29/IX-64

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-1728

В.В. Бабиков

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

1964

P-1728

В.В. Бабиков

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ

1. В в е д е н и е

В ряде работ [1]-[3] было показано, что как для численных расчетов фаз рассеяния на потенциале $V(r)$, так и для получения различных приближенных выражений, удобно использовать вместо уравнения Шредингера уравнение для некоторой вспомогательной функции $\delta_\ell(r,k)$. Величина $\delta_\ell(r_0,k)$ имеет смысл фазы рассеяния частицы с кинетической энергией $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ и орбитальным моментом $\hbar\ell$ на "обрезанном" в точке $r=r_0$ сферически-симметричном потенциале $V(r)\theta(r_0-r)$, и поэтому называется фазовой функцией. Искомое значение сдвига фазы является при этом асимптотическим значением фазовой функции $\delta_\ell(k)=\delta_\ell(\infty,k)$ [x].

Уравнение для фазовой функции и соответствующее начальное условие имеют вид [xx]

$$\delta'_\ell(r,k) = -k^{-1} V(r)[\operatorname{Cos}\delta_\ell(r,k)\hat{j}_\ell(kr) - \operatorname{Sin}\delta_\ell(r,k)\hat{n}_\ell(kr)]^2, \quad \delta_\ell(0,k)=0 . \tag{1.1}$$

Нетрудно видеть, что условие непрерывности $\delta_\ell(r,k)$ при $\delta_\ell(0,k)=0$ и $\delta_\ell(\infty,k)=\mathrm{Const.}$ приводит к обычным требованиям, накладываемым на предельные значения потенциала [xxx]

$$\begin{aligned} &V(r) > -1/4r^2 , && r\to 0 , \\ &r^{1+\varepsilon} V(r) \to 0 , && r\to\infty , \ \varepsilon>0 . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Что касается потенциала во всем интервале $0 \le r < \infty$, то условие непрерывности фазовой функции допускает существование бесконечных значений потенциала $V(r)=+\infty$ в точках, отличных от $r=0$, только в виде отталкивательной сердцевины (hard core):

$$V(r) = +\infty , \quad 0 \le r \le r_0 . \tag{1.3}$$

Анализ показывает, что уравнение и начальное условие (1.1) сохраняют при этом смысл в области $0 \le r \le r_0$, если понимать значения потенциала (1.3) как предельный переход $V(r)=V_0\to\infty$. Функция $\delta_\ell(r,k)$ имеет тогда вид:

---

x) Наиболее полно метод фазовых функций изложен в работе [2], где обсуждается также его применение к решению задачи связанных состояний.

xx) Здесь и ниже используются обозначения работы [2] для регулярного и нерегулярного в точке $r=0$ решений уравнения Шредингера без потенциала ($V(r)\equiv 0$): $\hat{j}_\ell(x) \equiv \sqrt{\pi x/2}\, J_{\ell+1/2}(x)$, $\hat{n}_\ell(x) \equiv \sqrt{\pi x/2}\, N_{\ell+1/2}(x)$. Штрих обозначает дифференцирование по r. Положено также $\hbar=2m=1$.

xxx) В работах [1] и [2] условия на потенциал берутся несколько более жесткими, чем требуется в действительности.

$$\delta_\ell(r,k) = \mathrm{arctg}\,\frac{\hat{j}_\ell(kr)}{\hat{n}_\ell(kr)} + O(V_0^{-1/2}), \quad 0 \le r \le r_0 . \qquad (1.4)$$

Соотношение (1.4) отвечает хорошо известному выражению фазы рассеяния на твердой сфере радиуса r. В этом случае интегрирование уравнения (1.1) практически следует начинать от точки $r = r_c$ при начальном условии, определяемом формулой (1.4).

Если потенциал $V(r)\theta(r_0 - r)$ не имеет связанных состояний при любом r_0, тогда выполняется соотношение $|\delta_\ell(r,k)| < \pi/2$, и можно пользоваться несколько более простым, чем (1.1), уравнением для функции $t_\ell(r,k) \equiv \mathrm{tg}\,\delta_\ell(r,k)$:

$$t'_\ell(r,k) = -k^{-1}\, V(r)\,[\hat{j}_\ell(kr) - t_\ell(r,k)\hat{n}_\ell(kr)]^2, \quad t_\ell(0,k) = 0 . \qquad (1.5)$$

Уравнения (1.4), (1.5) были использованы в работе /3/ для получения очень удобных уравнений, с помощью которых вычисляются такие параметры низкоэнергетического рассеяния, как длина рассеяния, эффективный радиус и т.д. Частный случай S-волнового рассеяния ($\ell = 0$) рассматривался в работе /4/. Полученные в /3,4/ уравнения пригодны, однако, только при условии отсутствия связанных состояний.

Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию описанного выше метода вычисления сдвигов фаз и длин рассеяния. В разделе 2 рассматривается случай короткодействующего потенциала, обладающего связанными состояниями, и получаются регуляризованные уравнения для параметров низкоэнергетического рассеяния. Метод фазовых функций и теория эффективного радиуса для случая, когда наряду с короткодействующим (ядерным) потенциалом имеется длиннодействующий кулоновский потенциал, учитываемый точным образом, рассматривается в разделе 3. Раздел 4 содержит обобщение метода фазовых функций на случай нецентральных, а именно тензорных сил. Соответствующие уравнения теории эффективного радиуса получены в разделе 5. В каждом разделе обсуждается также возможность присутствия в потенциале твердой отталкивательной сердцевины.

2. Низкоэнергетическое рассеяние на короткодействующем потенциале при наличии связанных состояний

Пусть потенциал $V(r)$ является короткодействующим (т.е. спадает при $r \to \infty$ быстрее, чем $r^{-\nu}$, где ν – любая положительная степень) и не содержит связанного состояния с моментом ℓ при нулевой энергии связи. Тогда, как известно, фаза рассеяния $\delta_\ell(k)$ и, следовательно, $\mathrm{tg}\,\delta_\ell(k)$ являются нечетными функциями K, регулярными в точке $k = 0$. В этом случае $k^{-1}\mathrm{tg}\,\delta_\ell(k)$ может быть разложена в ряд по степеням k^2, первые коэффициенты которого полностью определяют рассеяние при низких энергиях. Для вычисления этих параметров удобно использовать метод фазовых функций /3/,/4/.

Представляя функцию $t_\ell(r,k) \equiv \mathrm{tg}\,\delta_\ell(r,k)$ в виде ряда[x)]

$$t_\ell(r,k) = -\frac{k^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!!\,(2\ell-1)!!}\sum_{p=0}^{\infty} k^{2p} A_{\ell p}(r) \qquad (2.1)$$

и используя известные разложения функций $\hat{j}_\ell(kr)$, $\hat{n}_\ell(kr)$, получаем из (1,5) следующую систему рекурентных уравнений

$$A'_{\ell p} = (-1)^p\,\pi (r/2)^{2p}\, V \Big\{ \sum_{m=0}^{p} \frac{(2\ell+1)!!\,(2\ell-1)!!\,(r/2)^{2\ell+2}}{m!\,(p-m)!\,\Gamma(\ell+3/2+m)\,\Gamma(\ell+3/2+p-m)} +$$

$$+ \sum_{p'=0}^{p}\sum_{m=0}^{p-p'} \frac{2(-1)^{\ell+1+p'}\,(r/2)^{1-2p'}\,A_{\ell p'}}{m!\,(p-p'-m)!\,\Gamma(\ell+3/2+m)\,\Gamma(-\ell+1/2+p-p'-m)} + \qquad (2.2)$$

$$+ \frac{1}{(2\ell+1)!!\,(2\ell-1)!!}\sum_{p'=0}^{p}\sum_{p''=0}^{p-p'}\sum_{m=0}^{p-p'-p''} \frac{(-1)^{p'+p''}\,(r/2)^{-2\ell-2p'-2p''}\,A_{\ell p'}A_{\ell p''}}{m!\,(p-p'-p''-m)!\,\Gamma(-\ell+1/2+m)\,\Gamma(-\ell+1/2+p-p'-p''-m)} \Big\},$$

$$A_{\ell p}(0) = 0, \quad p = 0, 1, 2, \ldots$$

Только первое из этих уравнений (для $A_{\ell 0}$) является нелинейным. Остальные уравнения являются линейными относительно неизвестных функций $A_{\ell p}(r)$, $(p \neq 0)$ и могут быть последовательно проинтегрированы в квадратурах с помощью известных решений $A_{\ell p-1}, \ldots, A_{\ell 0}$. Первые два уравнения системы (2.2) можно записать в виде

$$A'_{\ell 0} = \frac{1}{2\ell+1} V (r^{\ell+1} - r^{-\ell} A_{\ell 0})^2, \quad A_{\ell 0}(0) = 0. \qquad (2.3)$$

$$A'_{\ell 1} = -\frac{1}{2\ell+1}\, r^{-\ell}\, V (r^{\ell+1} - r^{-\ell} A_{\ell 0})\Big(2A_{\ell 1} + \frac{r^2}{2\ell-1} A_{\ell 0} + \frac{r^{2\ell+3}}{2\ell+3}\Big),$$
$$A_{\ell 1}(0) = 0. \qquad (2.4)$$

Для случая $\ell = 0$ система (2.2) принимает особенно простой вид. Приведем три первые уравнения:

$$A'_{00} = V(r - A_{00})^2, \quad A_{00}(0) = 0,$$

$$A'_{01} = -2V(r - A_{00})A_{01} - \frac{1}{3} r^2 V(r^2 - 4rA_{00} + 3A_{00}^2), \quad A_{01}(0) = 0, \qquad (2.5)$$

$$A'_{02} = -2V(r - A_{00})A_{02} + V\Big(\frac{2}{45} r^6 - \frac{4}{15} r^5 A_{00} + \frac{1}{3} r^4 A_{00}^2 + \frac{4}{3} r^3 A_{01} - 2r^2 A_{00}A_{01} + A_{01}^2\Big),$$

$$A_{02}(0) = 0.$$

---

x) Введение числовых множителей $(2\ell \pm 1)!!$ в разложение (2.1) позволяет освободиться от неудобных коэффициентов в уравнениях (ср. уравнения (2.3)–(2.4) с уравнениями (49)–(51) работы /3/).

Из уравнений (2.5) следует, что если при $r \to 0$ потенциал $V(r) \to V_0 r^s$ (см. первое из условий (1,2)), то

$$A_{00} \to \frac{V_0 r^{3+s}}{3+s}, \quad A_{01} \to -\frac{V_0 r^{5+s}}{3(5+s)}, \quad A_{02} \to \frac{2V_0 r^{7+s}}{45(7+s)}, \quad r \to 0. \qquad (2.6)$$

Если потенциал $V(r)$ содержит отталкивательную сердцевину (1.3), то, разлагая (1.4) по степеням k^2, можно получить выражения для коэффициентов $A_{\ell p}$, которые могут служить новыми начальными условиями при решении уравнений (2.2)-(2.5). Первые три коэффициента имеют вид:

$$\begin{aligned} A_{\ell 0}(r) &= r^{2\ell+1}, \\ A_{\ell 1}(r) &= -\frac{2\ell+1}{(2\ell+3)(2\ell-1)} r^{2\ell+3}, \quad 0 \le r \le r_c, \\ A_{\ell 2}(r) &= \frac{(\ell-2)(2\ell+1)}{(2\ell+5)(2\ell-1)^2(2\ell-3)} r^{2\ell+5}. \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Функции A_{0p} связаны с параметрами теории эффективного радиуса длиной рассеяния a_0, эффективным радиусом r_0', параметром формы P_0 и т.п., которые определяются разложением:

$$k \operatorname{ctg} \delta_0 = -\frac{1}{a_0} + \tfrac{1}{2} r_0 k^2 - P_0 r_0^3 k^4 + 0(k^6). \qquad (2.8)$$

Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} a_0 &= \lim_{r\to\infty} a_0(r), & a_0(r) &\equiv A_{00}(r), \\ r_0 &= \lim_{r\to\infty} r_0(r), & r_0(r) &\equiv \frac{2A_{01}(r)}{A_{00}^2(r)}, \\ P_0 &= \lim_{r\to\infty} P_0(r), & P_0(r) &\equiv \frac{1}{8}\frac{A_{00}^3(r)}{A_{01}^3(r)}\left[A_{01}^2(r) - A_{00}(r)A_{02}(r)\right]. \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Аналогично тому, как была введена фазовая функция $\delta_\ell(r,k)$, здесь определены функции $a_0(r)$, $r_0(r)$ и $P_0(r)$, имеющие соответственно смысл длины рассеяния, эффективного радиуса и параметра формы для обрезанного потенциала $V(r')\theta(r-r')$. Поэтому, интегрируя уравнения (2.5) и используя соотношения (2.9), мы получаем последовательность параметров низкоэнергетического рассеяния для последовательности обрезанных потенциалов.

