

0324.1a

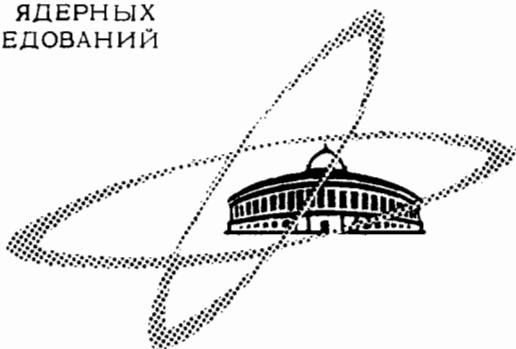
Ш-64

4/IX-64.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P-1719



М.И. Широков

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

СКОРОСТЬ ПЕРЕДАЧИ ВОЗБУЖДЕНИЯ  
В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

1964

P-1719

М.И. Широков

СКОРОСТЬ ПЕРЕДАЧИ ВОЗБУЖДЕНИЯ  
В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

2609/3 чр.



## А н н о т а ц и я

Решается квантово-электродинамическая задача об обмене возбуждением между двумя атомами, разделенными расстоянием  $R$ . При  $t=0$  атом А возбужден; атом В не возбужден; фотонов нет. Находится вероятность  $w(t)$  того, что в момент  $t$  атом В окажется возбужденным. В противоречие с теорией относительности  $w(t)$  оказывается не равной нулю в интервале времен  $(0, R/c)$ , приобретая заметную величину в интервале  $(R/c - \lambda/c, R/c + \lambda/c)$  длиной порядка периода  $\lambda/c$  кванта, которым обмениваются атомы. Такой результат является следствием неисчезновения "причинной" функции распространения фотона  $D_0^c(x)$  вне светового конуса. Обсуждается возможность постановки соответствующего опыта. Если длина волны  $\lambda$  обменного излучения  $> 1$  м, то оказывается возможным "приготовить" начальное состояние достаточно быстро, чтобы можно было говорить о том или ином поведении  $w(t)$  в интервале длиной  $\lambda/c$ . Основная трудность опыта, по-видимому, заключается в малости абсолютной величины  $w(t)$  в этих условиях.

Обсуждаются некоторые возможные теоретические возражения по поводу изложенного расчета и предлагаемого опыта.

## A b s t r a c t

The quantum electrodynamic problem about excitation exchange between two atoms is solved. The atoms are separated by the distance  $R$ . Initially, at  $t=0$  atom A is excited, atom B is not, electromagnetic quanta are absent. The probability  $w(t)$  is calculated that B at later moment  $t$  is excited. In contradiction with the theory of relativity  $w(t)$  is found to be nonvanishing in time interval  $(0, R/c)$  assuming an appreciable value in the interval  $(R/c - \lambda/c, R/c + \lambda/c)$  whose length is of the order of the period  $\lambda/c$  of the exchange photon. Such a result is the consequence of nonvanishing of the "causal" function  $D_0^c(x)$  out of the light cone. The project of the corresponding experiment is discussed. It appears, that if wave length  $\lambda$  of the exchange radiation is of the order of a meter, one can "prepare" initial state fairly quickly for being able to speak about one or another behaviour of  $w(t)$  in an interval of the length  $\lambda/c$ . The main experimental difficulty seems to consist in the smallness of the absolute values of  $w(t)$  under these conditions. Old solutions of this problem are discussed as well as some possible theoretical objections concerning the present calculations and the proposed experiment.

## В в е д е н и е

В § 1 работы излагается решение задачи о передаче возбуждения в первом исчезающем приближении старой (нековариантной) теории возмущений. Такое введение необходимо для обсуждения старых расчетов этой задачи, см., например, /1,2/.

В § 2 будет дано решение в том же приближении новой (ковариантной) формы теории возмущений. В этой форме возможно несколько способов расчета. С помощью наиболее простого из них оказывается возможным учесть затухание в точном вычислении амплитуды перехода, изложенном в § 3. Уточняется приближение, в котором получен результат в старых расчетах. Показывается, что введение затухания не влияет качественно на основной результат — неисчезновение  $w(t)$  до времени  $R/c$ .

В этих расчетах принимается кулоновская калибровка. Роль мгновенного кулоновского взаимодействия, явно появляющегося в этой калибровке, обсуждается в § 4.

В связи с полученным результатом в § 5 обсуждаются работы Ма и др., в которых был получен противоположный вывод о каузальности взаимодействия посредством функции  $D_0^c(x)$ .

На основе изложенного в §§ 2 и 3 расчета в § 6 предлагаются 2 варианта опыта по обнаружению непричинного поведения  $w(t)$ .

При обсуждениях этого опыта часто выдвигались некоторые теоретические возражения. Изложение этих возражений и ответы на них см. в § 7.

### § 1. Обмен возбуждением по старой теории возмущений

Пусть вначале атом  $A$  находится в состоянии с энергией  $E_{2A}$ , атом  $B$  — в состоянии  $E_{1B}$ . Будем вычислять вероятность перехода атомов в состояния  $E_{1A}$  и  $E_{2B}$  соответственно. Для упрощения формул положим, что  $E_{2A} - E_{1A} = E_{2B} - E_{1B} \equiv \Delta$  так что энергии начального состояния  $A^*B$  и состояния  $AB^*$  одинаковы. В значительной части изложения под словом "атом" можно понимать некоторую квантово-механическую систему, которая может излучать и поглощать фотоны (т.е. собственно атом, молекула и т.д.). Там, где будут нужны более конкретные формулы и численные оценки, мы имеем в виду атом водорода.

Процесс обмена возбуждением через виртуальный фотон происходит во втором порядке нестационарной теории возмущений (см. <sup>13/</sup>, § 29). Амплитуда вероятности найти в момент  $t$  состояние  $AB^*$ , если при  $t=0$  состояние было  $A^*B$ , равна

$$a_{AB^*}(t) = S_n \frac{\langle AB^* | H' | n \rangle \langle n | H' | A^* B \rangle}{E_n - E_0} \left[ \frac{e^{i(E-E_0)t} - 1}{E - E_0} - \frac{e^{i(E-E_n)t} - 1}{E - E_n} \right] \quad (1.1)$$

Здесь  $E$  обозначает энергию состояния  $AB^*$ ,  $E_0$  - состояния  $A^*B$ . По предположению, они равны:  $E = E_{2B} + E_{1A} = E_{2A} + E_{1B} = E_0 + E_n$  - энергия промежуточного состояния  $n$ .  $S_n$  обозначает суммирование по двум промежуточным состояниям:

I.  $A$ ,  $B$  и один фотон с импульсом  $\hbar \vec{k}$  и поляризацией  $\epsilon$ ,  $E_n = E_{1A} + E_{1B} + \hbar c k$ .

II.  $A^*$ ,  $B^*$  и один фотон  $\hbar \vec{k}$ ,  $\epsilon$ ;  $E_n = E_{1A} + E_{1B} + 2\Delta + \hbar c k$ . Кроме этого, конечно, подразумевается интегрирование по всем  $\vec{k}$  и суммирование по поляризациям фотона  $\epsilon$ . Индексы  $AB^*$ ,  $n$ ,  $A^*B$  помимо энергий состояний включают в себя орбитальные моменты атомов, их проекция и т.п.

Матричные элементы гамильтониана взаимодействия  $H'$  имеют вид (см. <sup>13/</sup> (50,9)):

$$\langle A B^* | H' | AB \rangle = - \left( \frac{e}{m c} \right) L^{3/2} \sqrt{\frac{2\pi \hbar c}{k}} \int w_B^* (\vec{x}_B) e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}_B} (\vec{\epsilon} \cdot \vec{p}) w_B (\vec{x}_B) d^3 x_B. \quad (1.2)$$

Волновые функции атома  $A$  комбинируются в нормировочный интеграл, равный единице. Будем считать, что центр атома  $A$  помещен в начале координат, а центр  $B$  - в точке  $\vec{R}$ . Тогда волновая функция  $B$  заметно отлична от нуля только в области порядка размера атома  $a_0$ , так что  $\vec{x}_B \approx \vec{R}$ . Виртуальные фотоны с энергией, много большей  $\Delta$ , вносят малый вклад в  $a_{AB^*}(t)$  (см. далее формулу (1.3)). При тех  $\Delta$ , которые нам будут нужны, мы поэтому вправе применить дипольное приближение: заменять  $e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}_B}$  на  $e^{i \vec{k} \cdot \vec{R}}$ , пренебрегая величиной порядка  $a_0 \Delta / \hbar c$  по сравнению с 1. Используя еще соотношение (35,20) из <sup>13/</sup>, можем привести (1.1) к виду

$$a_{AB^*}(t) = - \frac{\alpha \Delta^2}{(2\pi)^2} \iiint k dk d\Omega \sum_{\epsilon} (\vec{\epsilon} \cdot \vec{d}_A) (\vec{\epsilon} \cdot \vec{d}_B). \quad (1.3)$$

$$\cdot \left\{ e^{i \vec{k} \cdot \vec{R}} \left[ i t + \frac{e^{-i(k-\Delta)t} - 1}{k - \Delta} \right] \cdot \frac{1}{k - \Delta} + e^{-i \vec{k} \cdot \vec{R}} \left[ i t + \frac{e^{-i(k+\Delta)t} - 1}{k + \Delta} \right] \cdot \frac{1}{k + \Delta} \right\}.$$

х) Это промежуточное состояние кажется странным, но оно вносит ненулевой вклад (ср. <sup>13/</sup>, § 50 "Анализ дифракционного опыта" и <sup>14/</sup>, § 24). В <sup>11,2/</sup> оно не учитывается.

