962).
3. J. I. Swart, *Revs. Mod. Phys.*, 35, 916 (1963).
4. Y. Ne'eman, *Rept. to the Intern. Conf. on Nuclear Structure, Stanford, June (1963).* ( в печати)
5. F.G.Chew, M.Gell-Mann and A.H.Rosenfeld, *Sci. Amer.* 210, 74 (1964); см.перевод УФН 73, август (1964).
6. В.И.Огиевецкий, Лекции в зимней школе, Дубна 1964. (в печати)
7. Я.А.Сморodinский. Об алгебре унитарной группы Гелл-Манна, Дубна 1961 (препринт Д-738).
8. В.М.Шехтер, Вопросы физики элементарных частиц, т.3 стр. 103, Ереван 1963.
9. B.L.Pursey, *Proc. Roy. Soc.*, 275, 284 (1963).

### C. Основные работы

1. Y. Ne'eman, *Nucl. Phys.*, 26, 222 (1961).<sup>x)</sup>
2. M.Gell-Mann, California Inst. of Technology Synchrotron Laboratory Report CTSL-20<sup>x)</sup>
3. M.Gell-Mann, *Phys. Rev.* 125 1067 (1962).
4. S.Okubo, *Progr. Theor. Phys.*, 27, 949 (1962).

---

<sup>x)</sup> Русский перевод см. в сборнике "Элементарные частицы и компенсирующие поля". Мир, 1964.

## D. Электромагнитное взаимодействие

1. S.Coleman and S.L.Glashow, Phys. Rev. Letts., 6, 423 (1961).
2. N.Cabbibo and R.Gatto, Nuovo Cim., 21, 872 (1961).
3. C.A.Levinson, H.J.Lipkin and S.Meshkov, Nuovo Cim., 23, 236 (1962).
4. C.A.Levinson, H.J.Lipkin and S.Meshkov, Phys. Letts. (1964) (в печати) (1964).
5. S.P.Rosen, Phys. Rev. Letts., 11, 100 (1963).
6. A.J.Macfarlane and E.C.G.Sudarshan, Nuovo Cim., 31, 1176 (1964).
7. R.Dalitz, Phys. Rev. Letts. (в печати) (1964).
8. J.J.Sakurai, Phys. Rev., 132, 424 (1963).

## E Слабые взаимодействия

1. M.Gell-Mann and M.Levy, Nuovo Cim., 16, 705 (1958).
2. N.Cabibbo, Phys. Rev. Letts., 10, 531 (1963).
3. N.Cabibbo, Phys. Rev. Letts., 12, 62 (1964).
4. S.P.Rosen, Phys. Rev. Letts., 12, 408 (1964).
5. M.Gell-Mann, Phys. Letts., 8, 214 (1964).
6. M.Gell-Mann, Phys. Rev. Letts., 12, 154 (1964).
7. M.Gell-Mann, Phys. Rev., 125, 1017 (1962).
8. R.Oehme, Phys. Rev. Letts., 12, 550 (1964).
9. M.M.Block, Phys. Rev. Letts., 12, 262 (1964).
10. M.Gell-Mann, Physics (в печати) (1964.)
11. G.Zweig (в печати)

## F. Новые идеи (модели)

1. M.Gell-Mann, Phys. Letts. (1964).
2. J.Schwinger, Phys. Rev. Letts., 12, 916 (1964).
3. J.Schwinger (препринт)
4. A.Salam and Ward (в печати)

## G. Два эксперимента

### 1) Открытие $\Omega^-$

V.E.Barnes et al. (33 автора!) Phys. Rev. Letts., 2, 204 (1964).

### 2) Отсутствие "кварков"

2. L.P.Leipuner, W.T.Chu, R.C.Larsen, R.K.Adair, Phys. Rev. Letts., 12, 423 (1964).