Однако интегрирование уравнений (2.5) во всем интервале переменной r возможно, если только потенциал $V(r')\theta(r-r')$ не содержит при любом r связанного состояния (при $\ell = 0$) с энергией связи равной нулю. Если при некотором значении r_1 возникает такое связанное состояние, длина рассеяния $|a_0(r_1)| = \infty$, то есть функция $A_{00}(r)$ и, следовательно, все остальные функции $A_{0p}(r)$, становятся разрывными в точке r_1. Так как функции принимают при этом неограниченно большие значения, уравнения (2.5) не могут быть непосредственно проинтегрированы.

Аналогичная ситуация имеет место для функций $A_{\ell 0}$, $A_{\ell 1}$ и т.д., если в некоторой точке r_1 обрезанный потенциал $V(r)\theta(r_1 - r)$ приводит к появлению связанного состояния с моментом ℓ и нулевой энергией связи.

Следовательно, необходимо преобразовать систему (2.2) таким образом, чтобы иметь дело с функциями, регулярными во всей области $0 < r < \infty$. Первое из уравнений, то есть уравнение (2.3), регуляризуется заменой переменных (все величины считаются безразмерными)

$$A_{\ell 0}(r) = \operatorname{tg} \alpha_\ell(r) \qquad (2.10)$$

(для случая $\ell = 0$ это уравнение рассматривалось в работе /4/) и принимает вид:

$$\alpha_\ell' = \frac{1}{2\ell+1}\left(r^{\ell+1}\operatorname{Cos}\alpha_\ell - r^{-\ell}\operatorname{Sin}\alpha_\ell\right)^2, \quad \alpha_\ell(0) = 0. \qquad (2.11)$$

Регуляризация остальных уравнений системы (2.2) может быть сделана, если ввести новые функции $\beta_{\ell pn}(r)$:

$$A_{\ell p} = \beta_{\ell p p+1} A_{\ell 0}^{p+1} + \beta_{\ell pp} A_{\ell 0}^{p} + \ldots + \beta_{\ell p 0}, \quad p \neq 0. \qquad (2.12)$$

Тогда, подставляя (2.12) в систему (2.2) и приравнивая к нулю коэффициенты при всех степенях $A_{\ell 0}^n$, получим систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка для функций $\beta_{\ell pn}(r)$. Так как новая система не будет содержать разрывных функций $A_{\ell 0}(r)$, содержа только непрерывные коэффициенты, ввиду линейности системы ее решения $\beta_{\ell pn}(r)$ будут непрерывными функциями.

В частности, для коэффициентов, определяющих функцию $A_{\ell 1}$, –

$$A_{\ell 1} = \beta_{\ell 12} A_{\ell 0}^2 + \beta_{\ell 11} A_{\ell 0} + \beta_{\ell 10} \quad - \qquad (2.12')$$

получается следующая система уравнений:

$$\beta_{\ell 12}' = \frac{1}{2\ell+1} r^{-2\ell} V\left[2\beta_{\ell 12} r^{2\ell+1} + \beta_{\ell 11} + \frac{r^2}{2\ell-1}\right],$$

$$\beta'_{\ell 11} = \frac{2}{2\ell+1} r^{-2\ell} V\left[-\beta_{\ell 12} r^{4\ell+2} + \beta_{\ell 10} - \frac{2r^{2\ell+3}}{(2\ell-1)(2\ell+3)}\right],$$

$$\beta'_{\ell 10} = -\frac{1}{2\ell+1} rV\left[\beta_{\ell 11} r^{2\ell+1} + 2\beta_{\ell 10} + \frac{r^{2\ell+3}}{2\ell+3}\right]. \qquad (2.13)$$

Заметим, что имеет место тождество

$$\beta'_{\ell 12} r^{4\ell+2} + \beta'_{\ell 11} r^{2\ell+1} + \beta'_{\ell 10} \equiv 0.$$

Начальные условия для системы (2.13) определяются поведением потенциала $V(r)$ на малых расстояниях. Если, $V(r) \to V_0 r^s$ $(V_0 < \infty)$,

$$\beta_{\ell 12} \to -\frac{V_0 r^{-2\ell+3+s}}{(2\ell-3-s)(2\ell-1)(2\ell+1)},$$

$$\beta_{\ell 11} \to -\frac{4V_0 r^{4+s}}{(4+s)(2\ell-1)(2\ell+1)(2\ell+3)}, \qquad (2.13)$$

$$\beta_{\ell 10} \to -\frac{V_0 r^{2\ell+5+s}}{(2\ell+5+s)(2\ell+1)(2\ell+3)}.$$

Для наиболее важного случая, когда $\ell = 0$, (несколько упрощая обозначения) будем иметь:

$$A_{00} = \operatorname{tg}\alpha_0,$$

$$A_{01} = \beta_2 A_{00}^2 + \beta_1 A_{00} + \beta_0, \qquad (2.14)$$

$$A_{02} = \gamma_3 A_{00}^3 + \gamma_2 A_{00}^2 + \gamma_1 A_{00} + \gamma_0.$$

Уравнения для новых функций имеют вид $(\gamma_3 = \beta_2^2)$:

$$\alpha'_0 = V(r\cos\alpha_0 - \sin\alpha_0)^2, \quad \alpha_0(0) = 0. \qquad (2.15)$$

$$\beta'_2 = V(2r\beta_2 + \beta_1 - r^2); \quad \beta_2(0) = 0,$$

$$\beta'_1 = 2V(-r^2\beta_2 + \beta_0 + \tfrac{2}{3}r^3), \quad \beta_1(0) = 0,$$

$$\beta'_0 = -rV(r\beta_1 + 2\beta_0 + \tfrac{1}{3}r^3), \quad \beta_0(0) = 0. \qquad (2.15')$$

$$\gamma'_2 = V(2r\gamma_2 + \gamma_1 + \tfrac{1}{3}r^4 + \tfrac{4}{3}r^3\beta_2 - 3r^2\beta_2^2 - 2r^2\beta_1 + \beta_1^2 + 2\beta_2\beta_0), \quad \gamma_2(0) = 0,$$

$$\gamma'_1 = 2V(-r^2\gamma_2 + \gamma_0 - \tfrac{2}{15}r^5 + \tfrac{2}{3}r^3\beta_1 - r^2\beta_0 + \beta_1\beta_0), \quad \gamma_1(0) = 0, \qquad (2.15'')$$

$$\gamma'_0 = -V(r^2\gamma_1 + 2r\gamma_0 - \tfrac{2}{45}r^6 - \tfrac{4}{3}r^3\beta_0 - \beta_0^2), \quad \gamma_0(0) = 0,$$

Итак, при наличии у потенциала $V(r)$, а точнее, у последовательности "обрезанных" потенциалов $V(r')\theta(r-r')$, связанных состояний, следует решать уравнения (2.11), (2.13), (2.15) – (2.15''). С учетом (2.9) находим:

$$a_0(r) = -\operatorname{tg}\alpha_0(r),$$

$$r_0(r) = 2(\beta_2 + \beta_1 a_0^{-1} + \beta_0 a_0^{-2}), \qquad (2.16)$$

$$P_0(r) = -\frac{1}{8}\,\frac{(2\beta_2\beta_1 - \gamma_2) + (2\beta_2\beta_0 + \beta_1^2 - \gamma_1)a_0^{-1} + (2\beta_1\beta_0 - \gamma_0)a_0^{-2} + \beta_0^2 a_0^{-3}}{(\beta_2 + \beta_1 a_0^{-1} + \beta_0 a_0^{-2})^3}.$$

Если длина рассеяния очень велика $(|a_0| \to \infty)$, эффективный радиус и параметр формы имеют простой вид:

$$r_0 = 2\beta_2, \quad P_0 = -\frac{2\beta_2\beta_1 - \gamma_2}{8\beta_2^3}. \qquad (2.16')$$

Как показывает анализ предельного перехода $V_0 \to \infty$, при наличии твердой отталкивательной сердцевины в потенциале $V(r)$ уравнения (2.15) – (2.15'') надо решать с начальными условиями в точке $r = r_c$, которые определяются

$$\alpha_0(r_c) = \operatorname{arctg} r_c,$$

$$\beta_2(r_c) = \tfrac{1}{2} r_c, \quad \beta_1(r_c) = 0, \quad \beta_0(r_c) = -\frac{1}{6} r_c^3, \qquad (2.17)$$

$$\gamma_2(r_c) = -\frac{1}{24} r_c^3, \quad \gamma_1(r_c) = 0, \quad \gamma_0(r_c) = -\frac{3}{40} r_c^5.$$

Для произвольного ℓ имеем, соответственно:

$$\alpha_\ell(r_c) = \operatorname{arctg} r_c^{2\ell+1}, \qquad (2.18)$$

$$\beta_{\ell 12}(r_c) = -\tfrac{1}{2}\,\frac{r_c^{-2\ell+1}}{2\ell-1}, \quad \beta_{\ell 11}(r_c) = 0, \quad \beta_{\ell 10}(r_c) = -\frac{r_c^{2\ell+3}}{2(2\ell+3)}.$$

Если, кроме короткодействующего потенциала, имеется длиннодействующий потенциал, спадающий при $r \to \infty$ степенным образом $V(r) = 0(r^{-\nu})$, то рассмотрение низкоэнергетического рассеяния осложняется неаналитическим поведением фазы рассеяния $\delta_\ell(k)$ в точке $k=0$. Разложение (2.1) уже не имеет места, и требуется специальный анализ возникающих особенностей. Случай $\nu > 3$ был подробно обсужден в работе [3]. В следующем разделе будет рассмотрен частный, но физически наиболее интересный случай комбинации короткодействующего (ядерного) и кулоновского потенциалов.

3. Точный учет кулоновского взаимодействия при рассеянии на потенциале $V(r) + V_{кул}(r)$

Если наряду с потенциалом $V(r)$, удовлетворяющим условиям (1.2), имеется длиннодействующий кулоновский потенциал $V_{кул}(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$, то уравнения, изложенные в разделах 1 и 2, не могут быть использованы, так как не выполняется второе из условий (1.2). Однако метод фазовых функций можно применить и в этом случае, если вместо решений уравнения Шредингера без потенциала $\hat{j}_\ell(kr)$, $\hat{n}_\ell(kr)$ использовать кулоновские функции $F_\ell(kr,\eta)$, $G_\ell(kr,\eta)$, являющиеся регулярным и нерегулярным при $r=0$ решениями уравнения$^{x)}$

$$\frac{d^2 y}{d\rho^2} + \left[1 - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} - \frac{2\eta}{\rho}\right] y = 0. \tag{3.1}$$

Здесь

$$\rho = kr, \quad \eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} = \frac{1}{2kR}, \quad R = \frac{\hbar^2}{2m Z_1 Z_2 e^2}. \tag{3.2}$$

Используя тот же метод [2], с помощью которого были получены уравнения (1.1) и (1.5), находим

$$\delta'_\ell(r,k,\eta) = -k^{-1} V(r)\left[\cos\delta_\ell(r,k,\eta) F_\ell(kr,\eta) + \sin\delta_\ell(r,k,\eta) G_\ell(kr,\eta)\right]^2,$$
$$\delta_\ell(0,k,\eta) = 0 \tag{3.3}$$

и соответственно для функции $t_\ell = \mathrm{tg}\,\delta_\ell$:

$$t'_\ell(r,k,\eta) = -k^{-1} V(r)\left[F_\ell(kr,\eta) + t_\ell(r,k,\eta) G_\ell(kr,\eta)\right]^2, \quad t_\ell(0,k,\eta) = 0. \tag{3.4}$$

Асимптотическое значение решения уравнения (3.3) $\delta_\ell(\infty,k,\eta) = \delta_\ell$ является искомой величиной сдвига фазы, обусловленного совместным действием $V(r)$ и кулоновского потенциала.