В этой формуле и в дальнейшем используется система единиц, в которой  $\hbar$  и  $c$  численно равны 1 (постоянная  $c$  иногда будет применяться для обозначения размерности);  $\alpha = 1/137$ .  $\sum_{\epsilon}$  означает суммирование по двум возможным направлениям поляризации промежуточного поперечного фотона:

$$\sum_{\epsilon} \epsilon_i \epsilon_j = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2, \quad (1.4)$$

$\vec{d}_A$  означает матричный элемент координаты между состояниями  $A^*$  и  $A$ , у  $\vec{d}_B$  — смысл аналогичный. Для атома водорода

$$(\vec{\epsilon} \vec{d}) = (\vec{\epsilon} \vec{d}_{nlm}^{nlm'}) = \int w_n^* \mathcal{E}_{lm'}(\vec{x})(\vec{\epsilon} \vec{x}) w_{nlm}(\vec{x}) d^3x. \quad (1.5)$$

Выполним в (1.3) суммирование по  $\vec{\epsilon}$  с помощью (1.4) и возьмем затем интеграл по  $d\Omega$ :

$$a_{AB^*}(t) = -i \frac{\alpha \Delta^2}{(2\pi)^2} 4\pi \sqrt{\pi/2} \int_0^\infty \frac{k dk}{\sqrt{kR}} \cdot \left\{ \left[ t + \frac{e^{-i(k-\Delta)t}}{i(k-\Delta)} \right] \frac{1}{k-\Delta} + \left[ t + \frac{e^{-i(k+\Delta)t}}{i(k+\Delta)} \right] \frac{1}{k+\Delta} \right\}. \quad (1.8)$$

$$\left\{ (\vec{d}_A \vec{d}_B) \left[ \frac{2}{3} J_{3/2}(kR) - \frac{1}{3} J_{5/2}(kR) \right] - \frac{(\vec{d}_A \vec{R})(\vec{d}_B \vec{R})}{R^2} J_{5/2}(kR) \right\}$$

Здесь  $J_{3/2}(kR)$  и  $J_{5/2}(kR)$  — функции Бесселя. Задача теперь сведена к вычислению интегралов по  $k$ . В [1,2] предполагалось, что главный вклад в интеграл дают  $k$ , примерно равные  $\Delta$ . Поэтому там считалось, что не допуская большой ошибки, можно распространить интегрирование по  $k$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В этом приближении член  $\left[ t + \frac{\exp(-i(k+\Delta)t) - 1}{i(k+\Delta)} \right] \frac{1}{k+\Delta}$  вообще вклада не дает.

Кроме этого  $J_{1/2}$  и  $J_{5/2}$  заменялись их асимптотическими приближениями  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin kR}{\sqrt{kR}}$  и  $-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin kR}{\sqrt{kR}}$ , верными при больших  $kR$ . После этого  $a_{AB^*}(t)$  вычисляется просто:

$$a_{AB^*}(t) = -i \frac{\alpha \Delta^2}{\pi} \frac{1}{R} \left[ (\vec{d}_A \vec{d}_B) + \frac{(\vec{d}_A \vec{R})(\vec{d}_B \vec{R})}{R^2} \right] \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[ t + \frac{e^{-i(k-\Delta)t} - 1}{i(k-\Delta)} \right] \frac{\sin kR}{k-\Delta} = \quad (1.7)$$

$$= -i \frac{\alpha \Delta^2}{\pi R} \left[ (\vec{d}_A \vec{d}_B) + \frac{(\vec{d}_A \vec{R})(\vec{d}_B \vec{R})}{R^2} \right] \left[ -\pi e^{iR\Delta} (t-k) \cdot \theta(t-R) \right].$$

Можно воспользоваться формулами 3.721.1, 3.741.3 и 3.786.3 в [5]. Как обычно,  $\theta(t-R) = 0$  при  $t-R < 0$  и равно 1 при  $t-R > 0$ .

Получается, что  $a_{AB^*}(t) = 0$  вплоть до момента  $R/c$ , что находится в согласии с теорией относительности. В дальнейшем, когда интегралы в (1.8) будут

взяты точно, мы детальной охарактеризуем приближение, в котором справедлив этот результат.

Заметим уже сейчас, что в работе /8/ ошибочно считается, что интегрирование по энергии фотона с самого начала ведется от  $-\infty$  до  $+\infty$ , что и приводит Гайтлера к утверждению, что  $a_{AB^*}(t)$  точно равна нулю в интервале  $(0, R/c)$ . (См. /4/, конец § 20, где цитирована литература по рассматриваемой задаче).

## § 2. Решение задачи по новой теории возмущений

Амплитуду  $a_{AB^*}(t)$  можно представить как матричный элемент от оператора  $\hat{U}(t, 0)$ , описывающего временное развитие системы:

$$a_{AB^*}(t) = \langle AB^* | \hat{U}(t, 0) | A^*B \rangle \quad (2.1)$$

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}(t, 0) = \hat{H}_{B3}(t) \hat{U}(t, 0).$$

$H_{B3}$  - гамильтониан взаимодействия в картине взаимодействия. При этом в соответствующий свободный гамильтониан мы включаем потенциалы, связывающие электроны в атомах А и В или ионы в молекулах и т.п.  $x$ ) (см. /7/, § 27 и /8/, гл. 15, § 7 (картина Фарри)).

В формализме S-матрицы,  $S=U(+\infty, -\infty)$ , используется лорентцовская калибровка, в которой теория имеет ковариантный вид (формализм Гупта-Блейлера). Известное дополнительное условие Лорентца в классе задач со свободными электронами в начальном и конечном состояниях выполняется автоматически (см. /4/, § 13, /9/). В задачах со связанными зарядами учет этого условия сложен. Мы выбираем такую формулировку электродинамики, в которой не нужно накладывать и учитывать дополнительных условий такого рода, а именно формулировку Новобатского-Балатина, близкую к кулоновской калибровке. В так называемом ковариантном ее виде, изложенном в /10/, гл. 6, 4, используется внешний по отношению к исследуемой системе временно-подобный вектор  $n_\mu$ , от конкретного выбора которого результаты не зависят. Мы примем, что  $n_\mu = (1, 0, 0, 0)$ . Гамильтониан  $H_{B3}$  описывает взаимодействие электронов в А и В с поперечным полем излучения и их кулоновское взаимодействие

$$H_{B3} = H' + H_c =$$

$$= - \int j^\mu(x) b_\mu(x) d^3x + \frac{e^2}{2} \int \frac{j_0(x) j_0(x')}{|x-x'|} d^3x d^3x'. \quad (2.2)$$

х) Конечно, кулоновское взаимодействие электрона атома А с ядром атома В не учитывается. Этот потенциал примерно в  $R/a_0$  раз меньше потенциала, связывающего электрон со своим ядром. Вероятность вызываемого им обмена возбуждением тоже мала, см. примечание на стр. 14.

Операторы  $b_\mu$  связаны с напряженностями электромагнитного поля, причем  $b_0 = 0$  и  $\partial^\mu b_\mu = \partial^j b_j = 0$ . Поперечные кванты (кванты поля  $b_\mu$ ) имеют такую причинную функцию распространения  $D_{\mu\nu}^0(x-y) = \langle T b_\mu(x) b_\nu(y) \rangle_0$ :

$$D_{1_0}^0(x) = (\delta_{1_0} - \partial_1 \partial_0 / \hat{\Delta}) D_0^0(x) \quad (2.3)$$

$$D_{0_0}^0 = D_{1_0}^0 = D_{00}^0 = 0, \quad \hat{\Delta} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2,$$

что соответствует соотношениям (6.88), (6.89) в /10/ при  $n_\mu = (1,0,0,0)$ .

Кулоновское взаимодействие  $H_0$  мы рассмотрим отдельно в § 4. Здесь будет обсуждаться только часть амплитуды перехода, обязанная обмену поперечным квантом (как и в предыдущем параграфе).

Поскольку у нас отсутствуют фотоны в начальном и конечном состояниях, то из  $\hat{U}(t,0)$  можно выделить оператор, связывающий именно такие состояния в  $e^2$ -приближении, так же, как это сделано в § 37 в /7/:

$$\hat{U}_0^\wedge(t,0) = -\frac{1}{2} \iint j_1(x) D_{1_0}^0(x-y) j_0(y) d^4x d^4y \quad (2.4)$$

(интегрирование по временам  $y_0$  и  $x_0$  в пределах от 0 до  $t$ ).

Входящие в токи операторы электронного поля раскладываются по собственным функциям нашего гамильтониана  $H_0$ . В случае атома водорода - это связанные состояния и кулоновские волновые функции сплошного спектра.

$$a_{AB}^\wedge(t) = \langle AB^* | \frac{e^2}{2} \iint N[\bar{\psi}(x) \gamma_1 \psi(x)] D_{1_0}^0(x-y) N[\bar{\psi}(y) \gamma_0 \psi(y)] | A^*B \rangle = \quad (2.5)$$

$$= e^2 \iint w_{B^*}^*(x) \alpha_1 w_B(x) D_{1_0}^0(x-y) w_A^*(y) \alpha_0 w_A(y) d^4x d^4y -$$

- обменный член.

Обменный член очень мал при  $R \gg a_0$  (перекрывание волновых функций электронов в этом случае ничтожно). Операторы  $\psi(x)$  в (2.5) уничтожают электрон в состоянии  $w_B(x)$  и рождают его в состоянии  $w_{B^*}(x)$ . Эти состояния имеют обычную зависимость от времени, свойственную состояниям с положительной энергией:

$$w_B(x) \equiv w_B(\vec{x}, x_0) = e^{-iE_B x_0} w_B(\vec{x}). \quad (2.6)$$

Аналогичную зависимость имеем для  $w_{B^*}$ ,  $w_A$  и  $w_{A^*}$ .

В результате излучения норма состояния  $w_{A^*}$  уменьшается со временем (причем это излучение, в основном, не "перехватывается" атомом В). Этот факт обычно учитывается введением мнимой добавки к энергии стационарного состояния. Будем



считать, что у каждого уровня есть своя ширина и все равенства типа (2.6) имеют вид (ср. <sup>14/</sup>, § 18):

$$w_B(x) = e^{-1E_1 B x_0 - \gamma_1 B x_0} w_B(\vec{x}). \quad (2.7)$$

Будем считать, что  $\gamma_{2A} + \gamma_{1A} = \gamma_{2B} + \gamma_{1B} = \gamma$ .

