

1715

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Экз. чит. зала

P-1715



Я. Квечиньски, П. Шураны

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

УРАВНЕНИЕ БЕТЕ-СОЛПИТЕРА  
В СИММЕТРИЧНОЙ МЕЗОННОЙ ТЕОРИИ

1964

P-1715

Я. Квециньски<sup>х)</sup>, П. Шурань<sup>хх)</sup>

УРАВНЕНИЕ ВЕТЕ-СОЛПИТЕРА  
В СИММЕТРИЧНОЙ МЕЗОННОЙ ТЕОРИИ

Направлено в Acta Physica Polonica



---

х) Командирован из Института ядерной физики, Краков, Польша.

хх) Командирован из Центрального Исследовательского Института физики, Будапешт, Венгрия.

## 1. Введение

Асимптотическое поведение амплитуды рассеяния при больших косинусах угла было широко исследовано в рамках квантовой механики<sup>/1-4/</sup>. Было доказано, что для суперпозиции юкавских потенциалов  $V(r) = \int_{\mu_0}^{\infty} d\mu \rho(\mu) e^{-\mu r} / r$  асимптотическое поведение амплитуды определено вкладом одного полюса Редже, если  $\rho(\mu)$  удовлетворяет условию  $\int_{\mu_0}^{\infty} d\mu \rho(\mu) / \mu < \infty$ .

В релятивистской теории поля уравнение Бете-Солпитера может в некоторой мере заменить уравнения Шредингера. Это уравнение в конфигурационном пространстве дает вообще интегро-дифференциальное уравнение, но в случае локальных ядер<sup>/5/</sup> уравнение превращается в чисто дифференциальное ("лестничное" приближение относится к этому классу). "Потенциал" уравнения дается функцией  $V(r) = \int_{\mu_0}^{\infty} d\mu \mu^2 K_1(\mu r) / r \rho(\mu^2)$ , где  $\rho(\mu)$  - спектральная функция диаграммы, которая составляет ядро уравнения БС.

$$\text{Если} \quad \int_{\mu_0}^{\infty} d\mu \rho(\mu^2) / \mu < \infty \quad (1.1);$$

то ядро принадлежит к фредгольмовскому классу, ведущей особенностью в  $\ell$ -плоскости является полюс Редже. Условие (1.1) выполняется для потенциалов менее сингулярных, чем  $1/r^4$ , при  $r \rightarrow 0$ . Если  $\rho(\mu^2) \rightarrow \text{const}$  для  $\mu^2 \rightarrow \infty$ , то потенциал имеет поведение  $1/r^4$  и условие (1.1) не выполняется. Это имеет место в теории типа  $\lambda \phi^4$ <sup>/5-7/</sup> в "однопузырьковом" приближении. Этот потенциал даст в качестве ведущей особенности в  $\ell$ -плоскости не зависящую от энергии точку ветвления типа квадратичного корня. Асимптотическое поведение в перекрестном канале описывается выражением:

$$A(s) \sim s^{\ell_0} (\log s)^{-3/2}, \quad (1.2)$$

где  $\ell_0$  - точка ветвления.

Арбузов и др.<sup>/8/</sup> решили квазипотенциальное уравнение<sup>/8,10/</sup> для ядра третьего порядка (рис. 1) в теории типа  $\lambda \phi^4$  и нашли более сингулярный потенциал для  $r \rightarrow 0$ , чем в случае "пузырькового" ядра. Эта сильная особенность потенциала приводит к существенной особенности в решении уравнения в точке  $r=0$ . С сингулярными потенциалами мы имеем также дело в уравнении БС для рассеяния лептонов с ферми-взаимодействием.

Асимптотическое поведение (1.2) не может дать постоянное полное сечение, что, кажется, противоречит экспериментальным результатам. Это очень неприятная черта ведущих особенностей такого рода, которая приводит к двум предположениям: 1) теория  $\lambda \phi^4$  является "плохой"; 2) простое приближение ядра является недостаточным. Мы склонны принять второе. Модель, предложенная в работе<sup>/12/</sup>, подтверждает эту