Волновая функция имеет при этом асимптотический вид

x) О свойствах кулоновских функций см., например, обзор [5].

$$u_\ell(r) \sim \sin\left(kr - \eta \ln 2kr - \frac{\pi}{2}\ell + \sigma_\ell + \delta_\ell\right),$$

где $\sigma_\ell = \arg\Gamma(\ell + 1 + i\eta)$ – сдвиг фазы при чисто кулоновском рассеянии.

Уравнения (3.3) и (3.4) имеют простую структуру и при наличии таблиц кулоновских функций, или алгоритма их вычисления (как известно, наибольшие трудности связаны с вычислением функции G_ℓ); эти уравнения очень удобны при численных расчетах.

Если потенциал $V(r)$ содержит отталкивательную сердцевину (1.3), то в области действия сердцевины

$$\mathrm{tg}\,\delta_\ell(r,k,\eta) = -\frac{F_\ell(kr,\eta)}{G_\ell(kr,\eta)}, \quad 0 \le r \le r_0. \tag{3.5}$$

Формула (3.5) определяет новые граничные условия в точке $r = r_0$ при интегрировании уравнений (3.3) и (3.4).

Перейдем теперь к рассмотрению низкоэнергетического рассеяния. Как и в разделе 2, потребуем более быстрого, чем требует условие (1.2), спадания $V(r)$ на бесконечности. Из дальнейшего изложения станет ясно, что необходимым условием является $V(r) = 0(e^{-\mu r^n})$, где $n > ½$, $\mu > 0$.

Разложение $t_\ell(r,k,\eta)$ по степеням k^2 запишем в виде$^{x)}$

$$t_\ell(r,k,\eta) = -(2\ell+1) C_\ell^2(\eta) k^{2\ell+1} \sum_{p=0} A_{\ell p}(r,\eta) k^{2p}. \tag{3.6}$$

Здесь

$$C_\ell(\eta) = \frac{2^\ell}{(2\ell+1)!}\left[\ell^2+\eta^2\right]^{½}\left[(\ell-1)^2+\eta^2\right]^{½}\ldots\left[1+\eta^2\right]^{½}\left(\frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta}-1}\right)^{½}.$$

При отсутствии кулоновского взаимодействия ($\eta = 0$) разложение (3.6) принимает вид (2.1).

Чтобы получить уравнение для коэффициентов $A_{\ell p}(r,\eta)$, необходимо аналогичным образом разложить кулоновские функции. Наиболее удобным для этой цели является разложение [5] F_ℓ и G_ℓ по бесселевым функциям мнимого аргумента I_n и K_n $^{xx)}$. Подчеркнем, что это разложение предполагает малость величины $kd \ll 1$, где d – радиус действия (ядерного) потенциала $V(r)$; малость же величины kR, где R – "кулоновский радиус" (3.2), не предполагается.

Основной член разложения ($k \to 0$, $\eta \to \infty$) для каждой функции имеет вид:

x) Введение множителя $C_\ell^2(\eta)$ и зависимости от η в коэффициенты $A_{\ell p}$ позволяет удобным образом выделить особенности t_ℓ при $k=0$. И хотя $\eta = \eta(k)$, будем полагать η независимым параметром.

xx) Следует заметить, что в работе [5] в отличие от общепринятого определения (см., например, [6]) функция $K_n(x)$ содержит дополнительный множитель $(-1)^n$.

$$F_\ell = (2\ell+1)!\,C_\ell(\eta)\,R^{\ell+1/2}\,r^{1/2}\,I_{2\ell+1}(2\sqrt{r/R})\,k^{\ell+1}\,.$$

$$G_\ell = \frac{2}{(2\ell+1)!}\,\frac{1}{C_\ell(\eta)}\,R^{-\ell-1/2}\,r^{1/2}\,K_{2\ell+1}(2\sqrt{r/R})\,k^{-\ell}\,. \tag{3.7}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3.4), получаем для первого коэффициента разложения (3.6) уравнение:

$$A'_{\ell 0}(r,\infty) = \frac{1}{2\ell+1}\,V(r)\Big[(2\ell+1)!\,R^{\ell+1}\Big(\frac{r}{R}\Big)^{1/2} I_{2\ell+1}\Big(2\sqrt{\frac{r}{R}}\Big) - \frac{2}{(2\ell)!}\,R^{-\ell}\Big(\frac{r}{R}\Big)^{1/2} K_{2\ell+1}\Big(2\sqrt{\frac{r}{R}}\Big)A_{\ell 0}(r,\infty)\Big]^2, \tag{3.8}$$

$$A_{\ell 0}(0,\infty) = 0.$$

В отсутствие кулоновского потенциала ($R=\infty$) уравнение (3.8) принимает более простой вид (2.3). Уравнения для следующих коэффициентов $A_{\ell p}$ при произвольном ℓ имеют весьма сложный вид. Ввиду этого, а также того, что практический интерес представляет обычно только разложение для случая $\ell = 0$, ниже мы ограничимся получением уравнений для первых трех коэффициентов A_{00}, A_{01}, A_{02}.

В отличие от формул (3.7) и (3.8) теперь не будет предполагаться, что $\eta \gg 1$. Используя известные[7] разложения функций $F_0(kr,\eta)$ и $G_0(kr,\eta)$ по степеням $(kr)^2$ и сохраняя члены $\sim (kr)^4$, будем иметь:

$$F_0(kr,\eta) = C_0(\eta)\,kr\Big\{L_1\Big(\frac{r}{R}\Big) - \frac{1}{3!}(kr)^2 L_2\Big(\frac{r}{R}\Big) + \frac{1}{5!}(kr)^4\Big[\frac{10}{9}L_3\Big(\frac{r}{R}\Big) - \frac{1}{9}L_4\Big(\frac{r}{R}\Big)\Big]\Big\},$$

$$G_0(kr,\eta) = \frac{1}{C_0(\eta)}\Big\{\Big(H_1 + h\frac{r}{R}L_1\Big) - \frac{1}{3!}(kr)^2\Big(3M + h\frac{r}{R}L_2\Big) + \tag{3.9}$$

$$+ \frac{1}{5!}(kr)^4\Big[5N + h\frac{r}{R}\Big(\frac{10}{9}L_3 - \frac{1}{9}L_4\Big)\Big]\Big\}.$$

Здесь использованы обозначения работы[7]:

$$L_n\Big(\frac{r}{R}\Big) = n!\Big(\frac{r}{R}\Big)^{-1/2 n} I_n(2\sqrt{r/R}),$$

$$H_n\Big(\frac{r}{R}\Big) = \frac{2}{(n-1)!}\Big(\frac{r}{R}\Big)^{1/2 n} K_n(2\sqrt{r/R}),$$

$$M\Big(\frac{r}{R}\Big) = \frac{2}{3}\Big(\frac{r}{R}\Big)^{-1}\Big[L_1\Big(\frac{r}{R}\Big) - H_2\Big(\frac{r}{R}\Big)\Big], \tag{3.10}$$

$$N\Big(\frac{r}{R}\Big) = \frac{4}{3}\Big(\frac{r}{R}\Big)^{-1}\Big\{L_2\Big(\frac{r}{R}\Big) + 2\Big(\frac{r}{R}\Big)^{-1} H_3\Big(\frac{r}{R}\Big) + \frac{12}{5}\Big(\frac{r}{R}\Big)^{-2}\Big[H_4\Big(\frac{r}{R}\Big) - L_1\Big(\frac{r}{R}\Big)\Big]\Big\}.$$

Функция $h = h(\eta)$, входящая в выражение (3.9), равна:

$$h(\eta) = \eta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2+\eta^2)} - \ln\eta - \gamma, \quad \gamma = 0{,}577\ldots \tag{3.11}$$

Так как зависимость от η в (3.9) входит только в виде $h(\eta)$, в коэффициентах разложения (3.6) вместо η вторым аргументом удобно считать h, то есть $A_{\ell p} = A_{\ell p}(r,h)$. Подставляя (3.6) (при $\ell = 0$) и (3.9) в уравнение (3.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k в обеих его частях, получаем следующую систему рекуррентных уравнений:

$$A'_{00}(r,h) = V\Big[r L_1 - A_{00}\Big(H_1 + h\frac{r}{R}L_1\Big)\Big]^2 \qquad A_{00}(0,h) = 0.$$

$$A'_{01}(r,h) = -2V\Big[rL_1 - A_{00}\Big(H_1 + h\frac{r}{R}L_1\Big)\Big]\Big(H_1 + h\frac{r}{R}L_1\Big)A_{01} -$$

$$- \frac{1}{3}r^2 V\Big[rL_1 - A_{00}\Big(H_1 + h\frac{r}{R}L_1\Big)\Big]\Big[rL_2 - A_{00}\Big(3M + h\frac{r}{R}L_2\Big)\Big], \quad A_{01}(0,h) = 0. \tag{3.12}$$

$$A'_{02}(r,h) = -2V\Big[rL_1 - A_{00}\Big(H_1 + h\frac{r}{R}L_1\Big)\Big]\Big(H_1 + h\frac{r}{R}L_1\Big)A_{02} +$$

$$+ V\Big\{\frac{r^2}{60}\Big[rL_1 - A_{00}\Big(H_1 + h\frac{r}{R}L_1\Big)\Big]\Big[r^2\Big(r - h\frac{r}{R}A_{00}\Big)\Big(\frac{10}{9}L_3 - \frac{1}{9}L_4\Big) - 5r^2 A_{00} N +$$

$$+ 20A_{01}\Big(3M + h\frac{r}{R}L_2\Big)\Big] + \frac{1}{36}\Big[r^3 L_2 - A_{00} r^2\Big(3M + h\frac{r}{R}L_2\Big) + 6A_{01}\Big(H_1 + h\frac{r}{R}L_1\Big)\Big]^2\Big\},$$

$$A_{02}(0,h) = 0.$$

Чтобы иметь возможность непосредственно сравнивать вычисляемые параметры низкоэнергетического рассеяния с получаемыми из анализа экспериментальных данных (например, в рассеянии протона на протоне[7]), согласно формуле

$$\frac{C_0^2(\eta)\,\mathrm{ctg}\,\delta_0}{2\eta} + h(\eta) = R\Big[-\frac{1}{a_p} + \tfrac{1}{2} r_e k^2 - P r_e k^4 + \ldots\Big], \tag{3.13}$$

необходимо отделить в коэффициентах $A_{0p}(r,h)$ имеющуюся (благодаря $h(\eta)$) зависимость от энергии.