Покажем, что при вычислении (2.5) можно использовать нерелятивистское приближение, заменяя  $a_1$  на  $-p_1/m$  (см. <sup>13/</sup>, § 50), и дипольное приближение, сводящееся к замене  $D_{10}^{(+)}$  ( $\vec{x} - \vec{y}$ ,  $x_0 - y_0$ ) на  $D_{10}^{(+)}$  ( $\vec{R}$ ,  $x_0 - y_0$ ).

Пользуясь представлением (ср. <sup>17/</sup>, § 17,3)

$$i D_{10}^{(+)}(x-y) = \theta(x_0 - y_0) D_{10}^{(+)}(x-y) + \theta(y_0 - x_0) D_{10}^{(+)}(y-x) \quad (2.8)$$

$$D_{10}^{(+)}(x-y) = \frac{-1}{2i(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{k} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y}) - k(x_0 - y_0)} \left( \delta_{10} - \frac{k_1 k_0}{k^2} \right),$$

получаем из (2.5):

$$a_{AB}(t) = \frac{-e^2}{2(2\pi)^3} \sum_{10} \int d^3 x w_{B_0}^*(\vec{x}) a_1 w_B(\vec{x}) \int d^3 y w_{A_0}^*(\vec{y}) a_0 w_A(\vec{y}) \int \frac{d^3 k}{k} \cdot \quad (2.9)$$

$$\left\{ \int_0^t dx_0 \int_0^{x_0} dy_0 e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y}) - k(x_0 - y_0)} \right\} + \left\{ \int_0^t dy_0 \int_0^y dx_0 e^{i\vec{k}(\vec{y}-\vec{x}) - k(y_0 - x_0)} \right\} \cdot$$

$$\left[ \delta_{10} - \frac{k_1 k_0}{k^2} \right] \cdot e^{i\Delta x_0 - \gamma x_0} e^{-i\Delta y_0 - \gamma y_0}$$

Принтегрируем (2.9) по  $x_0$  и  $y_0$  (перемена порядка интегрирования оправдывается так же, как при доказательстве равенства Парсевала в теории интегрального преобразования Фурье):

$$a_{AB}(t) = \frac{-e^2}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{k} \sum_{10} \left( \delta_{10} - \frac{k_1 k_0}{k^2} \right) \cdot$$

$$\frac{1}{i(k - \Delta - i\gamma)} \left[ \frac{e^{-2\gamma t} - 1}{-2\gamma} + \frac{e^{-i(k-\Delta)t - \gamma t} - 1}{i(k-\Delta) + \gamma} \right] \int d^3 x w_{B_0}^*(\vec{x}) a_1 e^{i\vec{k}\vec{x}} w_B(\vec{x}) \cdot \quad (2.10)$$

$$\int d^3 y w_{A_0}^*(\vec{y}) e^{-i\vec{k}\vec{y}} a_0 w_A(\vec{y}) +$$

$$+ \frac{1}{i(k + \Delta + i\gamma)} \left[ \frac{e^{-2\gamma t} - 1}{-2\gamma} + \frac{e^{-i(k+\Delta)t - \gamma t} - 1}{i(k+\Delta) + \gamma} \right] \int d^3 x w_{B_0}^*(\vec{x}) a_1 e^{-i\vec{k}\vec{x}} w_B(\vec{x}) \cdot$$

$$\cdot \int d^3 y w_{A_0}^*(\vec{y}) a_0 e^{i\vec{k}\vec{y}} w_A(\vec{y}) \cdot \left\{ \right.$$

Как видно, основной вклад в интеграл по  $k$  вносят  $k$ , не на много отличающиеся от  $\Delta$ . При условии  $a_0 \Delta \ll 1$  мы можем заменить  $e^{\pm i \vec{k} \vec{r}}$  на  $e^{\pm i \vec{k} \vec{R}}$ , а  $e^{\pm i \vec{k} \vec{r}}$  на 1. Пропуская обратные преобразования от (2.10) к (2.5), получим в (2.5)  $D_{1_0}^{\circ}(\vec{R}, \vec{x}_0 - \vec{y}_0)$  вместо  $D_{1_0}^{\circ}(\vec{x} - \vec{y}, \vec{x}_0 - \vec{y}_0)$ . Далее, условие  $a_0 \Delta \ll 1$  эквивалентно условию  $v_e/c$ , где  $v_e$  - скорость электрона в атоме. Поэтому матричные элементы от  $a_+$  и  $a_-$ , фигурирующие в (2.10), можно вычислять в нерелятивистском приближении: они равны  $i \Delta d_B^{\dagger}$  и  $i \Delta d_A^{\circ}$  соответственно (см. § 1). Учитывая, что в этом параграфе использована система единиц Хевисайда-Лоренца, в связи с чем  $e^2/4\pi = \alpha = 1/137$ , убеждаемся, что (2.10) в пределе  $\gamma \rightarrow 0$  переходит в формулу (1.3), полученную с помощью старой теории возмущений. Странное промежуточное состояние II появляется в новой теории возмущений автоматически, как и область интегрирования по  $k$  от 0 до  $\infty$  (см. замечание в конце § 1).

### § 3. Точные вычисления и анализ результата

После приближений, изложенных в конце предыдущего параграфа, формула (2.5) превращается в

$$a_{AB^*}(t) = -e^2 \Delta^2 \sum_{1_0} d_B^{\dagger} d_A^{\circ} \int_0^t dx_0 \int_0^t dy_0 e^{i \Delta x_0 - \gamma x_0} e^{-i \Delta y_0 - \gamma y_0} D_{1_0}^{\circ}(\vec{R}, \vec{x}_0 - \vec{y}_0). \quad (3.1)$$

Для наших целей будет достаточно вычислить только часть полной вероятности обмена возбуждением. Пусть атомы  $A^*$  и  $B$  были неполяризованы и поляризация  $A$  и  $B^*$  не измеряется. Тогда полная вероятность в случае нерелятивистского атома водорода получается путем усреднения и суммирования  $\frac{1}{s} \sum$  квадрата модуля  $a_{AB^*}(t)$  по проекциям орбитального момента (состояний 1 и 2). Исходя из (1.5), можно показать, что

$$\sum_{m_A^*, m_A} d_A^{\circ} (d_A^n)^* = A^2 \delta_{nn} \quad (3.2)$$

$A^2$  пропорционально квадрату радиального интеграла  $R_{n_A^* n_A}^{\dagger} \ell_A$  (см. /11/, § 63). Аналогично

$$\sum_{m_B^*, m_B} d_B^{\dagger} (d_B^m)^* = B^2 \delta_{mm} \quad (3.3)$$

Поэтому в полной вероятности  $w(t) = \frac{1}{s} \sum |a_{AB^*}(t)|^2$  появляется выражение:

$$\begin{aligned} & \sum_{1_0} D_{1_0}^{\circ}(\vec{R}, \vec{x}_0 - \vec{y}_0) D_{1_0}^{*\circ}(\vec{R}, \vec{x}'_0 - \vec{y}'_0) = \\ & = (1 + (\vec{\partial} \vec{\partial}')^2 / \hat{\Delta} \hat{\Delta}') D_{1_0}^{\circ}(\vec{R}, \vec{x}_0 - \vec{y}_0) D_{1_0}^{*\circ}(\vec{R}', \vec{x}'_0 - \vec{y}'_0) \Big|_{R=R'} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\vec{\partial} = \left\{ \frac{\partial}{\partial R_x}, \frac{\partial}{\partial R_y}, \frac{\partial}{\partial R_z} \right\}, \quad \vec{\partial}' = \left\{ \frac{\partial}{\partial R'_x}, \frac{\partial}{\partial R'_y}, \frac{\partial}{\partial R'_z} \right\}, \quad \hat{\Delta}' = (\vec{\partial}' \cdot \vec{\partial}'),$$

ввиду чего  $w(t)$  можно представить в виде

$$w(t) = \frac{1}{s} \sum_{m_A, m'_A, m_B, m'_B} |a_{AB}(t)|^2 = \frac{1}{s} (\alpha A B \Delta^2)^2 \cdot \left\{ 4\pi \int_0^t dx_0 \int_0^t dy_0 e^{i\Delta x_0 - \gamma x_0} e^{-i\Delta y_0 - \gamma y_0} D_0^{\circ}(\vec{R}, x_0 - y_0) \right\}^2 + \sum_{i_e} \left\{ 4\pi \int_0^t dx_0 \int_0^t dy_0 e^{i\Delta x_0 - \gamma x_0} e^{-i\Delta y_0 - \gamma y_0} \partial_i \partial_e \hat{\Delta}' D_0^{\circ}(\vec{R}, x_0 - y_0) \right\}^2. \quad (3.5)$$

Мы вычислим только первое из двух положительных слагаемых в (3.5), т.е. интеграл

$$I_Y = 4\pi \int_0^t dx_0 \int_0^t dy_0 e^{i\Delta x_0 - \gamma x_0} e^{-i\Delta y_0 - \gamma y_0} D_0^{\circ}(\vec{R}, x_0 - y_0). \quad (3.6)$$

Опишем один из возможных способов вычисления  $I_Y$  (по-видимому, самый простой).

В (3.6) вставляем

$$D_0^{\circ}(\vec{R}, x_0 - y_0) = \frac{-i}{2(2\pi)^2} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(x_0 - y_0) + i|\omega|R}$$

(см. /7/, (37.10)) и после этого интегрируем по  $x_0$  и  $y_0$ .