гипотезу. В работе /12/ мы заменили простую пузырьковую диаграмму суммой итерированных пузырьковых диаграмм (печочка) /13/. Такое ядро принадлежит к фредгольмовскому классу, хотя оно включает в себя и "однопузырьковую" диаграмму. Мы видим, что в этом случае диаграммы высшего порядка компенсируют "опасные" особенности ядра низшего порядка. Можно привести другой подобный пример. Диаграмма (3) (волнистая линия означает печочку и принадлежит, как это можно доказать, к уравнению фредгольмовского класса) представляет собой сумму диаграмм, которая содержит также диаграмму 1. Значит можно найти ряд диаграмм высшего порядка, которые компенсируют сильные особенности диаграммы низшего порядка. В главе 2 мы докажем возможность перестроения членов ряда теории возмущений в симметричной мезонной теории (СМТ). С помощью этого перестроения докажем (глава 3), что ядро уравнения БС в любом порядке нового разложения является фредгольмовским ядром. В главе 4 суммируем главные результаты работы и приводим асимптотическое поведение ведущего полюса Редже.

## 2. Перестроение ряда теории возмущений

Чтобы доказать самосогласованность метода, о котором говорилось в главе 1, нужно показать, что это имеет место в любом порядке теории возмущений. Более точно: нужно доказать возможность перестроения ряда теории возмущений, просуммировав сначала все "пузырьковые" поправки в точке четырехчастичной вершины. Введем волнистые линии, которые применялись для других целей /14/. Четырехпионные вершины и вершины, где сходятся две пионные и одна волнистая линии, назовем вершинами типа А и типа В. Диаграммы, содержащие только вершины типа А или В, будем называть диаграммами типа А или В, соответственно. Однако нужно подчеркнуть, что поскольку "пропатор" волнистой линии не обязательно имеет полюс на физическом листе, волнистой линии может не соответствовать физическая частица. В дальнейшем принимается, что в пузырьки, составляющие волнистую линию, включены все возможные внутренние поправки. Нужно найти ряд диаграмм типа В, равноценный сумме всех диаграмм типа А. Очевидно, что нельзя одновременно рассматривать диаграммы 1 и 3, так как каждая из них содержит простую "пузырьковую" диаграмму. Это - универсальная черта теории  $\lambda\phi^4$ , связанная с тем, что для вершин типа А нет определенного направления, и волнистые линии можно направить тремя разными способами. Используя эти три способа, трижды получим точечную диаграмму.

В случае симметричной мезонной теории (СМТ) с лагранжианом взаимодействия  $\lambda(\phi_1\phi_1)(\phi_k\phi_k)$  ( $i, k = 1, 2, 3$  изотопические индексы) возможно однозначное соответствие диаграмм СМТ с диаграммами типа В. Из правил Фейнмана для СМТ для четырехчастичной вершины получаем:

$$f(2\pi)^4 (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\epsilon} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\epsilon\beta} + \delta_{\alpha\epsilon} \delta_{\gamma\beta}), \quad (2.1)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$  - изотопические индексы. На языке диаграмм эта вершина представляет собой сумму трех разных диаграмм (рис. 4), в которых связываются линии, соответствующие частицам, имеющим одинаковые изотопические индексы. Диаграммы СМТ обладают следующей структурой: внешние линии пробегают через диаграмму без всякого разрыва, кроме этого, внутри диаграммы находится множество замкнутых петель (со многими возможными внешними вершинами), которые не связаны с другими частями диаграммы на рисунке. Эти петли имеют некоторые внешние вершины типа изображенного на рис. 4, в которых обмениваются импульсом с остальной частью диаграммы. Такую замкнутую петлю, если она имеет две внешних вершины, будем называть двухчастичной поправкой (она является специальным пузырьком с возможными поправками). Тогда волнистая линия будет представлять собою цепочку из именно таких пузырьков (см. рис. 5) со всеми возможными поправками внутри пузырьков.

Докажем следующую теорему. Сумма всех возможных диаграмм СМТ с данным числом внешних бозонных линий равняется сумме всех возможных диаграмм В с равным числом внешних бозонных линий без поправок к волнистым линиям.

Для доказательства конструируем следующее соответствие между диаграммами В и диаграммами СМТ:

а) из данной диаграммы СМТ удаляем все определенные выше двухчастичные поправки;

б) во все вершины между "клиньями" включаем волнистые линии (см. рис. 4).