Этого можно добиться путем определения функций $a_p(r)$, $a_1(r)$ и $a_2(r)$ выражениями:

$$A_{00}(r,h) = \frac{a_p(r)}{1 + h/R\,a_p(r)},$$

$$A_{01}(r,h) = \frac{a_1(r)}{[1 + h/R\,a_p(r)]^2}, \tag{3.14}$$

$$A_{02}(r,h) = \frac{a_2(r)}{[1+h/Ra_p(r)]^2} + \frac{a_1^2(r)}{a_p(r)[1+h/Ra_p(r)]^3} = \frac{\tilde{a}_2(r,h)}{[1+h/Ra_p(r)]^2}.$$

Сравнивая (3.13) и (3.6), нетрудно убедиться, что имеют место соотношения, аналогичные (2.9):

$$a_p = a_p(\infty),$$

$$r_e = \frac{2a_1(\infty)}{a_p^2(\infty)}, \qquad (3.15)$$

$$P = -\frac{1}{8}\frac{a_2(\infty)a_p^4(\infty)}{a_1^3(\infty)}.$$

Подставляя (3.14) в уравнения (3.12), можно получить уравнение для $a_p(r)$, $a_1(r)$ и $a_2(r)$. Те же уравнения для a_p и a_1 получаются, если в (3.12) просто положить $h=0$. Из третьего уравнения (3.12) тогда следует уравнение для функции $b_2(r) \equiv \tilde{a}_2(r,0)$, которое при интегрировании является более удобным, чем уравнение для $a_2(r)$, содержащее величину $a_p(r)$ в отрицательных степенях. Последняя может в некоторых точках обращаться в нуль. Параметр формы P выражается через b_2 следующим образом:

$$P = \frac{1}{8}\frac{a_p^3(\infty)}{a_1^3(\infty)}[a_1^2(\infty) - a_p(\infty)b_2(\infty)]. \qquad (3.15')$$

Функции $a_p(r)$, $a_1(r)$, $b_2(r)$ удовлетворяют уравнениям:

$$a_p' = V(rL_1 - a_p H_1)^2,$$

$$a_1' = -V(rL_1 - a_p H_1)(2H_1 a_1 - r^2 M a_p + \frac{1}{3}r^3 L_2),$$

$$b_2' = -V(rL_1 - a_p H_1)[2H_1 b_2 - r^2 M a_1 + \frac{1}{12}r^4 N a_p - \frac{1}{60}r^5(\frac{10}{9}L_3 - \frac{1}{9}L_4)] + \qquad (3.16)$$

$$+ V(H_1 a_1 - \tfrac{1}{2}r^2 M a_p + \frac{1}{6}r^3 L_2)^2,$$

$$a_p(0) = a_1(0) = b_2(0) = 0.$$

Так как при $x \to \infty$, $I_n(x) \approx x^{-1/2}e^x$ необходимо, чтобы $V(r) \approx O(e^{-\mu r^n})$, где $\mu > 0$, $n > 1/2$.

Решение уравнений (3.16) позволяет точным образом учесть кулоновский потенциал при вычислении длины рассеяния, эффективного радиуса и параметра формы. Если выключить кулоновское взаимодействие ($R = \infty$), все функции $L_n = H_n = M = N = 1$ и уравнения (3.16) преобразуются в систему (2.5). Полагая кулоновское взаимодействие малым и рассматривая его как возмущение, из уравнения для $a_p(r)$ нетрудно получить первую поправку к длине $a_0(r)$ рассеяния на одном ядерном потенциале V(r). Она совпадает с логарифмическим членом в известной /7/ приближенной формуле (напомним, что все величины в нашем рассмотрении являются безразмерными):

$$\frac{1}{a_p} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{R}\ln\frac{1}{R} + \frac{const}{R}. \qquad (3.17)$$

Член $\sim \frac{1}{R}$ существенно определяется уже видом потенциала, и коэффициент при нем может быть вычислен только для конкретного выражения V(r). Следует отметить слабую сходимость ряда (3.17) из-за наличия логарифмических членов.

Если потенциал V(r) содержит отталкивательную сердцевину (1.3), то с помощью выражения (3.5) для произвольного ℓ можно получить:

$$A_{\ell 0}(r,\eta=\infty) = \tfrac{1}{2}(2\ell)!(2\ell+1)!R^{2\ell+1}\frac{I_{2\ell+1}(2\sqrt{r/R})}{K_{2\ell+1}(2\sqrt{r/R})}, \quad 0 \le r \le r_c. \qquad (3.18)$$

Значение $A_{\ell 0}(r_c,\infty)$ должно являться начальным условием при интегрировании уравнения (3.8). Соотношение (3.18) является точным. Если $r_c/R \ll 1$, то можно воспользоваться приближенным выражением

$$A_{\ell 0}(r,\eta=\infty) \approx r^{2\ell+1}, \quad 0 \le r \le r_c. \qquad (3.18')$$

Начальные условия для уравнений (3.12) принимают вид:

$$A_{00}(r_c,h) = \frac{r_c L_1(r_c/R)}{H_1(r_c/R) + h\frac{r_c}{R}L_1(\frac{r_c}{R})},$$

$$A_{01}(r_c,h) = -\frac{r_c^3}{3!}[\frac{L_2}{L_1} - \frac{3M + h\frac{r_c}{R}L_2}{H_1 + h\frac{r_c}{R}L_1}],$$

$$A_{02}(r_c,h) = \frac{r_c^5}{5!}[\frac{10}{9}\frac{L_3}{L_1} - \frac{1}{9}\frac{L_4}{L_1} - \frac{5N + h\frac{r_c}{R}(\frac{10}{9}L_3 - \frac{1}{9}L_4)}{H_1 + h\frac{r_c}{R}L_1} + \frac{10}{3}(\frac{3M + h\frac{r_c}{R}L_2}{H_1 + h\frac{r_c}{R}L_1})^2 - \qquad (3.19)$$

$$-\frac{10}{3}\frac{L_2}{L_1}\frac{3M + h\frac{r_c}{R}L_2}{H_1 + h\frac{r_c}{R}L_1}].$$

Полагая $h = 0$, получим начальные условия для уравнений (3.16)

$$a_p(r_c) = r_c\frac{L_1}{H_1} = \tfrac{1}{2}R\frac{I_1(2\sqrt{r_c/R})}{K_1(2\sqrt{r_c/R})},$$

$$a_1(r_c) = \frac{r_c^3}{3!}(-\frac{L_2}{L_1} + \frac{3M}{H_1}) = \frac{1}{6}R^2 r_c\frac{I_1}{K_1} - \frac{1}{3}R^{1/2}r_c^{5/2}(\frac{I_2}{I_1} + \frac{K_2}{K_1}), \qquad (3.20)$$

$$b_2(r_o) = \frac{r_o^5}{5!}\left(\frac{10}{9}\frac{L_3}{L_1} - \frac{1}{9}\frac{L_4}{L_1} - 5\frac{N}{H_1} + 30\frac{M^2}{H_1^2} - 10\frac{L_2 M}{L_1 H_1}\right).$$

Если $r_o \ll R$, то с точностью до членов $\approx O(\frac{r}{R}\ln\frac{r}{R})$ получаем:

$$a_p(r) = r, \quad a_1(r) = \frac{1}{3}r^3, \quad b_2(r) = \frac{2}{15}r^5, \quad 0 \le r \le r_o. \qquad (3.20')$$

Если обрезанный суммарный потенциал $[V(r') + V_{кул}(r')]\theta(r - r')$ обладает связанными состояниями, длина рассеяния $a_p(r)$ обращается в некоторых точках в бесконечность. Поэтому необходимо регуляризовать уравнения (3.16). Для этого, подобно тому, как это делалось в разделе 2, положим:

$$a_p(r) = \mathrm{tg}\,\alpha_p(r),$$

$$a_1(r) = \beta_2(r)a_p^2(r) + \beta_1(r)a_p(r) + \beta_0(r), \qquad (3.21)$$

$$b_2(r) = \beta_2^2(r)a_p^3(r) + \gamma_2(r)a_p^2(r) + \gamma_1(r)a_p(r) + \gamma_0(r).$$

Тогда, подставляя (3.21) в (3.16) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях a_p, для новых функций получаем уравнения

$$\alpha_p' = V(rL_1\cos\alpha_p - H_1\sin\alpha_p)^2, \quad \alpha_p(0) = 0.$$

$$\beta_2' = VH_1[2rL_1\beta_2 + H_1\beta_1 - r^2 M], \quad \beta_2(0) = 0,$$

$$\beta_1' = 2V[-r^2L_1^2\beta_2 + H_1^2\beta_0 + \frac{1}{6}r^3(3ML_1 + H_1L_2)], \quad \beta_1(0) = 0, \qquad (3.22)$$

$$\beta_0' = -VrL_1[rL_1\beta_1 + 2H_1\beta_0 + \frac{1}{3}r^3L_2], \quad \beta_0(0) = 0.$$

$$\gamma_2' = V[2\gamma_2 rL_1H_1 + \gamma_1 H_1^2 - 3\beta_2^2 r^2 L_1^2 + \frac{1}{3}\beta_2 r^3(3L_1M + L_2H_1) + 2\beta_2\beta_0 H_1^2 +$$

$$+ \beta_1^2 H_1^2 - 2\beta_1 r^2 H_1 M + \frac{1}{12}r^4(3M^2 + H_1N)], \quad \gamma_2(0) = 0,$$

$$\gamma_1' = 2V[-\gamma_2 r^2 L_1^2 + \gamma_0 H_1^2 + \beta_1\beta_0 H_1^2 + \frac{1}{6}\beta_1 r^3(3L_1M + L_2H_1) - \beta_0 r^2 H_1 M -$$

$$- \frac{r^5}{12}(L_2M + \tfrac{1}{2}L_1N + \frac{1}{9}L_3H_1 - \frac{1}{90}L_4H_1)], \quad \gamma_1(0) = 0,$$

$$\gamma_0' = -V[\gamma_1 r^2 L_1^2 + 2\gamma_0 rL_1H_1 - \beta_0^2 H_1^2 - \frac{1}{3}\beta_0 r^3(3L_1M + L_2H_1) -$$

$$- \frac{1}{36}r^6(L_2^2 + \frac{2}{3}L_3L_1 - \frac{1}{15}L_4L_1)], \quad \gamma_0(0) = 0.$$

Отметим, что имеет место соотношение

$$\beta_2' r^2 L_1^2 + \beta_1' rL_1H_1 + \beta_0' H_1^2 = 0.$$

Если имеется твердая отталкивательная сердцевина, то, как показывает анализ, начальными условиями для уравнений (3.22) будут:

$$\alpha_p(r_o) = \mathrm{arctg}\left[r_o\frac{L_1(r_o/R)}{H_1(r_o/R)}\right],$$

$$\beta_2(r_o) = \frac{r_o}{2}\frac{M(r_o/R)}{L_1(r_o/R)}, \quad \gamma_2(r_o) = -\frac{r_o^3}{24}\frac{N(r_o/R)}{L_1(r_o/R)},$$

$$\beta_1(r_o) = 0, \quad \gamma_1(r_o) = 0, \qquad (3.23)$$

$$\beta_0(r_o) = -\frac{r_o^3}{6}\frac{L_2(r_o/R)}{H_1(r_o/R)}, \quad \gamma_0(r_o) = -\frac{r_o^5}{12}\frac{L_2M}{H_1^2} + \frac{r_o^5}{120}\frac{\frac{10}{9}L_3 - \frac{1}{9}L_4}{H_1}.$$

4. Обобщение метода фазовых функций на случай тензорного потенциала

Пусть потенциал $V(\vec{r})$ содержит кроме центрально-симметричной части $V_o(r)$ также нецентральные члены. Для определенности будем рассматривать рассеяние друг на друга двух частиц, обладающих спином 1/2 (нуклонов). Тогда нецентральные силы могут вызываться тензорным $V_T(r)S_{12}$, спин-орбитальным $V_{LS}(r)(\vec{L}\vec{S})$ и квадратичным спин- орбитальным $V_{LL}(r)\tfrac{1}{2}[(\vec{\sigma}_1\vec{L})(\vec{\sigma}_2\vec{L}) + (\vec{\sigma}_2\vec{L})(\vec{\sigma}_1\vec{L})]$ потенциалами. Последние два приводят к неодинаковому эффективному потенциалу, действующему на парциальные волны с различными орбитальными моментами L, но не смешивают их амплитуды, так что все формулы предыдущих разделов могут быть использованы. В отличие от этого тензорые силы не только изменяют эффективный потенциал, но, что гораздо важнее, смешивают в триплетном спиновом состоянии амплитуды парциальных волн, отвечающее при одном полном моменте системы J различным орбитальным моментам $L = J \mp 1$. Уравнения для соответствующих радиальных волновых функций u_J, w_J оказываются связанными x):

$$u_J'' + \left(k^2 - \frac{J(J-1)}{r^2} - V_{J,J-1}\right) u_J - T_J\, w_J = 0,$$
$$w_J'' + \left(k^2 - \frac{(J+2)(J+1)}{r^2} - V_{J,J+1}\right) w_J - T_J\, u_J = 0. \tag{4.1}$$

Здесь введены обозначения:

$$V_{J,J-1}(r) = V_o(r) - \frac{2(J-1)}{2J+1} V_T(r) + (J-1) V_{LS}(r) + (J-1)(J-2) V_{LL}(r),$$
$$V_{J,J+1}(r) = V_o(r) - \frac{2(J+2)}{2J+1} V_T(r) - (J+2) V_{LS}(r) + (J+2)(J+3) V_{LL}(r). \tag{4.2}$$
$$T_J(r) = \frac{6\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} V_T(r).$$

Связь уравнений (4.1) существенно усложняет вычисление параметров рассеяния, которыми в данном случае являются два сдвига фазы и параметр смешивания амплитуд /8/. Эти величины определяются асимптотиками решений u_J, w_J. Система (4.1) имеет два линейно-независимых решения ($u_J^{(1)}$, $w_J^{(1)}$) и ($u_J^{(2)}$, $w_J^{(2)}$), - регулярные в точке $r = 0$. Нетрудно показать, что для них выполняется тождество

$$u_J^{(1)} u_J^{(2)\prime} - u_J^{(2)} u_J^{(1)\prime} + w_J^{(1)} w_J^{(2)\prime} - w_J^{(2)} w_J^{(1)\prime} \equiv 0. \tag{4.3}$$

Ввиду того, что любая линейная комбинация этих решений также является решением системы (4.1), так что асимптотики u_J, w_J могут быть произвольными, становится возможным различное определение параметров рассеяния.