После ряда преобразований получаем:

$$I_Y = 4\pi \frac{-i}{(2\pi)^2} \frac{e^{-\gamma t}}{R} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cos(\omega + \Delta) R \frac{\text{ch} \gamma t - \cos \omega t}{\omega^2 + \gamma^2} - \int_0^{\infty} d\omega \sin \omega R \left[ \frac{\text{ch} \gamma t - \cos(\omega - \Delta)t}{(\omega - \Delta)^2 + \gamma^2} + \frac{\text{ch} \gamma t - \cos(\omega + \Delta)t}{(\omega + \Delta)^2 + \gamma^2} \right] \right\}. \quad (3.7)$$

Первый интеграл в (3.7) с помощью формулы  $\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cos \omega a / \omega^2 + \gamma^2 = \pi/\gamma \exp(-\gamma|a|)$  легко вычисляется. Он равен

$$\theta(t-R) \text{sh } \gamma(t-R) \pi/\gamma \cos R\Delta.$$

Остальные интегралы выражаются через интегральную показательную функцию от комплексного аргумента  $Ei(z)$  (определение см. в /12/, § 3). Эти интегралы можно свести к следующим:

$$\int_0^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega a}}{\omega - \Delta - i\gamma} = \begin{cases} \text{при } a < 0 & -Ei(-|a|(\gamma - i\Delta)) \exp |a|(\gamma - i\Delta) \\ \text{при } a > 0 & 2\pi i \exp a(-\gamma + i\Delta) - Ei(-a(-\gamma + i\Delta)) \exp a(-\gamma + i\Delta) \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega a}}{\omega - \Delta + i\gamma} = \begin{cases} \text{при } a < 0 & -2\pi i \exp |a|(-\gamma + i\Delta) - Ei(-|a|(-\gamma - i\Delta)) \exp |a|(-\gamma - i\Delta) \\ \text{при } a > 0 & -Ei(-a(\gamma + i\Delta)) \exp a(\gamma + i\Delta) \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega a}}{\omega + \Delta \mp i\gamma} = -\text{Ei}(-a(\mp\gamma - i\Delta)) \exp a(\mp\gamma - i\Delta).$$

Результат громоздких вычислений представим с помощью функции

$E[z] \equiv \text{Ei}(-z) \exp z$  в виде

$$I_{\gamma} = \frac{-i}{\pi} \cdot \frac{e^{-\gamma^2}}{R\gamma} \{ \pi e^{iR\Delta} \theta(t-R) \text{sh } \gamma(t-R) + \frac{i}{2} \text{Re } e^{-it\Delta} \cdot$$

$$\cdot (E[(t-R)(-\gamma+i\Delta)] - E[(t-R)(\gamma+i\Delta)] + E[(R+t)(\gamma+i\Delta)] - E[(R+t)(-\gamma+i\Delta)] -$$

$$-i \text{ch } \gamma t \text{Re} (E[R(\gamma+i\Delta)] - E[R(-\gamma+i\Delta)]) \} . \quad (3.8)$$

Символ  $\text{Re}$  означает реальную часть.

Вычисление предела  $\gamma \rightarrow 0$  дает следующий результат:

$$I_0 = \frac{-i}{\pi R} \{ \theta(t-R)(t-R) \pi e^{iR\Delta} - 2i R [ \cos R\Delta \text{ci } R\Delta + \sin R\Delta \text{si } R\Delta ] +$$

$$+ i(R-t) [ \cos R\Delta \text{ci}(R-t)\Delta + \sin R\Delta \text{si}(R-t)\Delta ] +$$

$$+ i(R+t) [ \cos R\Delta \text{ci}(R+t)\Delta + \sin R\Delta \text{si}(R+t)\Delta ] \} . \quad (3.9)$$

Интегральные синус  $\text{si}x$  и косинус  $\text{ci}x$  определены в [12],  $\text{si}x = -\frac{\pi}{2} + \text{Si}x$ .

Сравним (3.9) с приближенным расчетом, изложенным в § 1. Суммируя и усредняя квадрат модуля правой части (1.7) по магнитным квантовым числам с помощью формул (3.2) и (3.3), получаем

$$w_n(t) = \frac{1}{s} (\alpha AB\Delta^2)^2 \frac{1}{\pi^2 R^2} (3-1-1+1) \pi e^{iR\Delta} \theta(t-R)(t-R)^2. \quad (3.10)$$

Сравнивая  $w_n(t)$  с  $w_T(t) = \frac{1}{s} (\alpha AB\Delta^2)^2 |1_0|^2$ , прежде всего отметим, что квадрат модуля "причинного члена"  $\theta(t-R)(t-R)$  (обращающегося в нуль при  $t < R$ ) имеет в  $w_n(t)$  вдвое большую величину, нежели в  $w_T(t)$ . Это неудивительно, поскольку  $w_T(t)$  составляет только часть полной вероятности  $w(t)$ . В остальном (3.9) отличается от (1.7) наличием членов, содержащих интегральные косинус и синус, не обращающихся в нуль при  $t < R$ . Ниже для краткости мы их называем непрчинными.

Формула (3.9) - случай отсутствия затухания - была получена еще двумя способами:

(1) Вычисления начинаются так, как было изложено в § 1 или 2. Затем производится усреднение - суммирование,  $w(t)$  получается в виде суммы двух положительных членов. Вычисляется простейший из них, пропорциональный квадрату модуля интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{k dk}{\sqrt{kR}} J_{1/2}(kR) \left\{ \left[ t + \frac{e^{-i(k-\Delta)t} - 1}{i(k-\Delta)} \right] \frac{1}{k-\Delta} + \left[ t + \frac{e^{-i(k+\Delta)t} - 1}{i(k+\Delta)} \right] \frac{1}{k+\Delta} \right\}. \quad (3.11)$$

Основные встречающиеся интегралы приведены в формулах 2.641 в <sup>15/</sup>.

(2) Вычисляется интеграл (3.6) с помощью формулы

$$D^{\circ}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi i} \left[ \delta(t^2 - \vec{x}^2) - \frac{i}{\pi} P \frac{1}{t^2 - \vec{x}^2} \right] \quad (3.12)$$

(см. (17.20) в <sup>17/</sup>). Вычисления проведены для случая  $t < R$ ; они ясно показывают, что не причинные члены происходят именно от второго слагаемого в (3.12), за счет которого  $D^{\circ}$  не обращается в нуль вне светового конуса.

Переходим к анализу не причинных членов. Асимптотический вид  $I_0$ . При  $R \Delta \gg 1$  и  $|R-t| \Delta \gg 1$  с помощью асимптотических формул для  $\text{ci}x$  и  $\text{si}x$

$$\text{ci}x = -\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}, \quad \text{si}x = -\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \quad (3.13)$$

получаем

$$I_{0a} = \frac{-i}{\pi R \Delta} \left\{ \theta(t-R)(t-R) \Delta \pi e^{iR\Delta} + \frac{2i}{R\Delta} [-i \cos t \Delta] \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{1}{R-t} + \frac{1}{R+t} \right] \right\}. \quad (3.14)$$

Как видно, при таких  $R$  и  $t$  не причинные члены меньше причинного, по крайней мере, в  $|R-t| \Delta$  раз, т.е. они следующего порядка малости. В дополнительной оговорке  $|R-t| \Delta \gg 1$  и состоит уточнение приближения результата старых расчетов задачи (см., например, <sup>11,2/</sup>). При временах, близких к  $R/c$ , вклад не причинного члена сравним с причинным (см. далее).

Асимптотический вид  $I_{\gamma}$  при больших  $|R(\pm\gamma+i\Delta)|$  и  $|(R-t)(\pm\gamma+i\Delta)|$ . При больших модулях аргумента  $E[z] \approx \text{Ei}(-z) \exp z \approx -1/z$

$$I_{\gamma a} = -\frac{i}{\pi} \frac{e^{-\gamma t}}{R\Delta} \left\{ \theta(t-R) \frac{\text{sh } \gamma(t-R)}{\gamma} \Delta \pi e^{iR\Delta} + i \cos t \Delta \frac{\Delta}{\Delta^2 + \gamma^2} \left[ \frac{1}{t-R} - \frac{1}{R+t} \right] + \right. \\ \left. + 2i \text{ch } \gamma t \frac{1}{R} \frac{\Delta}{\Delta^2 + \gamma^2} \right\}. \quad (3.15)$$

Если  $\gamma t$  мало, то непричинные члены по-прежнему меньше причинного примерно в  $|R-t|\Delta$  раз. При большом  $\gamma t$  картина меняется. Тогда  $e^{-\gamma t} \operatorname{ch} \gamma t \approx \frac{1}{2}$ , а  $e^{-\gamma t} \operatorname{sh} \gamma(t-R) \approx e^{-\gamma R/2}$  и

$$I_{\gamma a} \approx -\frac{i}{\pi} \frac{1}{R\Delta} \left\{ \theta(t-R) \frac{\Delta}{2\gamma} e^{-\gamma R} e^{iR\Delta} + i e^{-\gamma t} \cdot \cos t\Delta \frac{\Delta}{\Delta^2 + \gamma^2} \left[ \frac{1}{t-R} - \frac{1}{t+R} \right] + i \frac{1}{R} \frac{\Delta}{\Delta^2 + \gamma^2} \right\}. \quad (3.16)$$

Вторым членом здесь можно пренебречь. Однако третий непричинный член становится главным даже при  $t > R$ , если

$$\frac{\pi}{2} e^{-\gamma R} < \frac{1}{R} \frac{\gamma}{\Delta^2 + \gamma^2}. \quad (3.17)$$

При достаточно большом  $R$  это равенство справедливо.

Отмеченный факт имеет место и при  $t = R/c$ , поскольку он объясняется главным образом тем, что при больших  $\gamma t$  причинный член содержит малый множитель  $e^{-\gamma R}$ .

Ниже предлагается истолкование этого явления.