Существенным моментом доказательства является возможность включения волнистой линии только одним способом. Отсюда соответствие по отношению к В-диаграммам является однозначным, т.е. две диаграммы В не могут содержать ту же самую диаграмму СМТ, и только такие диаграммы содержатся в данном множестве диаграмм В. Таким образом, доказательство закончено. Из этой теоремы следует, что разумно ввести в четырехчастичную вершину двухчастичные поправки вместе с точкой. Отсюда видно, что этот метод всегда дает уравнение типа Фредгольма, если в качестве ядра мы используем В-диаграммы низшего порядка. Ядра высшего порядка исследуются в следующей главе.

Как мы уже заметили, волнистые линии содержат "несвязанные" пузырьки со всеми возможными поправками. Из теоремы следует, что эти поправки можно учитывать, снова используя волнистые линии. Если обозначить "пропатор" волнистой линии через  $F(t)$ , то получим, что

$$F(t) = \frac{f(2\pi)^4}{1 - fK(t) - fK(t, F)} \quad (2.2)$$

где

$$K(t) = \frac{t}{32 \pi^2} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\sqrt{x-4\mu^2}}{x(x-t)} dx \quad (2.3)$$

Функция  $K(t)$  соответствует "пузырьку" без поправок;  $\bar{K}(t, F)$  - "пузырьку" с учетом всех поправок. Мы обозначили буквой  $F$  функциональную зависимость  $\bar{K}$  от  $F$ . В уравнении (2.2) сделано одно вычитание; константа вычитания ренормирует константу связи  $f_0$ .

Уравнение (2.2) можно понимать как интегральное уравнение для функции  $F(t)$ . Функция  $k(t)$  растет логарифмически для  $t \rightarrow \infty$ , вследствие чего функция  $F(t) \rightarrow 0$  если функция  $\bar{K}(t, F)$  не будет компенсировать это поведение. Более подробно эта проблема обсуждается в главе 3.

Можно также определить свободную волнистую линию без поправок внутри "пузырьков". Тогда для функции  $F(t)$  получаем следующее выражение:

$$F(t) = \frac{f(2\pi)^4}{1 - f K(t)} \quad (2.4)$$

Высшие поправки учитываются следующим образом: включаем поправки во все пузырьки волнистой линии вместе, а именно: добавляем члены с поправками (снова с помощью свободных волнистых линий) к знаменателю правой стороны уравнения (2.4). Очевидно, что волнистая линия переносит дискретные квантовые числа вакуума в СМТ.

Подобные однозначные соответствия возможны и в случае Ферми-взаимодействия, потому что это взаимодействие обладает определенным направлением. Волнистая линия имеет векторный-псевдовекторный характер. Пропагатор волнистой линии падает как  $p^{-2} (\log p^2)^{-1}$  в низшем порядке теории возмущений. Такое поведение гарантирует суммируемость диаграмм теории Ферми-взаимодействий с помощью конечного числа неопределенных констант. Однако некоторые из этих констант не являются поправками к известным физическим параметрам теории. Но возможно, что с помощью метода Фейнберга и Пайса<sup>/18/</sup> эти константы могут быть выключены из теории. Существенной проблемой в случае неперенормируемых теорий является необходимость введения новых констант вычитания при суммировании диаграмм с высшими поправками. Проводя волнистые линии внутри диаграмм, нужно ввести бесконечное число констант вычитания.

Возможность подобного подхода к неперенормируемым теориям предлагалась в работе<sup>/15/</sup>.

### 3. Асимптотическое поведение диаграмм по внешним массам

Уравнение БС для двухчастичной амплитуды рассеяния в представлении углового момента<sup>/1/</sup> имеет следующий вид:

$$T_{\ell}(p, p_0; q, q_0; E) = K_{\ell}(p, p_0; q, q_0; E) +$$

(3.1)

$$+ \frac{1}{i(2\pi)^4} \int dp' \int dp'_0 \frac{p'^2}{F(p', p'_0; E)} K_{\ell}(p, p_0; p', p'_0; E),$$

где

$$\times T_{\ell}(p', p'_0; q, q_0; E),$$

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}, \quad q = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}, \quad p' = \sqrt{p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2}.$$