Ниже уравнения, являющиеся обобщением уравнений (1.1) и (1.5) на случай тензорного потенциала, получены для функций $x_{J,J-1}(r)$, $x_{J,J+1}(r)$, $y_J(r)$ отвечающих параметризации Мак Хейла-Тэлера /9/, функций $\delta_{J\alpha}(r)$, $\delta_{J\gamma}(r)$, $\epsilon_J(r)$, отвечающих параметризации Блатта/-Биденхарна /8/, /10/, и для функций $\bar\delta_{J,J-1}(r)$, $\bar\delta_{J,J+1}(r)$, $\bar\epsilon_J(r)$, отвечающих "ядерной" (nuclear bar) параметризации /11/, /12/. Все эти функции имеют смысл соответствующих параметров рассеяния на обрезанных потенциалах $V_{J,J-1}(r')\,\theta(r-r')$, $V_{J,J+1}(r')\,\theta(r-r')$ $T_J(r')\,\theta(r-r')$.

Не приводя громоздких выкладок, кратко обрисуем ход вычислений. Прежде всего, следуя методу работы /2/, выразим волновые функции $u_J(r)$, $w_J(r)$, соответствующие двум произвольным линейно-независимым решениям,

---

x) Подробное рассмотрение вопросов, связанных с эффектом тензорных сил, и ссылки на литературу можно найти в обзорной статье /8/.

через новые функции $c(r)$, $s(r)$, $d(r)$, $t(r)$, на которые наложены дополнительные условия (аргументом сферических функций Бесселя $\hat j_\ell$, $\hat n_\ell$ является величина kr):

$$u_J^{(1)} = c_1 \hat j_{J-1} - s_1 \hat n_{J-1}, \qquad c_1' \hat j_{J-1} - s_1' \hat n_{J-1} = 0,$$
$$w_J^{(1)} = d_1 \hat j_{J+1} - t_1 \hat n_{J+1}, \qquad d_1' \hat j_{J+1} - t_1' \hat n_{J+1} = 0. \tag{4.4}$$

$$w_J^{(2)} = c_2 \hat j_{J+1} - s_2 \hat n_{J+1}, \qquad c_2' \hat j_{J+1} - s_2' \hat n_{J+1} = 0,$$
$$u_J^{(2)} = d_2 \hat j_{J-1} - t_2 \hat n_{J-1}, \qquad d_2' \hat j_{J-1} - t_2' \hat n_{J-1} = 0.$$

Для новых функций после подстановки (4.4) в (4.1) получаем две системы линейных уравнений первого порядка, каждая из которых содержит 4 уравнения c_1, s_1, d_1, t_1 и c_2, s_2, t_2, d_2. Соотношение (4.3) принимает теперь вид:

$$c_1 t_2 - c_2 t_1 + d_1 s_2 - d_2 s_1 \equiv 0. \tag{4.5}$$

Представление Мак Хейла-Тэлера /9/ характеризуется следующим выбором асимптотических выражений:

$$u_J^{(J-1)} \approx \hat j_{J-1} - x_{J,J-1} \hat n_{J-1},$$
$$w_J^{(J-1)} \approx -y_J \hat n_{J+1}. \tag{4.6}$$
$$w_J^{(J+1)} \approx \hat j_{J+1} - x_{J,J+1} \hat n_{J+1},$$
$$u_J^{(J+1)} \approx -y_J \hat n_{J-1}.$$

Сравнение (4.6) и (4.4) показывает, что можно определить такие параметрические функции $x_{J,J-1}(r)$, $x_{J,J+1}(r)$ и $y_J(r)$, асимптотические значения которых являются искомыми значениями параметров:

$$x_{J,J-1} = \frac{c_2 s_1 - d_1 t_2}{c_1 c_2 - d_1 d_2}, \qquad x_{J,J+1} = \frac{c_1 s_2 - t_1 d_2}{c_1 c_2 - d_1 d_2},$$
$$y_J = \frac{c_2 t_1 - d_1 s_2}{c_1 c_2 - d_1 d_2} = \frac{c_1 t_2 - d_2 s_1}{c_1 c_2 - d_1 d_2}. \tag{4.7}$$

Используя упомянутые выше уравнения для функций c, s, d, t , окончательно получаем следующую систему трех нелинейных уравнений и соответствующие начальные условия:

$$x'_{J,J-1} = -\frac{1}{k}\left[V_{J,J-1}(\hat{j}_{J-1} - x_{J,J-1}\hat{n}_{J-1})^2 - 2T_J(\hat{j}_{J-1} - x_{J,J-1}\hat{n}_{J-1})\hat{n}_{J+1}\,y_J + V_{J,J+1}\hat{n}^2_{J+1}\,y_J^2\right],$$

$$x'_{J,J+1} = -\frac{1}{k}\left[V_{J,J+1}(\hat{j}_{J+1} - x_{J,J+1}\hat{n}_{J+1})^2 - 2T_J(\hat{j}_{J+1} - x_{J,J+1}\hat{n}_{J+1})\hat{n}_{J-1}\,y_J + V_{J,J-1}\hat{n}^2_{J-1}\,y_J^2\right],$$

$$y'_J = -\frac{1}{k}\left[T_J(\hat{j}_{J-1} - x_{J,J-1}\hat{n}_{J-1})(\hat{j}_{J+1} - x_{J,J+1}\hat{n}_{J+1}) + T_J\hat{n}_{J-1}\hat{n}_{J+1}\,y_J^2 - \right. \tag{4.8}$$

$$\left. - V_{J,J-1}\hat{n}_{J-1}\,y_J(\hat{j}_{J-1} - x_{J,J-1}\hat{n}_{J-1}) - V_{J,J+1}\hat{n}_{J+1}\,y_J(\hat{j}_{J+1} - x_{J,J+1}\hat{n}_{J+1})\right],$$

$$x_{J,J-1}(0) = x_{J,J+1}(0) = y_J(0) = 0\,.$$

При выключении тензорного взаимодействия ($T_J(r) \equiv 0$) находим, что $y_J(r) \equiv 0$ и, таким образом, система (4.8) вырождается в два независимые уравнения (1.5) для парциальных волн с $L = J-1$ и $L = J+1$, причем $x_{J,J-1} = \mathrm{tg}\,\delta_{J-1}$, $x_{J,J+1} = \mathrm{tg}\,\delta_{J+1}$.

Уравнения для функций, отвечающих параметрам Блатта-Биденхарна [10] можно получить, используя (аналогично предыдущему) асимптотические выражения:

$$\begin{aligned}
u_{J\alpha} &= \hat{j}_{J-1} - \mathrm{tg}\,\delta_{J\alpha}\hat{n}_{J-1}\,,\\
w_{J\alpha} &= \mathrm{tg}\,\epsilon_J(\hat{j}_{J+1} - \mathrm{tg}\,\delta_{J\alpha}\hat{n}_{J+1})\,.\\
w_{J\gamma} &= \hat{j}_{J+1} - \mathrm{tg}\,\delta_{J\gamma}\hat{n}_{J+1}\,,\\
u_{J\gamma} &= -\mathrm{tg}\,\epsilon_J(\hat{j}_{J-1} - \mathrm{tg}\,\delta_{J\gamma}\hat{n}_{J-1})\,.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Но эти уравнения можно вывести и из систем (4.8), если воспользоваться известной [11] связью параметров $x_{J,J-1}$, $x_{J,J+1}$, y_J с параметрами $\delta_{J\alpha}$, $\delta_{J\gamma}$, ϵ_J:

$$\begin{aligned}
x_{J,J-1} &= \cos^2\epsilon_J\,\mathrm{tg}\,\delta_{J\alpha} + \sin^2\epsilon_J\,\mathrm{tg}\,\delta_{J\gamma}, & \mathrm{tg}\,\delta_{J\alpha} &= \tfrac{1}{2}\left[(x_{J,J-1} + x_{J,J+1}) + \sqrt{(x_{J,J-1} - x_{J,J+1})^2 + 4y_J^2}\right],\\
x_{J,J+1} &= \cos^2\epsilon_J\,\mathrm{tg}\,\delta_{J\gamma} + \sin^2\epsilon_J\,\mathrm{tg}\,\delta_{J\alpha}, & \mathrm{tg}\,\delta_{J\gamma} &= \tfrac{1}{2}\left[x_{J,J-1} + x_{J,J+1} - \sqrt{(x_{J,J-1} - x_{J,J+1})^2 + 4y_J^2}\right]\\
y_J &= \tfrac{1}{2}\sin 2\epsilon_J(\mathrm{tg}\,\delta_{J\alpha} - \mathrm{tg}\,\delta_{J\gamma}), & \mathrm{tg}\,2\epsilon_J &= \frac{2y_J}{x_{J,J-1} - x_{J,J+1}}\,.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