Предварительно отметим, что несмотря на введение затухания для уровней 1 и 2 атома В,  $I_{\gamma}$  при  $t \rightarrow \infty$  не стремится к нулю. Это объясняется отсутствием в рамках второго приближения взаимодействия, посредством которого В мог бы высветиться с уровня 2. Такое явление имеет место и в простейшей задаче перехода атома с одного уровня с шириной  $\gamma_1$ , на другой - с шириной  $\gamma_2$  с испусканием или поглощением фотона. Амплитуда вероятности нахождения атома на конечном уровне в наименьшем порядке теории возмущений при больших временах стремится к константе, а не к нулю.

Преобладание непричинного члена можно объяснить тем, что заброс в состоянии 2В с его помощью возможен уже сразу после момента  $t=0$ , и этот эффект убывает с ростом  $R$  как  $R^{-2}$ . Причинный член начинает вносить вклад после момента  $R/c$ , когда количество атомов В в состоянии 1 уже уменьшилось до  $e^{-\gamma R}$ -той доли от первоначального количества. В результате "непричинный" механизм преобладает при условии (3.17).

Проведенный анализ в основном касался времен, отстоящих от  $R/c$  на много периодов  $1/\Delta$ . Численный расчет показывает, что вблизи  $R/c$  непричинный член сравним с причинным. Раз это так, то в опыте, имеющем целью заметить непричинный член, достаточно брать  $R \sim 1/\Delta$ : если  $R$  больше длины волны  $1/\Delta$ , то непричинный член все равно заметен только в области  $(R-1/\Delta, R)$ . Большие  $R$  нежелательны, поскольку полная вероятность эффекта уменьшается с ростом  $R$  как

$R^{-2}$  (это тем более относится к случаю  $\gamma \neq 0$ , хотя при наличии затухания неprin-ципальный член заметен и вне области  $(R - \frac{1}{\Delta}, R)$  при условии (3.17)).

На рис. 1 приводятся графики функции  $|\pi I_\gamma|^2$  при  $R\Delta = \pi/2$  для случаев  $\gamma=0$  и  $\gamma=\Delta$  (в последнем случае использовались таблицы /13/).

#### § 4. Кулоновское взаимодействие

Посредством кулоновского взаимодействия электронов  $H_c$  (см. (2.2)) передача возбуждения от одного атома к другому происходит в первом порядке теории возмущений<sup>x)</sup> (см. /3/, формула (29.9))

$$a_{AB}^{(1)}(t) = -\langle AB^* | H | A^* B \rangle \frac{e^{-2\gamma t} - 1}{2i\gamma} \quad (4.1)$$

$$\langle AB^* | H_c | A^* B \rangle = \frac{e^2}{2} \iint d^3x_A d^3x_B w_A^*(\vec{x}_A) w_{B^*}(\vec{x}_B) \frac{1}{|\vec{x}_A - \vec{x}_B|} w_A(\vec{x}_A) w_B(\vec{x}_B). \quad (4.2)$$

Будем считать, что центр атома  $A$  расположен в начале координат, а центр  $B$  находится в точке  $\vec{R}$ . Тогда, как правило,  $x_A/x_B < 1$  (вероятность обратного неравенства пренебрежимо мала при  $R \gg a_0$ ). Вставим в (4.2) разложение

$$\frac{1}{|\vec{x}_A - \vec{x}_B|} = \frac{1}{\sqrt{x_A^2 + x_B^2 - 2x_A x_B \cos\alpha}} = \frac{1}{x_B} \sum_{L=0}^{\infty} P_L(\cos\alpha) \left(\frac{x_A}{x_B}\right)^L, \quad (4.3)$$

верное при  $x_A/x_B < 1$ . Матричный элемент от первого члена этого разложения равен нулю из-за ортогональности волновых функций. Следующий член равен

$$\frac{x_A}{x_B} \frac{(\vec{x}_A \cdot \vec{x}_B)}{x_A x_B} = \frac{1}{x_B^2} (\vec{x}_A \cdot (\vec{R} + \vec{x})) = \frac{1}{x_B^2} (\vec{x}_A \cdot \vec{R}) + \frac{1}{x_B^2} (\vec{x}_A \cdot \vec{x}). \quad (4.4)$$

Первое слагаемое в правой части (4.4) является константой по отношению к сферическим углам вектора  $\vec{x}_B$ , и матричный элемент от него равен нулю из-за ортогональности функций  $w_{B^*}(\vec{x}_B)$  и  $w_B(\vec{x}_B)$ . В результате

$$a_{AB}^{(1)}(t) = i \frac{e^2}{2} \frac{e^{-2\gamma t} - 1}{2\gamma} \left\{ \frac{1}{R^3} (d_A d_B) + \dots \right\} \quad (4.5)$$

<sup>x)</sup> Если ядра не бесконечнотяжелые, то такая передача может происходить и за счет кулоновского взаимодействия электрона атома  $A$  с ядром атома  $B$ . Соответствующая амплитуда оказывается в  $m$  ядра /  $m$  электрона раз меньше, чем вычисляемая далее амплитуда электрон-электронного взаимодействия.

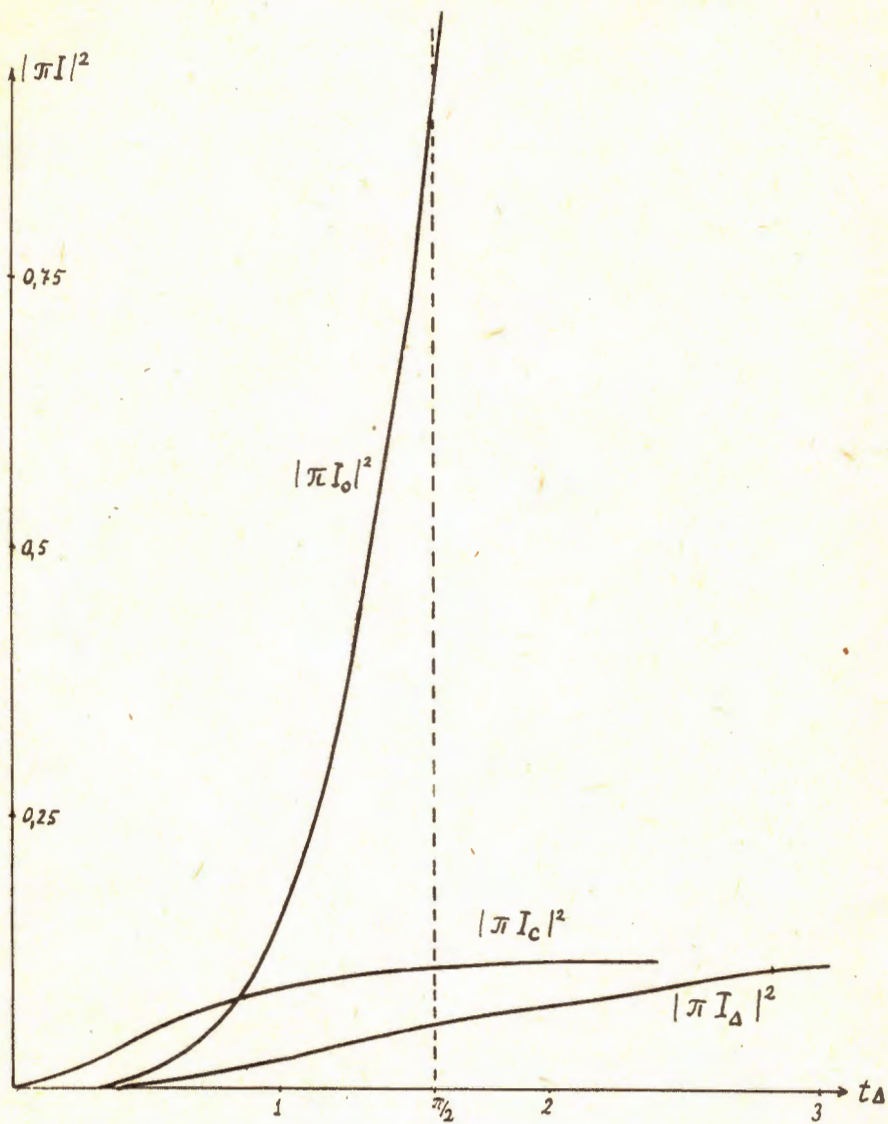


Рис. 1.



с точностью до членов порядка  $\frac{1}{R} \left(\frac{a_0}{R}\right)^3$ , где  $a_0$  - размер атомов. Хотя полученная мгновенная кулоновская передача возбуждения имеет порядок  $1/R^3$ , однако на расстояниях  $R \sim 1/\Lambda$  его амплитуда сравнима с обменной, вычисленной в предыдущем параграфе. На рис. 1 нанесена кривая  $3\left(\frac{2}{\pi}\right)^4 (e^{-2\gamma t} - 1/2)^2 = (\pi I_0)^2$ , представляющая  $w_0(t) = \frac{1}{s} \sum_{AB} |a_{AB}^{(1)}|^2$  в том же масштабе, что и изображенная там же часть вероятности  $w(t)$ , обязанная обмену поперечным фотоном.

Заметим, что даже когда модули кулоновской и обменной амплитуд сравнимы по величине, их интерференция не может привести к исчезновению полной амплитуды всюду в интервале  $(0, R/c)$  поскольку они по-разному зависят от  $R$  и  $t$ .

### § 5. Об одном доказательстве каузальности квантово-электродинамического взаимодействия между зарядами

Обнаруженная мгновенная передача возбуждения происходит из-за неравенства нулю  $D^c(x)$  вне светового конуса и из-за кулоновского взаимодействия. Имеется ряд работ, авторы которых доказывают, что несмотря на эти обстоятельства, взаимодействие между двумя зарядами, все же целиком запаздывающее, причинное. В наиболее общей форме эти доводы изложены в работе С.Т. Ма<sup>14/</sup>. Там рассматривается матричный элемент вида (2.4), но от  $S$ -матрицы (интегрирование по временам от  $-\infty$  до  $+\infty$ ) и в лорентцовой калибровке, когда  $D_{\mu\nu}^c = \delta_{\mu\nu} D^c$ :

$$M = \int d^4x \int d^4y j_{B \cdot B}^\mu(x) D^c(x-y) j_{A \cdot A}^\mu(y). \quad (5.1)$$

Покажем, что  $D^c = D_{adv}^- + D_{ret}^+$ , где значки (-) и (+) означают соответственно, отрицательно-энергетическую и положительно-энергетическую части соответствующих функций (т.е. в импульсный образ этих функций добавлена  $\theta(-k_0)$  или  $\theta(k_0)$ ).

Из соотношений

$$\begin{aligned} D_{ret}^c(x) &= \theta(x_0) D^c(x) = \theta(x_0) D^{(-)}(x) + \theta(x_0) D^{(+)}(x) \\ D_{adv}^c(x) &= -\theta(-x_0) D^c(x) \\ D^c(x) &= \theta(x_0) D^{(+)}(x) - \theta(-x_0) D^{(-)}(x) \end{aligned} \quad (5.2)$$

вытекает (сравни<sup>15/</sup>, Приложение):

$$D_{ret}^c(x) = D^c(x) - D^{(-)}(x) \quad (5.3)$$

$$D_{adv}^c(x) = D^c(x) - D^{(+)}(x). \quad (5.4)$$

Положительно - частотная часть равенства (5.3) и отрицательно-частотная часть (5.4) имеют вид  $D_{ret}^{(+)} = D^{o(+)}$  и  $D_{adv}^{(-)} = D^{o(-)}$  соответственно, откуда и следует  $D^o = D_{adv}^{(-)} + D_{ret}^{(+)}$

Для любых функций, разлагающихся в интеграл Фурье, имеет место соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} D^{\pm} (x-y) j_{\mp}^{\mu}(y) dy_0 \sim \int_{-\infty}^{\infty} D(k_0) \theta(\mp k_0) j(k_0) \theta(\pm k_0) dk_0 = 0 \quad (5.5)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} M &= \iint d^4x d^4y j^{\mu}(x) [D_{adv}^{(-)} + D_{ret}^{(+)}] \{ j_{+}^{\mu}(y) + j_{-}^{\mu}(y) \}, \\ &= \iint d^4x d^4y j^{\mu} [D_{adv} j_{-}^{\mu} + D_{ret} j_{+}^{\mu}]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Если ток  $j^{\mu}(y)$  такой, что  $j^{\mu}(y) = j_{(+)}^{\mu}(y)$ , то

$$M = \iint d^4x d^4y j^{\mu}(x) D_{ret}^{\mu}(x-y) j^{\mu}(y), \quad (5.7)$$

т.е. взаимодействие между токами чисто запаздывающее. Матричный элемент тока, для которого  $j^{\mu}(y) = j_{(+)}^{\mu}(y)$ , содержит только положительно-энергетические составляющие, энергия начального состояния больше энергии конечного, и может быть испущен фотон (с положительной энергией). Для частного случая  $j_{AA^*}(y) = j_0(y) \exp i(E_{A^-} - E_{A^*})y_0$ ,  $E_{A^*} > E_{A^-}$  результат (5.7) доказан в § 37 книги /7/. Обобщение способа рассмотрения Ахиезера и Берестецкого см. в конце гл. 12 книги Тирринга /16/.

Покажем, что это рассуждение не имеет отношения к проблеме скорости распространения сигнала.

Первая предпосылка вывода - соотношение (5.5). Интегрирование по времени там должно вестись в бесконечных пределах. Вторая предпосылка -  $j^{\mu}(y) = j_{+}^{\mu}(y)$  - исключает возможность локализованных во времени токов<sup>x)</sup>. Это означает, что в сущности рассматривается стационарная задача взаимодействия двух токов типа рассеяния электронов, свободных при  $t = -\infty$  и  $t = +\infty$ . В стационарной задаче нет распространения сигнала. Для передачи сигнала надо в какой-то момент локально изменить временной ход тока (не изменяя его раньше). Такой ток не будет положительно-частотным.

Любопытно заметить, что в рамках задачи со свободными электронами в начале и в конце тот же матричный элемент  $M$  может быть приведен к виду

<sup>x)</sup> Фурье-образ функции  $j(k_0)\theta(k_0)$  является аналитической функцией времени и не может обращаться в нуль в интервале времен  $(-\infty, t_0)$ , например. Наоборот локализованный во времени ток по той же причине не может быть чисто положительно-частотным.

$$M = \sum_{\mu} (\bar{U}_{B\mu} \gamma_{\mu} U_B) (\bar{U}'_{A\mu} \gamma_{\mu} U'_{A\mu}) / k k =$$

$$= - \sum_{\mu=1}^2 (\bar{U}_{B\mu} \gamma_{\mu} U_B) (\bar{U}'_{A\mu} \gamma_{\mu} U'_{A\mu}) / k_{\nu} k_{\nu} - (\bar{U}_{B0} \gamma_0 U_B) (\bar{U}'_{A0} \gamma_0 U'_{A\mu}) / k^2 \quad (5.8)$$

с помощью процедуры, изложенной в <sup>19/</sup>. Целиком причинный, согласно Ма, матричный элемент в этой форме содержит явно мгновенное кулоновское взаимодействие (в импульсном представлении). Поскольку процедура Фейнмана <sup>19/</sup> годится тоже только для задач со свободными электронами, представление (5.8) не доказывает бесконечной скорости сигнала в квантовой электродинамике<sup>x)</sup> точно по тем же причинам, по которым представление (5.8) не доказывает ее конечности.

### § 6. Опыт по измерению сверхсветовой скорости передачи возбуждения

Вкратце результаты расчета задачи об обмене возбуждением сводятся к следующему. В принципе имеется вероятность передачи возбуждения с любой скоростью, большей  $c$ , однако, заметным образом время возбуждения может опережать момент  $R/c$  только на величину порядка периода колебания  $\lambda/c$  волны фотона с энергией  $\Delta = E_2 - E_1$  (точно  $\lambda/c$  определяется как  $2\pi\hbar/E_2 - E_1$ ).

В опыте, соответствующем решенной задаче, надо обеспечить прежде всего, чтобы вначале атом  $A$  был возбужденным, но фотонов не было. Этого можно достичь, например, быстрым возбуждением атомов  $A$ . Следующее очевидное требование: неопределенность  $\tau$  в момент начала возбуждения атомов  $A$  должна быть меньше  $\lambda/c$  на один или два порядка. За начальный момент  $t=0$  мы принимаем момент начала возбуждения, хотя возможно, что только часть атомов  $A$  успеет возбудиться за время порядка нескольких  $\tau$ . Это означает преуменьшение не причинного эффекта, но такое преуменьшение неизбежно. Наконец, факт появления атомов  $B^*$  тоже должен регистрироваться быстро сравнительно с  $\lambda/c$ .

Какие наименьшие  $\tau$  могут быть достигнуты? Прежде всего самый сигнал (приказ) о начале возбуждения имеет некоторую нечеткость своего начала. Вполне достижимой в радиотехнике является нечеткость порядка  $10^{-10}$  сек. Неопределенность в момент начала самого возбуждения может быть только больше. Отсюда следует, что  $\lambda/c$  должно быть не меньше  $10^{-8}$  сек, что соответствует  $\lambda = 2\pi\hbar c/\Delta > 300$  см.

x) Нечто аналогичное встречается и в классической релятивистской электродинамике, являющейся строго причинной теорией. Формулу для напряженности  $\vec{E}$  электрического поля равномерно движущегося заряда можно переписать так, что  $\vec{E}$  будет зависеть от расстояния между зарядом и точкой наблюдения в самый момент наблюдения (см. конец § 83 в <sup>117/</sup>). Такое отсутствие запаздывания не ведет к возможности мгновенной передачи сигнала: равномерно движущийся заряд не может передать сигнала.

Автор не может сейчас предложить осуществимый опыт, удовлетворяющий этим требованиям. Можно только показать, что они в принципе выполнимы.

Пусть  $A$  есть атом водорода. Уровень  $E_2$  — один из двух метастабильных уровней  $2^2S_{1/2}$ , например, уровень с  $m = 1/2$ . Уровень  $E_1$  — один из уровней  $2^2P_{1/2}$ , пусть, уровень с  $m = -1/2$ . Если атом помещен в магнитное поле, то  $\Delta = E_2 - E_1$  может варьироваться вплоть до нулевого значения (переход  $a \rightarrow c$  на рисунках 4 и 5 в главе VIII книги /18/).

В качестве атома  $B$  можно предложить сходную трехуровневую систему, у которой уровень  $E_1$  метастабильен относительно перехода в нижнее состояние  $E_0$ , переходы  $E_{2B} \rightarrow E_0$  (как и  $E_{2B} \rightarrow E_{1B}$ ) разрешены, и  $E_{2B} - E_{1B} \ll E_{1B} - E_0$ . Эта система, находясь в состоянии  $E_{1B}$ , может быстро детектировать кванты малой энергии по появлению квантов  $E_{2B} \rightarrow E_0$  (например, оптических; время высвечивания таких квантов в атоме водорода  $\sim 10^{-8}$  сек). Такая система сходна с так называемым "квантовым счетчиком", предложенным Бломбергенем /19/.

Опыт начинается с возбуждения атомов  $A$ , находящихся до этого в основном невозбужденном состоянии, во все другие состояния, в том числе и в  $2S$ . Это можно сделать, надвигая электронный пучок на объем, занятый атомами  $A$ . Время надвигания  $\sim 10^{-9}$  сек, если объем равен  $10^3 \text{ см}^3$ , так что  $\Delta$  придется взять соответствующим  $\lambda \sim 10$  метров.