После элементарных хотя и весьма утомительных вычислений получаем ($t_{J\alpha} \equiv \mathrm{tg}\,\delta_{J\alpha}$, $t_{J\gamma} \equiv \mathrm{tg}\,\delta_{J\gamma}$, $t_{J\epsilon} \equiv \mathrm{tg}\,\epsilon_J$):

$$t'_{J\alpha} = -k^{-1}(1 + t^2_{J\epsilon})^{-1}\left[V_{J,J-1}(\hat{j}_{J-1} - t_{J\alpha}\hat{n}_{J-1})^2 + 2T_J(\hat{j}_{J-1} - t_{J\alpha}\hat{n}_{J-1})(\hat{j}_{J+1} - t_{J\alpha}\hat{n}_{J+1})\,t_{J\epsilon} + \right.$$

$$\left. + V_{J,J+1}(\hat{j}_{J+1} - t_{J\alpha}\hat{n}_{J+1})^2\,t^2_{J\epsilon}\right], \quad t_{J\alpha}(0) = 0.$$

$$t'_{J\gamma} = -k^{-1}(1 + t^2_{J\epsilon})^{-1}\left[V_{J,J+1}(\hat{j}_{J+1} - t_{J\gamma}\hat{n}_{J+1})^2 - 2T_J(\hat{j}_{J+1} - t_{J\gamma}\hat{n}_{J+1})(\hat{j}_{J-1} - t_{J\gamma}\hat{n}_{J-1})\,t_{J\epsilon} + \right.$$

$$\left. + V_{J,J-1}(\hat{j}_{J-1} - t_{J\gamma}\hat{n}_{J-1})^2\,t^2_{J\epsilon}\right], \quad t_{J\gamma}(0) = 0, \tag{4.11}$$

$$t'_{J\epsilon} = -k^{-1}(t_{J\alpha} - t_{J\epsilon})^{-1}\left[T_J(\hat{j}_{J-1} - t_{J\alpha}\hat{n}_{J-1})(\hat{j}_{J+1} - t_{J\gamma}\hat{n}_{J+1}) - T_J\,t^2_{J\epsilon}(\hat{j}_{J-1} - t_{J\gamma}\hat{n}_{J-1})(\hat{j}_{J+1} - t_{J\alpha}\hat{n}_{J+1}) - \right.$$

$$\left. - V_{J,J-1}\,t_{J\epsilon}(\hat{j}_{J-1} - t_{J\alpha}\hat{n}_{J-1})(\hat{j}_{J-1} - t_{J\gamma}\hat{n}_{J-1}) + V_{J,J+1}\,t_{J\epsilon}(\hat{j}_{J+1} - t_{J\gamma}\hat{n}_{J+1})(\hat{j}_{J+1} - t_{J\alpha}\hat{n}_{J+1})\right]$$

$$t_{J\epsilon}(0) = 0$$

Уравнения для самих фаз $\delta_{J\alpha}$, $\delta_{J\gamma}$ и параметра смешивания ϵ_J, более удобные чем (4.11) при наличии связанных состояний имеют вид:

$$\delta'_{J\alpha} = -\frac{1}{k}\left[V_{J,J-1}\cos^2\epsilon_J(\cos\delta_{J\alpha}\hat{j}_{J-1} - \sin\delta_{J\alpha}\hat{n}_{J-1})^2 + 2T_J\sin\epsilon_J\cos\epsilon_J(\cos\delta_{J\alpha}\hat{j}_{J-1} - \sin\delta_{J\alpha}\hat{n}_{J-1})\times\right.$$

$$\left.\times(\cos\delta_{J\alpha}\hat{j}_{J+1} - \sin\delta_{J\alpha}\hat{n}_{J+1}) + V_{J,J+1}\sin^2\epsilon_J(\cos\delta_{J\alpha}\hat{j}_{J+1} - \sin\delta_{J\alpha}\hat{n}_{J+1})^2\right], \quad \delta_{J\alpha}(0) = 0,$$

$$\delta'_{J\gamma} = -\frac{1}{k}\left[V_{J,J+1}\cos^2\epsilon_J(\cos\delta_{J\gamma}\hat{j}_{J+1} - \sin\delta_{J\gamma}\hat{n}_{J+1})^2 - 2T_J\sin\epsilon_J\cos\epsilon_J(\cos\delta_{J\gamma}\hat{j}_{J+1} - \sin\delta_{J\gamma}\hat{n}_{J+1})\times\right. \tag{4.12}$$

$$\left.\times(\cos\delta_{J\gamma}\hat{j}_{J-1} - \sin\delta_{J\gamma}\hat{n}_{J-1}) + V_{J,J-1}\sin^2\epsilon_J(\cos\delta_{J\gamma}\hat{j}_{J-1} - \sin\delta_{J\gamma}\hat{n}_{J-1})^2\right], \quad \delta_{J\gamma}(0) = 0,$$

$$\epsilon'_J = -\frac{1}{k}\,\frac{1}{\sin(\delta_{J\alpha} - \delta_{J\gamma})}\left[T_J\cos^2\epsilon_J(\cos\delta_{J\alpha}\hat{j}_{J-1} - \sin\delta_{J\alpha}\hat{n}_{J-1})(\cos\delta_{J\gamma}\hat{j}_{J+1} - \sin\delta_{J\gamma}\hat{n}_{J+1}) - \right.$$

$$T_J\sin^2\epsilon_J(\cos\delta_{J\gamma}\hat{j}_{J-1} - \sin\delta_{J\gamma}\hat{n}_{J-1})\times(\cos\delta_{J\alpha}\hat{j}_{J+1} - \sin\delta_{J\alpha}\hat{n}_{J+1}) - V_{J,J-1}\sin\epsilon_J\cos\epsilon_J$$

$$(\cos\delta_{J\alpha}\hat{j}_{J-1} - \sin\delta_{J\alpha}\hat{n}_{J-1})(\cos\delta_{J\gamma}\hat{j}_{J-1} - \sin\delta_{J\gamma}\hat{n}_{J-1}) +$$

$$\left. + V_{J,J+1}\sin\epsilon_J\cos\epsilon_J(\cos\delta_{J\gamma}\hat{j}_{J+1} - \sin\delta_{J\gamma}\hat{n}_{J+1})(\cos\delta_{J\alpha}\hat{j}_{J+1} - \sin\delta_{J\alpha}\hat{n}_{J+1})\right], \quad \epsilon_J(0) = 0.$$

Недостатком систем (4.11) и (4.12) является наличие в уравнениях для $t_{J\epsilon}(r)$ и $\epsilon_J(r)$ множителей $(t_{J\alpha}-t_{J\gamma})^{-1}$ и соответственно $\mathrm{Sin}^{-1}(\delta_{J\alpha}-\delta_{J\alpha})$, которые в некоторых точках r могут обращаться в нуль. Эта принципиальная трудность, присущая именно параметризации по Блатту–Биденхарну /10/, ограничивает область применения уравнений (4.11) и (4.12) случаем, когда разность фаз $\delta_{J\alpha}(r)-\delta_{J\gamma}(r)$ не меняет знака во всем интервале $0<r<\infty$.

Очень простые уравнения (4.8) для параметров Мак Хейла–Тэлера /9/ непригодны, если есть связанные состояния, так как тогда в некоторых точках функции $x_{J,J-1}(r)$, $x_{J,J+1}(r)$, $y_J(r)$ обращаются в бесконечность.

Свободным от описанных выше недостатков является выбор (nuclear bar) параметров $\bar{\delta}_{J,J-1}$, $\bar{\delta}_{J,J+1}$, $\bar{\epsilon}_J$, предложенных в работе Стаппа и др. /11/, и θ_J^{J+1}, ρ_J, θ_J^{J-1}, предложенных в работе Брейта и др. /12/. Оба набора параметров, по существу, эквивалентны, так как

$$\theta_J^{J-1}=\bar{\delta}_{J,J-1}, \quad \theta_J^{J+1}=\bar{\delta}_{J,J+1}, \quad \rho_J=\mathrm{Sin}\,2\bar{\epsilon}_J . \qquad (4.13)$$

Уравнения для фазовых функций, отвечающих новым параметрам, можно получить из (4.11) или (4.12), используя известные соотношения

$$\bar{\delta}_{J,J-1}+\bar{\delta}_{J,J+1}=\delta_{J\alpha}+\delta_{J\gamma},$$

$$\mathrm{Sin}\,2\bar{\epsilon}_J=\mathrm{Sin}\,2\epsilon_J\,\mathrm{Sin}(\delta_{J\alpha}-\delta_{J\gamma}), \qquad (4.14)$$

$$\mathrm{Cos}\,2\bar{\epsilon}_J\,\mathrm{Cos}(\bar{\delta}_{J,J-1}-\bar{\delta}_{J,J+1})=\mathrm{Cos}(\delta_{J\alpha}-\delta_{J\gamma}).$$

Удобнее исходить, однако, из уравнений (4.8). Связь параметров Мак Хейла–Тэлера с параметрами Стаппа следующая:

$$x_{J,J-1}=\frac{\mathrm{tg}\bar{\delta}_{J,J-1}+\mathrm{tg}^2\bar{\epsilon}_J\,\mathrm{tg}\bar{\delta}_{J,J+1}}{1-\mathrm{tg}^2\bar{\epsilon}_J\,\mathrm{tg}\bar{\delta}_{J,J-1}\,\mathrm{tg}\bar{\delta}_{J,J+1}}, \quad \mathrm{tg}\,2\bar{\delta}_{J,J-1}=\frac{2x_{J,J-1}+2x_{J,J+1}(x_{J,J-1}x_{J,J+1}-y_J^2)}{1-x_{J,J-1}^2+x_{J,J+1}^2-(x_{J,J-1}x_{J,J+1}-y_J^2)^2},$$

$$x_{J,J+1}=\frac{\mathrm{tg}\bar{\delta}_{J,J+1}+\mathrm{tg}^2\bar{\epsilon}_J\,\mathrm{tg}\bar{\delta}_{J,J-1}}{1-\mathrm{tg}^2\bar{\epsilon}_J\,\mathrm{tg}\bar{\delta}_{J,J-1}\,\mathrm{tg}\bar{\delta}_{J,J+1}}, \quad \mathrm{tg}\,2\bar{\delta}_{J,J+1}=\frac{2x_{J,J-1}+2x_{J,J+1}(x_{J,J-1}x_{J,J+1}-y_J^2)}{1-x_{J,J-1}^2+x_{J,J+1}^2-(x_{J,J-1}x_{J,J+1}-y_J^2)^2}, \qquad (4.15)$$

$$y_J=\frac{\mathrm{tg}\bar{\epsilon}_J}{\mathrm{Cos}\bar{\delta}_{J,J-1}\,\mathrm{Cos}\bar{\delta}_{J,J+1}(1-\mathrm{tg}^2\bar{\epsilon}_J\,\mathrm{tg}\bar{\delta}_{J,J-1}\,\mathrm{tg}\bar{\delta}_{J,J+1})}, \quad \mathrm{Sin}\,2\bar{\epsilon}_J=\frac{2y_J}{[(1+y_J^2-x_{J,J-1}x_{J,J+1})^2+(x_{J,J-1}-x_{J,J+1})^2]^{1/2}}.$$

Полученные в результате довольно длинных преобразований уравнения можно записать в виде:

$$\bar{\delta}'_{J,J-1}=-\frac{1}{k\,\mathrm{Cos}\,2\bar{\epsilon}_J}\,[V_{J,J-1}(\mathrm{Cos}^4\bar{\epsilon}_J\,P_{J-1}^2-\mathrm{Sin}^4\bar{\epsilon}_J\,Q_{J-1}^2)-V_{J,J+1}\mathrm{Sin}^2\bar{\epsilon}_J\,\mathrm{Cos}^2\bar{\epsilon}_J\,(P_{J+1}^2-Q_{J+1}^2)-$$

$$-2T_J\,\mathrm{Sin}\bar{\epsilon}_J\,\mathrm{Cos}\bar{\epsilon}_J\,(\mathrm{Cos}^2\bar{\epsilon}_J\,P_{J-1}Q_{J+1}-\mathrm{Sin}^2\bar{\epsilon}_J\,P_{J+1}Q_{J-1})],$$

$$\bar{\delta}'_{J,J+1}=-\frac{1}{k\,\mathrm{Cos}\,2\bar{\epsilon}_J}\,[V_{J,J+1}(\mathrm{Cos}^4\bar{\epsilon}_J\,P_{J+1}^2-\mathrm{Sin}^4\bar{\epsilon}_J\,Q_{J+1}^2)-V_{J,J-1}\mathrm{Sin}^2\bar{\epsilon}_J\,\mathrm{Cos}^2\bar{\epsilon}_J\,(P_{J-1}^2-Q_{J-1}^2)- \qquad (4.16)$$

$$-2T_J\,\mathrm{Sin}\bar{\epsilon}_J\,\mathrm{Cos}\bar{\epsilon}_J\,(\mathrm{Cos}^2\bar{\epsilon}_J\,P_{J+1}Q_{J-1}-\mathrm{Sin}^2\bar{\epsilon}_J\,P_{J-1}Q_{J+1})],$$

$$\bar{\epsilon}'_J=-\frac{1}{k}\,[T_J(\mathrm{Cos}^2\bar{\epsilon}_J\,P_{J-1}P_{J+1}+\mathrm{Sin}^2\bar{\epsilon}_J\,Q_{J-1}Q_{J+1})-V_{J,J-1}\mathrm{Sin}\bar{\epsilon}_J\,\mathrm{Cos}\bar{\epsilon}_J\,P_{J-1}Q_{J-1}-$$

$$-V_{J,J+1}\mathrm{Sin}\bar{\epsilon}_J\,\mathrm{Cos}\bar{\epsilon}_J\,P_{J+1}Q_{J+1}],$$

$$\bar{\delta}_{J,J-1}(0)=\bar{\delta}_{J,J+1}(0)=\bar{\epsilon}_J(0)=0.$$

Здесь введены для удобства записи следующие обозначения: $(L=J\mp 1)$

$$P_L=\mathrm{Cos}\,\bar{\delta}_{J,L}\,\hat{j}_L-\mathrm{Sin}\bar{\delta}_{J,L}\,\hat{n}_L,$$

$$Q_L=\mathrm{Sin}\,\bar{\delta}_{J,L}\,\hat{j}_L+\mathrm{Cos}\,\bar{\delta}_{J,L}\,\hat{n}_L. \qquad (4.17)$$