Известно, что квантовая система не может возбудиться мгновенно. Время возбуждения можно оценить из известного выражения для вероятности возбуждения (см. /3/, § 29)

$$|a(t)|^2 = \frac{4|H|^2 \sin^2(\omega_{k0} t/2)}{\omega_{k0}^2} \quad (6.1)$$

Из него следует, что за время  $t \ll 1/\omega_{k0}$  заметного возбуждения не произойдет. Однако для перехода  $1S \rightarrow 2S$   $t \sim \frac{1}{\omega_{21\pi}} \sim 10^{-15}$  сек, так что этим временем можно пренебречь. Именно поэтому и предлагается трехуровневая система: она может быть быстро возбуждена и вместе с тем может испускать мягкие кванты. У двухуровневой системы время возбуждения было бы порядка  $1/\Delta$ , т.е. сравнимо с измеряемым неспричинным опережением (кроме того, трудно было бы говорить о возбуждении волнами длиной  $1/\Delta$  только атомов  $A$ , если атомы  $B$  расположены на расстоянии  $1/\Delta$  от  $A$ ).

Момент  $R/c$  можно определить, например, как время прихода в область, занятую атомами  $B$ , оптических квантов от высвечивающихся атомов  $A$  (с уровней  $2P$ ,  $3S$  и т.д. на нижележащие уровни). Эти кванты распространяются со скоростью  $c$  в пределах описанной неопределенности в начале возбуждения: для них  $\lambda/c \sim 10^{-15}$  сек.

Согласно квантовоэлектродинамическому расчету сразу после начала возбуждения (и до момента  $R/c$ ) в опыте должны регистрироваться возбуждения систем  $Z$  на уровень  $E_{2B}$  (т.е. излучение  $E_{2B} \rightarrow E_0$ ), что, с другой стороны, противоречило бы теории относительности.

Представляется, что основная трудность предложенного варианта опыта состоит в малой вероятности обмена возбуждением с помощью мягкого кванта (радиокванта). Вероятность спонтанного излучения пропорциональна  $\lambda^8$  и в лазерной практике им вообще пренебрегают. В нашей задаче  $w(t) \sim \lambda^4$ . При  $1/\Delta = 10$  м,  $R\Delta = \pi/2$ ,  $\gamma = \Delta$  и  $\Lambda = B = 3a_0 = 3 \cdot 0,59 \cdot 10^{-9}$  см (что соответствует значению радиального интеграла  $R_{20}^{21}$  для атома водорода (см. <sup>11/</sup>, § 63 табл. 13) получается  $w(t = \frac{1}{2} R/c) \sim 10^{-49}$ . Чтобы иметь надежду обнаружить эффект, число атомов  $A$  и  $B$  (в метастабильных состояниях) должно быть порядка числа Авогадро<sup>x/</sup>.

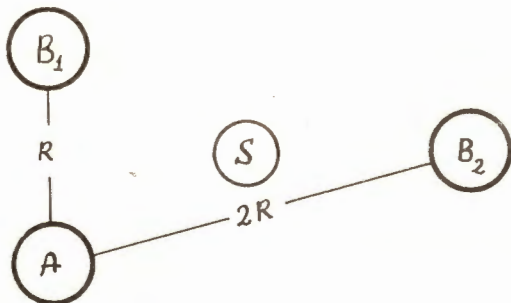
Способ учета эффектов затухания, использованный в этой работе, является, конечно, грубым, хотя и общепринят. Основной целью было показать, что качественно непричинный эффект затуханием не смазывается. Однако обнаруженное преобладание непричинного члена при больших  $\gamma t$  поддается правдоподобному истолкованию, и мы предложим еще один опыт, основанный именно на формуле (3.16).

Уровень  $E_{B1}$  теперь должен высвечиваться за время  $1/\Delta$  (т.е.  $\gamma \sim \Delta$ ), а уровень  $E_{2B}$  должен иметь большое время жизни. Быстрой регистрации факта перехода на уровень  $E_{2B}$  не требуется; общее (асимптотическое) количество атомов  $Z$ , попавших на этот уровень, надо измерить после момента  $t_1 \gg 1/\Delta$ .

Опыт производится следующим образом. Из управляющего пункта  $S$ , расположенного на одинаковом расстоянии от  $A$  и  $B$ , одновременно с равной скоростью посылаются сигналы в  $A$  и  $B$ . По этим сигналам атомы  $Z$  возбуждаются на уровень  $E_1$ , но не  $E_2$ <sup>xx</sup>, одновременно с возбуждением атомов  $A$ . Измеряется количество атомов  $Z$  в состоянии  $E_2$  в двух положениях: на расстоянии  $R = \pi/2\Delta$  от  $A$  и на расстоянии  $2R$  (см. рис. 2)

x) Увеличение количества атомов ведет к увеличению размеров областей ими занятых, что так или иначе ведет к увеличению неопределенности во времени возбуждения и регистрации. Последнее приводит к необходимости увеличить  $\lambda$ , что уменьшает  $w(t)$ . Однако в результате все же получается выигрыш, ибо  $w(t) \sim 1/\lambda^4$ , а эффект увеличения количества атомов пропорционален произведению объемов, т.е. шестой степени линейного размера. Трудности, связанные с неизбежным фоном, здесь обсуждать не стоит.

xx) Это можно сделать с помощью облучения оптическими фотонами. Переходы  $E_2 \rightarrow E_0$  сильно запрещены по предположению, и возбуждение на уровень  $E_2$  будет являться только фоном. Достаточно быструю подачу оптического пучка на атомы  $B$  можно осуществить с помощью ячейки Керра.



Р и с . 2.

По формуле (3.18) асимптотическое количество таких атомов (при  $t \gg R/c$ ) будет пропорционально

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left| \frac{i}{2} e^{-\pi/2} + \frac{i}{\pi} \right|^2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 0,187$$

в положении  $B_1$  и  $\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 0,006$  - в положении  $B_2$ , т.е. в 30 раз меньше. Если же верна теория относительности, то это отношение можно подсчитать либо с помощью одного причинного члена в (3.18), либо путем следующих простых соображений. Прежде всего фактор удвоенного расстояния дает коэффициент 1/4. Далее, если атомы  $B$  переходят в состояние  $E_2$  только после времен  $R/c$  и  $2R/c$  соответственно, то их полные асимптотические количества в этом состоянии должны быть пропорциональными количеству атомов  $B$  в состоянии  $E_1$ , то есть не успевшим высветиться ко временам  $R/c$  и  $2R/c$ . Поэтому отношение должно быть равным  $\frac{1}{4} e^{-2\gamma R/c} / e^{-\gamma R/c} = 0,01$  (константа распада равна  $2\gamma$ ). Как уже говорилось в § 3, полученную трехкратную разницу можно объяснить тем, что "непричинное" поведение  $w(t)$  "прощупывается" быстрораспадающимся детектором (в этом смысле он играет одновременно роль атомных часов).

Достоинством такого варианта опыта является возможность измерять количество  $B^*$ , "не торопясь", недостатком - необходимость измерять в положении  $B_2$  вероятность еще на два порядка меньшую, нежели и без того малая вероятность в положении  $B_1$ . Оказывается, что при  $\gamma < \Delta$  эта трудность еще более усугубляется, так что для опыта надо, чтобы  $\gamma \gg \Delta$ .

Каким способом можно увеличить вероятность передачи возбуждения? Одной из причин ее малости в обсужденном варианте опыта является малая величина атомных дипольных моментов. Излучающая система должна иметь большие эффективные размеры. Возможно, что для успеха опыта нужно использовать какой-то быстро возбуждаемый коллективный процесс, сопровождаемый мощным радиоизлучением. Обычные генераторы радиоволн возбуждаются в течение многих периодов излучаемого колебания.

## § 7. Обсуждение некоторых возможных теоретических возражений

1. В связи с предложенным опытом обычно выражается сомнение: позволяет ли соотношение неопределенностей  $\Delta E \Delta t \approx \hbar$  говорить о том или ином поведении  $w(t)$  в интервале времен длиной  $1/\Delta$ , можно ли говорить об определенном начальном состоянии (с определенной энергией в частности) в определенный момент времени и т. п.

Прежде всего подчеркнем, что в нашей задаче время вообще является параметром, и соотношение  $\Delta E \Delta t \approx \hbar$  во всяком случае не имеет того смысла, который имеет соотношение  $\Delta p \Delta x \approx \hbar$  (см., например, /20/, § 113). Наиболее глубоко этот вопрос поставлен и разрешен Дираком /21/. Поведение физической системы при смещениях, вращениях и лорентцовских преобразованиях (сюда входят и временные сдвиги, т.е. поведение во времени) известно, если указана система физических величин типа гамильтониана, полного импульса, момента и т.п. По Дираку задача построения динамики сводится к нахождению такого набора этих величин, которые, удовлетворяя своему определению (перестановочным соотношениям неоднородной группы Лоренца), коммутируют вместе с тем с оператором времени  $\hat{t}$ . Поскольку эта задача решена, в рамках построенной динамики  $t$  является  $c$ -числом. С этой точки зрения уравнение Шредингера определяет тот класс функций, в пространстве которых  $t$  является параметром.

В изложении опыта в § 6 вопрос решен просто путем указания конкретного способа быстрого приготовления и регистрации нужного нам состояния.

2. Следующий вопрос - о соответствии предложенного опыта решенной теоретической задаче. В опыте содержится и этап приготовления начального состояния и этап регистрации, задача же касается только середины - процесса переноса возбуждения.

Прежде всего следует отметить, что все дополнительные предположения вполне естественны. После быстрого возбуждения имеется, действительно, некоторое количество атомов в нужном нам состоянии. Ничто не мешает быстро высветиться атомам  $B$ , возбужденным в состояниях  $E_2$ . Возражение может быть сформулировано лишь таким, например, образом: не исключено, что ввиду тонкости эффекта быстрое возбуждение так влияет на последующее радиоизлучение, что эффект мгновенного переноса возбуждения смазывается.