Несмотря на кажущуюся громоздкость выражений, система (4.16) проста и удобна для вычислений, так как уравнения содержат небольшое число однотипных элементов. Как уже отмечалось выше, эти уравнения пригодны и при наличии связанных состояний. Множитель $\mathrm{Cos}\,2\bar{\epsilon}_J$ в знаменателе первых двух уравнений системы (4.16) не приводит к трудностям, потому что значение $\mathrm{Cos}\,2\bar{\epsilon}_J=0$ отвечает предельному случаю максимального смешивания парциальных волн, когда амплитуда $L=J\mp 1$ волны во входном канале полностью переходит в амплитуду $L=J\pm 1$ в выходном канале. В реальных случаях (например, в нуклон–нуклонном рассеянии) несохранение орбитального момента, мерой которого является $\bar{\epsilon}_J$, невелико, так что $\mathrm{Cos}\,2\bar{\epsilon}_J\neq 0$.

Величина фазовых функций при малых r определяется поведением потенциалов при $r\to 0$. Так, например, если:

$$V_{J,J-1}(r) = V^{0}_{J,J-1}r^{s},\ V_{J,J+1}(r) = V^{0}_{J,J+1}r^{s},\ T_J(r) = T_J^{0}r^{s},\ s \geq -1, \tag{4.18}$$

то функции при $r\to 0$ имеют значения

$$\bar{\delta}_{J,J-1}(r) = x_{J,J-1}(r) = \delta_{J\alpha}(r) = t_{J\alpha}(r) = -\frac{V^{0}_{J,J-1}k^{2J-1}r^{2J+1+s}}{(2J+1+s)[(2J-1)!!]^2},$$

$$\bar{\delta}_{J,J+1}(r) = x_{J,J+1}(r) = -\frac{V^{0}_{J,J+1}k^{2J+3}r^{2J+5+s}}{(2J+5+s)[(2J+3)!!]^2}, \tag{4.18'}$$

$$\bar{\epsilon}_J(r) = y_J(r) = -\frac{T_J^{0}k^{2J+1}r^{2J+3+s}}{(2J+3+s)(2J-1)!!(2J+3)!!},$$

$$\delta_{J\gamma}(r) = t_{J\gamma}(r) = -\left[\frac{V^{0}_{J,J+1}}{2J+5+s} - \frac{T_J^{0\,2}}{V^{0}_{J,J-1}}\,\frac{2J+1+s}{(2J+3+s)^2}\right]\frac{k^{2J+3}r^{2J+5+s}}{[(2J+3)!!]^2},$$

$$\epsilon_J(r) = t_{J\epsilon}(r) = \frac{T_J^{0}}{V^{0}_{J,J-1}}\,\frac{(2J+1+s)k^2r^2}{(2J+3+s)(2J+1)(2J+3)}.$$

Если потенциалы $V_{J,J-1}(r)$ и $V_{J,J+1}(r)$ имеют отталкивательные сердцевины (1.3), начальными условиями для уравнений (4.8), (4.11), (4.12) будут:

$$x_{J,J-1}(r_o) = \operatorname{tg}\delta_{J\alpha}(r_o) = \frac{\hat{j}_{J-1}(kr_o)}{\hat{n}_{J-1}(kr_o)},\quad x_{J,J+1}(r_o) = \operatorname{tg}\delta_{J\gamma}(r_o) = \frac{\hat{j}_{J+1}(kr_o)}{\hat{n}_{J+1}(kr_o)},$$

$$y_J(r_o) = \operatorname{tg}\epsilon_J(r_o) = 0. \tag{4.19}$$

Начальные условия для уравнений (4.16) находятся из (4.19) с помощью соотношений (4.15).

До сих пор предполагалось, что потенциалы $V_{J,J-1}(r)$ и $V_{J,J+1}(r)$ удовлетворяют условиям (1.2), а $T_J(r)$ возрастает при $r\to 0$ не быстрее, чем $1/r$ [x]. Если $V_{J,J-1}$ и $V_{J,J+1}$ включают центральный кулоновский потенциал, то всюду в уравнениях (4.8), (4.11), (4.12), (4.16), (4.17) и в начальных условиях (4.19) надо произвести замену сферических функций Бесселя на кулоновские функции:

x) Вообще говоря, можно допустить $T(r) = 1/r^2$ при $r\to 0$; но тогда изменятся условия на коэффициенты при члене $\sim r^{-2}$ в потенциалах $V_{J,J-1}$ и $V_{J,J+1}$

$$\hat{j}_{J\pm1}(kr)\to F_{J\pm1}(kr,\eta),\ \hat{n}_{J\pm1}(kr)\to G_{J\pm1}(kr,\eta). \tag{4.20}$$

Полученные таким образом уравнения являются обобщением уравнений (3.3) и (3.4) на случай тензорных сил.

5. Тензорный потенциал и теория эффективного радиуса

Рассмотрение низкоэнергетического рассеяния в триплетном спиновом состоянии при наличии тензорных сил из-за связи различных парциальных волн значительно усложняется по сравнению со случаем рассеяния на сферически-симметричном потенциале. Ниже получаются уравнения для функций, отвечающих параметрам теории эффективного радиуса, позволяющие точным образом учесть влияние тензорного потенциала. Для получения этих уравнений удобнее всего исходить из системы (4.8). Как и в разделе 2, будем предполагать, что потенциалы $V_{J,J-1}(r)$, $V_{J,J+1}(r)$ и $T_J(r)$ являются короткодействующими, т.е. спадают при $r\to\infty$ быстрее любой степенной функции $r^{-\nu}$. Тогда можно записать следующие разложения [x]:

$$x_{J,J-1}(r,k) = -\frac{k^{2J-1}}{(2J-1)!!(2J-3)!!}\sum_{p=0}^{\infty}k^{2p}A_{Jp}(r),$$

$$y_J(r,k) = -\frac{k^{2J+1}}{(2J+1)!!(2J-3)!!}\sum_{p=0}^{\infty}k^{2p}B_{Jp}(r), \tag{5.1}$$

$$x_{J,J+1}(r,k) = -\frac{k^{2J+3}}{(2J+3)!!(2J+1)!!}\sum_{p=0}^{\infty}k^{2p}C_{Jp}(r).$$

Подставляя (5.1) в уравнения (4.8), находим следующую систему нелинейных уравнений для основных коэффициентов A_{J0}, B_{J0}, C_{J0} при произвольном значении J:

$$A'_{J0} = \frac{1}{2J-1}V_{J,J-1}(r^{J}-A_{J0}r^{-J+1})^2 - 2T_J(r^{J}-A_{J0}r^{-J+1})B_{J0}r^{-J-1} + (2J-1)V_{J,J+1}B_{J0}^2r^{-2J-2},$$

$$B'_{J0} = \frac{1}{(2J-1)(2J+3)}T_J(r^{J}-A_{J0}r^{-J+1})(r^{J+2}-C_{J0}r^{-J-1}) + T_J B_{J0}^2r^{-2J} -$$

$$-\frac{1}{2J-1}V_{J,J-1}(r^{J}-A_{J0}r^{-J+1})B_{J0}r^{-J+1} - \frac{1}{2J+3}V_{J,J+1}(r^{J+2}-C_{J0}r^{-J-1})B_{J0}r^{-2J+2}, \tag{5.2}$$

x) Факториальные множители в разложении (5.1) введены для того, чтобы избежать неудобных числовых коэффициентов в получаемых уравнениях (5.2).

Для потенциалов, имеющих при малых r вид (5.3), находим следующее поведение функций a, b, c $(r \to 0)$:

$$a_0 = \frac{V_1^0 r^{3+s}}{3+s}, \quad b_0 = \frac{T_0 r^{5+s}}{5(5+s)}, \quad c_0 = \frac{V_2^0 r^{7+s}}{5(7+s)};$$

$$a_1 = -\frac{V_1^0 r^{5+s}}{3(5+s)}, \quad b_1 = -\frac{T_0 r^{7+s}}{21(7+s)}, \quad c_1 = -\frac{V_2^0 r^{9+s}}{35(9+s)}, \tag{5.10}$$

$$a_2 = \frac{2V_1^0 r^{7+s}}{45(7+s)}, \quad b_2 = \frac{T_0 r^{9+s}}{225(9+s)}, \quad c_2 = \frac{4V_2^0 r^{11+s}}{2205(11+s)}.$$

В случае отталкивательной сердцевины, когда $T/V_1 = T/V_2 = 0$, $0 \le r \le r_o$, начальные условия для уравнений (5.7)–(5.9) определяются выражениями (4.19) и (2.7) и равны:

$$a_0(r_o) = r_o, \quad b_0(r_o) = 0, \quad c_0(r_o) = r_o^5,$$

$$a_1(r_o) = 1/3 r_o^3, \quad b_1(r_o) = 0, \quad c_1(r_o) = -\frac{5}{21} r_o^7, \tag{5.11}$$

$$a_2(r_o) = \frac{2}{15} r_o^5, \quad b_2(r_o) = 0, \quad c_2(r_o) = 0.$$

Соотношения (2.9) связывают функции $a_0(r)$, $a_1(r)$ и $a_2(r)$ с параметрами теории эффективного радиуса, определяемыми формулой (2.8), если в качестве S-фазы взять величину $\bar{\delta}_{1,0} = \theta_1^0$, разложение тангенса которой по степеням k совпадает с разложением $x_{1,0}$ (5.6), включая члены $\sim k^5$ x). Наличие тензорных сил приводит к тому, что для вычисления коэффициентов разложения $^3S_1$-фазы необходимо вместо системы (2.5) решать три системы уравнений (5.7)–(5.9), находя попутно коэффициенты разложения тангенса $^3D_1$-фазы.

Уравнения (5.2), (5.7)–(5.9) еще более усложняются, если система описываемая потенциалами $V_{J,J-1}(r')\theta(r-r')$, $V_{J,J+1}(r')\theta(r-r')$, $T_J(r')\theta(r-r')$ имеет связанное $^3S_1$ – состояние с примесью, конечно, $^3D_1$ – состояния (дейтон). В этом случае величина $a_0(r)$ в некоторой точке r_1, соответствующей появ-

x) Разложение $\mathrm{tg}\,\delta_{1\alpha}$ в ряд по степеням k отличается от разложений параметров $\mathrm{tg}\,\delta_{1,0}$ и $x_{1,0}$ коэффициентом при члене $\sim k^5$, что приводит к несколько отличному определению параметра формы P_0.