Укажем сейчас относительно легко решаемую задачу, в которую включено приготовление начального состояния. Оказывается, что влияние быстроты приготовления обратное: чем внезапней приготовление, тем ближе результат к результату решенной задачи с заданным начальным условием. Пусть  $A$  есть мезоатом (мезон

скалярный), находящийся на метастабильном уровне  $2S$  (уровень  $E_2$ ). В отсутствие магнитного поля пусть  $2S$  совпадает с  $2P$  или лежит несколько ниже, так что переходы  $2S \rightarrow 2P$  невозможны. При включении магнитного поля  $2P$  расщепляется и при увеличении поля один из его подуровней может оказаться ниже  $2S$  (уровень  $E_1$ ). За момент  $t=0$  примем момент включения поля. Далее поле нарастет до величины  $H_\Delta$ , так что в интервале  $(0, \tau)$   $E_2 - E_1$  как-то зависит от  $t$ , после же момента  $T = \tau$  пусть  $\Delta_A(\tau) = E_2 - E_1(\tau) = \Delta$ .

Амплитуда вероятности теперь рассчитывается по слегка измененной формуле (3.1):

$$a_{AB^*}(t) = -4\pi\alpha \sum_{l_0} d_B^l d_A^{l_0} \Delta \int_0^t dx_0 \int_0^t dy_0 \Delta_A(y_0) \cdot e^{-i\Delta x_0 - \gamma x_0} e^{i\Delta_A(y_0)y_0 - \gamma y_0} D_{l_0}^0(\vec{R}, x_0 - y_0). \quad (7.1)$$

Интеграл  $\int dy_0 \Delta_A(y_0) \dots$  можно представить как  $\int dy_0 \Delta \dots + \int dy_0 \Delta_A(y_0) \dots$ . При  $\tau \rightarrow 0$  (врезанное возмущение, см. § 31 в /3/) второй интеграл стремится к нулю, и задача сводится к решенной.

Заметим, что даже при мгновенном приготовлении начального состояния таким способом атому не надо сообщать какую-либо энергию: атому в  $2S$ -состоянии не сообщается никакой энергии; произвольно зависящее от времени (но однородное) магнитное поле не вызывает никаких переходов (см. /11/ § 45 и /3/, § 31). На этом примере ясно видно, что соотношение  $\Delta E \Delta t \sim \hbar$  не имеет никакого отношения к вопросу приготовления определенного начального состояния в определенный момент времени (в этом примере приготовление сводится к представлению атому возможности излучать).

3. Перечислим приближения теоретического расчета. Поправка к дипольному приближению имеет величину  $\sim a_0 \Delta$ . При  $1/\Delta > 1$  метра и для системы атомных размеров это составляет не более  $10^{-10}$  основного эффекта. Использование нерелятивистского приближения при расчете дипольных матричных элементов имеет обычную погрешность порядка  $v_e/c$ , что совпадает с  $a_0 \Delta$ . Гораздо большую, но тоже вполне пренебрежимую величину имеют поправки на конечность масс ядер атомов  $A$  и  $B$  (см., например, примечание на стр. 17).

Наконец, расчет произведен лишь во втором порядке теории возмущений. В связи с этим можно только напомнить, что в таком же (первом исчезающем) приближении подсчитаны многие известные электродинамические эффекты (фотоэффект, комптон-эффект, рассеяние электронов и т.п.). Известно, что оцененные поправки за счет высших приближений малы. Результаты расчетов превосходно согласуются с опытом.



В настоящей работе использовался тот же вычислительный аппарат, но решалась чисто нестационарная задача. Существует известное мнение, что все наблюдаемые процессы можно описать  $S$ -матрицей. Однако на деле существуют нестационарные задачи - и теоретические, и экспериментальные, см., например, работу <sup>/22/</sup>, где экспериментально изучалась форма линии излучения, спустя короткое время после возбуждения.

### З а к л ю ч е н и е

Эта работа посвящена доказательству того, что согласно квантовой электродинамике действительно возможен опыт, в котором сигнал будет передан со сверхсветовой скоростью (это может быть, например, сигнал о том, что на атом  $A$  подан электронный пучок, см. § 8). Сверхсветовая скорость передачи сигнала абсолютно не совместима с теорией относительности: в рамках этой теории она ведет к нарушению причинности (см., например, <sup>/23/</sup>, § 21).

Принципиальная возможность такой передачи в релятивистской квантовой электродинамике означает просто внутреннюю противоречивость этой теории, если ее понимать как синтез постулатов классической теории излучения, квантовой теории и теории относительности. При таком понимании опыт должен давать  $w(t)=0$  в интервале  $(0, R/c)$ , и нужен не опыт, а новая теория. Однако превосходное количественное согласие существующей теории с многочисленными опытными фактами (такими, как сдвиг Лэмба, аномальный магнитный момент электрона и т.п.) позволяет предложить иную логическую альтернативу: считать основным набором постулатов сам вычислительный аппарат квантовой электродинамики в целом, а не взятые по отдельности постулаты теории относительности и т.д. Тогда лабораторная постановка опыта является оправданной.

Опыт не противоречит проделанным измерениям скорости света и, прежде всего, тем опытам, в которых измеряется фазовая скорость света (или константа в соотношении  $\lambda = cT$  для монохроматического колебания). В опытах по измерению групповой скорости используется модулированный световой пучок. Как было показано, квантовая электродинамика может дать опережение движущегося со скоростью света сигнала по порядку равное  $\lambda/c$ . Это  $> 10^{-14}$  сек для видимого света и такое опережение выходит далеко за пределы точности современных экспериментов, см. обзор <sup>/24/</sup>, глава III. В связи с этим отметим, что независимо от теоретического происхождения, опыт желателен уже потому, что в предложенных условиях скорость света еще не измерялась.

Предлагаемый опыт не подрывает существенно значения  $c$  как фундаментальной константы (например,  $c$  - это фазовая скорость электромагнитного колебания в вакууме или константа, появляющаяся при переходе от электростатической к электромагнитной системе единиц). У нее только отнимается роль максимально возможной скорости сигнала.

Сверхсветовая скорость сигнала в квантовой механике уже обсуждалась в работе автора <sup>/25/</sup>. Настоящее рассмотрение имеет ряд преимуществ по сравнению с <sup>/25/</sup>. Отпадает обсуждение вопросов о том, можно ли приготовить локализованное состояние, как его приготовить, какую координату употреблять для описания этого состояния. Вопрос здесь решен практически. Атомы А и В можно считать бесконечно тяжелыми. Хотя локализация электронов в атоме описывается не финитными функциями, они локализованы с точностью, которой с избытком хватает.

Вместо периода фотонной волны  $\lambda/c$ , в <sup>/25/</sup> фигурирует  $\lambda/c$ , где  $\lambda_c$  - комптоновская длина волны частицы, поэтому там можно обсуждать только гипотетический опыт с очень легкой частицей. Стоит, однако, заметить, что зато в <sup>/25/</sup> задача (расплывание пакета) решается точно, а здесь - только в первом исчезающем приближении теории возмущений.

В заключение благодарю профессоров М.А.Маркова и Д.И.Блохинцева и сотрудников Лаборатории теоретической физики ОИЯИ Л.Г.Заставенко, И.В.Полубаринова и Л.Д.Соловьева за обсуждения работы. Автор будет благодарен за замечания по этой статье.

#### Л и т е р а т у р а

1. S.Kikuchi, Zs. f. Phys, 66, 558 (1930).
2. E.Fermi, Rev. Mod. Phys., 4, 87 (1932).
3. Л.Шифф, Квантовая механика. ИЛ, Москва, 1957.
4. В.Гайтлер, Квантовая теория излучения. ИЛ, Москва, 1956.
5. И.С.Градштейн и И.М.Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГИФМИ, Москва, 1962.
6. W.Heitler, S.F.Ma, Proc. Roy. Ir. Acad., 52, 123 (1949).
7. А.И.Ахиезер и В.Б.Берестецкий, Квантовая электродинамика, ГИФМЛ, Москва, 1959.
8. С.Швебер, Введение в релятивистскую квантовую теорию. ИЛ, Москва, 1963. г.
9. R.P.Feynmann, Phys. Rev, 76, 769 (1949) Sect. 8, Longitudinal waves. См. перевод в сб. "Новейшее развитие", ИЛ, Москва, 1954.
10. J.M.Jauch and F.Rohlich, The Theory of Photons and Electrons, Cambridge, 1955.

11. Г.Бете и Э.Солпитер, Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. ГИФМЛ, Москва, 1960.
12. Н.Н.Лебедев, Специальные функции и их приложения, ГИФМЛ, Москва, 1963.
13. Tables of the Exponential Integral for Complex Argument. Nat. Bureau of Stand. AMS-51, 1958.
14. S.T. Ma, Nucl. Phys, 7, 163 (1958).
15. Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков, Введение в теорию квантованных полей. ГИТТЛ, Москва, 1957.
16. W.E.Thirring, Principles of quantum electrodynamics, New York, 1958.
17. Л.Д.Ландау и Е.М.Лившиц, Теория Поля. ГИФМЛ, Москва, 1960.
18. G.W.Series, Spectrum of Atomic Hydrogen. Oxford 1957.
19. N.Bloembergen, Phys. Rev. Lett., 1959, 2, 84.  
M.R.Brown and W.A.Stand, Phys. Rev. Lett., 11, 366 (1963).
20. Д.И.Блохинцев, Основы квантовой механики. ВШ, Москва, 1961.
- ✓ 21. P.A.M.Dirac, Rev. Mod. Phys, 21, 392 (1949).
- ✓ 22. C.S.Wu et al, Phys. Rev. Lett, 5, 432 (1960).
23. C.Moller, The Theory of Relativity. Oxford, 1952.
24. Дж. Сандерс, Основные атомные константы. Москва, 1962.
- ✓ 25. M.I.Shirokov, Relativistic causality in the quantum mechanics of a scalar particle.  
Препринт ОИЯИ, Е-1252, Дубна, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел  
18 июня 1964 г.