лению уровня с нулевой энергией связи, обращается в бесконечность. Ввиду связанности всех уравнений (5.7)–(5.9) то же самое происходит с остальными функциями a, b, c. Регуляризация уравнений может быть проведена методом, изложенным в разделе 2. Ниже обсуждаются результаты регуляризации уравнений (5.7) и (5.8). Вводятся новые функции $\alpha_0(r)$, $\beta_1(r)$, $\beta_0(r)$, $\gamma_0(r)$

$$a_0 = \mathrm{tg}\,\alpha_0,$$

$$b_0 = \beta_1 a_0 + \beta_0, \tag{5.12}$$

$$c_0 = 5\beta_1^2 a_0 + 5\beta_1\beta_0 + \gamma_0$$

и функции $A(r), B(r), C(r)$ x)

$$a_1 = A_2 a_0^2 + A_1 a_0 + A_0,$$

$$b_1 = A_2\beta_1 a_0^2 + (A_1\beta_1 + B_1)a_0 + (A_0\beta_1 + B_0), \tag{5.13}$$

$$c_1 = 5A_2\beta_1^2 a_0^2 + 5(A_1\beta_1 + 2B_1)\beta_1 a_0 + 5(A_0^2\beta_1^2 + B_1\beta_0 + B_0\beta_1 + C_0).$$

Уравнения, получаемые в результате регуляризации системы (5.7), имеют вид:

$$\alpha_0' = V_1(r\,\mathrm{Cos}\,\alpha_0 - \mathrm{Sin}\,\alpha_0)^2 - 2Tr^{-2}(r\,\mathrm{Cos}\,\alpha_0 - \mathrm{Sin}\,\alpha_0)(\beta_1\,\mathrm{Sin}\,\alpha_0 + \beta_0\,\mathrm{Cos}\,\alpha_0) + V_2 r^{-4}(\beta_1\,\mathrm{Sin}\,\alpha_0 + \beta_0\,\mathrm{Cos}\,\alpha_0)^2,$$

$$\beta_1' = Tr^{-2}\beta_1(r\beta_1 + \beta_0) - \frac{1}{5}Tr^{-2}(r^5 - \gamma_0) + V_1(r\beta_1 + \beta_0) - \frac{1}{5}V_2 r^{-4}\beta_1(r^5 - \gamma_0),$$

$$\beta_0' = Tr^{-2}\beta_0(r\beta_1 + \beta_0) + \frac{1}{5}Tr^{-1}(r^5 - \gamma_0) - V_1 r(r\beta_1 + \beta_0) - \frac{1}{5}V_2 r^{-4}\beta_0(r^5 - \gamma_0), \tag{5.14}$$

$$\gamma_0' = \frac{1}{5}V_2 r^{-4}(r^5 - \gamma_0)^2 - Tr^{-2}(r^5 - \gamma_0)(r\beta_1 + \beta_0),$$

$$\alpha_0(0) = \beta_1(0) = \beta_0(0) = \gamma_0(0) = 0.$$

Система (5.14) является обобщением уравнения (2.15). Хотя уравнения для функций β_1, β_0 и γ_0 нелинейны, они не приводят к бесконечностям, если нет, как предполагается, связанного уровня, отвечающего $^3D_1$-состоянию.

x) Надеемся, что эти обозначения не вызовут недоразумений из-за аналогичных обозначений в формулах (5.1)–(5.5).

Регуляризация системы (5.8) приводит к следующей системе линейных уравнений:

$$A_2' = V_1(2A_2 r + A_1 - r^2) + 2Tr^{-2}(A_2\beta_1 r - A_2\beta_0 + A_1\beta_1 + B_1 - \tfrac{1}{3}\beta_1 r^2) + V_2 r^{-4}\beta_1(-2A_2\beta_0 + A_1\beta_1 + 2B_1 + \tfrac{1}{3}\beta_1 r^2),$$

$$A_1' = 2V_1(-A_2 r^2 + A_0 + \tfrac{2}{3}r^3) + 2Tr^{-2}(2A_2\beta_0 r + 2A_0\beta_1 - B_1 r + B_0 - \tfrac{1}{3}\beta_0 r^2) + 2V_2 r^{-4}(-A_2\beta_0^2 + A_0\beta_1^2 + B_1\beta_0 + B_0\beta_1 + \tfrac{1}{3}\beta_1\beta_0 r^2),$$

$$A_0' = -V_1 r(A_1 r + 2A_0 + \tfrac{1}{3}r^3) + 2Tr^{-2}(A_1\beta_0 r + A_0\beta_0 - A_0\beta_1 r - B_0 r) + V_2 r^{-4}\beta_0(-A_1\beta_0 + 2A_0\beta_1 + 2B_0 + \tfrac{1}{3}\beta_0 r^2),$$

$$B_1' = V_1(B_1 r + B_0 - \beta_0 r^2 - \tfrac{2}{3}\beta_1 r^3) + Tr^{-2}(B_1\beta_0 + 2B_1\beta_1 r + B_0\beta_1 + C_0 - \tfrac{1}{3}\beta_1\beta_0 r^2 - \tfrac{1}{15}\gamma_0 r^2 + \tfrac{4}{35}r^7) + V_2 r^{-4}(\tfrac{1}{5}B_1\gamma_0 - \tfrac{1}{5}B_1 r^5 + C_0\beta_1 + \tfrac{1}{15}\beta_1\gamma_0 r^2 - \tfrac{2}{105}\beta_1 r^7), \qquad (5.15)$$

$$B_0' = V_1(-B_1 r^2 - B_0 r + \tfrac{2}{3}\beta_0 r^3 + \tfrac{1}{3}\beta_1 r^4) + Tr^{-2}(B_1\beta_0 r + B_0\beta_1 r + 2B_0\beta_0 - C_0 r - \tfrac{1}{3}\beta_0^2 r^2 - \tfrac{1}{21}r^8) + V_2 r^{-4}(+\tfrac{1}{5}B_0\gamma_0 - \tfrac{1}{5}B_0 r^5 + C_0\beta_0 + \tfrac{1}{15}\beta_0\gamma_0 r^2 - \tfrac{2}{105}\beta_0 r^7),$$

$$C_0' = -\tfrac{1}{5}V_2 r^{-4}(r^5 - \gamma_0)(2C_0 + \tfrac{1}{15}\gamma_0 r^2 + \tfrac{1}{35}r^7) - \tfrac{1}{5}Tr^{-2}(r^5 - \gamma_0)(B_1 r + B_0 - \tfrac{1}{3}\beta_0 r^2) + Tr^{-2}(\beta_1 r + \beta_0)(C_0 + \tfrac{1}{21}r^7).$$

$$A_2(0) = A_1(0) = A_0(0) = B_1(0) = B_0(0) = C_0(0) = 0.$$

Для потенциалов, имеющих вид (5.3), получаем, что при малых r

$$\alpha_0 = \frac{V_1^0 r^{3+s}}{3+s}, \quad \beta_1 = -\frac{T_0 r^{4+s}}{5(4+s)}, \quad \beta_0 = \frac{T_0 r^{5+s}}{5(5+s)}, \quad \gamma_0 = \frac{V_2^0 r^{7+s}}{5(7+s)},$$

$$A_2 = -\frac{V_1^0 r^{3+s}}{3+s}, \quad A_1 = \frac{4V_1^0 r^{4+s}}{3(4+s)}, \quad A_0 = -\frac{V_1^0 r^{5+s}}{3(5+s)}, \qquad (5.16)$$

$$B_1 = \frac{4T_0 r^{6+s}}{35(6+s)}, \quad B_0 = -\frac{T_0 r^{7+s}}{21(7+s)}, \quad C_0 = -\frac{V_2^0 r^{9+s}}{175(9+s)}.$$

Если имеется отталкивательная сердцевина, то начальные условия для уравнения (5.14) и (5.15) имеют вид:

$$\alpha_0(r_0) = \operatorname{arctg} r_0, \quad \beta_1(r_0) = \beta_0(r_0) = 0, \quad \gamma_0(r_0) = r_0^5,$$

$$A_2(r_0) = \tfrac{1}{2} r_0, \quad A_1'(r_0) = 0, \quad A_0(r_0) = -\frac{1}{6} r_0^3, \qquad (5.17)$$

$$B_1(r_0) = B_0(r_0) = 0, \quad C_0(r_0) = -\frac{1}{21} r_0^7.$$

6. Заключение

Рассмотренные выше методы вычисления фаз и других параметров рассеяния могут оказаться очень полезным в ряде конкретных численных расчетов.

Так, например, при вычислении фазовых сдвигов для упругого нуклон-нуклонного рассеяния, когда существенную роль играют нецентральные, в том числе тензорные, силы, очень удобны уравнения (4.16) для параметрических функций $\bar{\delta}_{J,J-1}, \bar{\delta}_{J,J-1}, \bar{\epsilon}_J$. Эти параметры являются, кроме того, наиболее употребительными в настоящее время при фазовом анализе экспериментальных данных /11,12/. Как уже отмечалось выше, в разделе 4, система уравнений (4.16) имеет то преимущество перед системами (4.8) и (4.12), что она пригодна для описания рассеяния в любых, в частности, имеющих связанные уровни, состояниях двух нуклонов (или других частиц со спином 1/2). Поэтому уравнения (4.16) могут использоваться также при решении обратной задачи рассеяния, когда параметры потенциала подбираются из сравнения вычисленных фазовых сдвигов с экспериментальными. В процессе автоматического поиска возможны такие промежуточные наборы параметров, когда не только в $^3S_1 + {}^3D_1$ -состоянии, но и в других состояниях могут появляться связанные уровни, а разность фаз для $L = J \mp 1$ амплитуд может иметь произвольное значение. С другой стороны, если заранее известно, что данный потенциал не содержит связанных состояний, удобно использовать более простые уравнения (4.8).

Важность точного учета кулоновского взаимодействия и тензорных сил может быть проиллюстрирована также на примере нуклон-нуклонного рассеяния при низких энергиях. Действительно, решение вопроса о зарядовой независимости ядерных сил требует точного расчета длин рассеяния, эффективных радиусов и т.п. для случаев протон-протонного (pp) и нейтрон-протонного (np) -взаимодействия. Как известно, длины рассеяния в этом случае очень чувствительны к малым вариациям потенциалов.

Уравнение (3.16) и соотношения (3.15), (3.15') позволяет точным образом учесть кулоновский потенциал при вычислении длины рассеяния, эффективного радиуса и параметра формы в $^1S_0$ - pp -рассеянии. При этом отпадает необходимость пользоваться приближенной оценкой (3.17) влияния кулоновского взаимодействия на величину длины рассеяния. Уравнения (5.14) и (5.15) дают возможность точного расчета длины рассеяния и эффективного радиуса для np -рассеяния в $^3S_1 + {}^3D_1$ -состоянии, когда осложняющими обстоятельствами являются тензорные силы и наличие связанного состояния (дейтон). Параметры низкоэнергетического $^1S_0$ np - и nn -рассеяния могут быть вычислены (предполагая, что нет связанного состояния двух нейтронов) с помощью более простых уравнений (2.5) и (2.9).

Ясно, что приведенные в предыдущих разделах методы могут применяться также к описанию потенциального рассеяния других частиц (например, нуклона на антинуклоне).

Можно надеяться, что дальнейшее обобщение метода фазовых функций, в частности на случай комплексных потенциалов, позволит развить удобный метод вычисления фаз в оптической модели ядерных взаимодействий, в том числе для неупругого рассеяния нуклона на нуклоне.

Литература

1. Г.Ф.Друкарев. ЖЭТФ, 19, 247 (1949).
2. F.Calogero. Nuovo Cimento, 27, 261 (1963).
3. B.R.Levy and J.B.Keller, J.Math. Phys. 4, 54 (1963).
4. R.F.Dashen. J.Math. Phys. 4, 388 (1963).
5. M.H.Hull and G.Breit in Handbuch der Physik. v.41/1 p. 418, Springer-Verlag. 1959.
6. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.
7. J.D.Jackson and J.M.Blatt. Revs. Mod. Phys. 22, 77 (1950).
8. Л.Хюльтен, М.Сугавара в сб. "Строение Атомного ядра". ИИЛ, М., 1959.
9. J.L.McHale and R.M.Thaler. Phys. Rev. 98, 273 (1955).
10. J.M.Blatt and L.C.Biedenharn. Phys. Rev. 86, 399, (1952).
11. H.P.Stapp, T.J.Ypsilantis and N.Metropolis. Phys. Rev. 105, 302 (1957).
12. G.Breit, M.H.Hull, K.E.Lassila and K.D.Pyatt. Phys. Rev. 120, 2227 (1960).

Рукопись поступила в издательский отдел
23 июня 1964 г.