Четырех-векторы  $p_{\mu}$ ,  $q_{\mu}$ ,  $p'_{\mu}$  и  $E_{\mu}$  определяются следующим образом:

$$p_{1\mu} = \frac{E_{\mu}}{2} + p_{\mu}, \quad p'_{1\mu} = \frac{E_{\mu}}{2} + p'_{\mu}, \quad q_{1\mu} = \frac{E_{\mu}}{2} + q_{\mu},$$

$$p_{2\mu} = \frac{E_{\mu}}{2} - p_{\mu}, \quad p'_{2\mu} = \frac{E_{\mu}}{2} - p'_{\mu}, \quad q_{2\mu} = \frac{E_{\mu}}{2} - q_{\mu},$$

где  $p_{\mu}$ ,  $q_{\mu}$ ;  $p'_{\mu}$ ,  $q'_{\mu}$ ;  $q_{1\mu}$ ,  $q_{2\mu}$  - четырех-импульсы двух частиц в начальном промежуточном и конечном состояниях, соответственно. Функция  $(F(p', p'_0; E))$  представляет собой свободный двухчастичный пропагатор.  $K_{\ell}(p, p_0; p', p'_0)$  - коэффициент разложения ядра в четырех-импульсном представлении по полиномам Лежандра (это ядро содержит сумму диаграмм не обладающих двухчастичными промежуточными состояниями в  $s=E^2$ -направлении). Принадлежность уравнения (3.1) к фредгольмовскому классу определяется поведением функций  $F(p', p'_0; E)$  и  $(K_{\ell}(p, p_0; p', p'_0; E))$  для больших значений  $p, p', p_0, p'_0$ . Из теоремы Лемана<sup>/17/</sup> вытекает, что функция  $F(p', p'_0; E)$  ведет себя как  $(p'^2 - p_0'^2)^2$ , и самой существенной проблемой является определение асимптотического поведения функции  $K_{\ell}$ . Если  $K_{\ell}$  стремится к нулю как  $(\log p)^{-2}$ , это уже обеспечивает фредгольмовский характер уравнения. Именно такое поведение функции  $K_{\ell}$  было найдено в работе<sup>/12/</sup>, где в качестве ядра использовалась диаграмма обмена одной волнистой линией.

Обсудим, остается ли это поведение аналогичным для всех диаграмм типа В. Сначала перечислим расходящиеся диаграммы В:

1) вакуумные диаграммы, 2) диаграммы собственной энергии пиона, 3) вершинные диаграммы (рис. 6) (диаграммы собственной энергии волнистой линии включаются в пропагатор волнистой линии). Первые два типа расходимостей несущественны с точки зрения асимптотического поведения (диаграмма собственной энергии пиона не влияет на асимптотическое поведение<sup>/17/</sup>).

Нетрудно видеть, что вершинная часть низшего порядка расходится как  $\log \log M^2$ , где  $M^2$  - обрезывающий параметр.

Рассмотрим прежде всего все диаграммы В без поправок к вершинным частям, а затем в конце этой главы обсудим вопрос об их влиянии на асимптотическое поведение.

Предположим сначала, что в уравнении (2.2) член  $\bar{K}(t, F)$  не компенсирует логарифмический рост функции  $K(t)$ . Тогда пропагатор волнистой линии убывает как  $(\log t)^{-1}$  для  $t \rightarrow \infty$ . (Позднее мы увидим, что это предположение правильно).

Функцию  $F(t)$  можно представить в спектральном виде:

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im} F(t') dt'}{t'-t}, \quad (3.2)$$

где  $\text{Im} F(t) = (\log t)^{-2}$ , если  $t \rightarrow \infty$ .

Возможность возникновения полюсных членов функции  $F(t)$  никак не мешает нашим конечным результатам. Эти члены соответствуют теории типа  $\phi^2\psi$ , в которой амплитуда как функция внешних масс стремится к нулю более быстро, чем в нашем случае. Введем в диаграмму волнистые линии в форме (3.2). Применяя параметризацию Фейнмана, получаем следующее выражение для общего члена разложения ядра (мы опускаем некоторые несущественные численные факторы) [18]:

$$K^{(n)} = \int \frac{\delta(1 - \sum_1^n \alpha_i - \sum_1^{2n-2} \beta_i) \prod_1^n d\alpha_i \prod_1^{2n-2} d\beta_i \prod_1^n \text{Im} F(x_i) dx_i}{U^2 [\mu^2 \sum_1^{2n-2} \beta_i + \sum_1^n x_i \alpha_i - \frac{1}{U} (t H(\alpha_i, \beta_i) + u G(\alpha_i, \beta_i) + R')]^n}, \quad (3.3)$$

где  $n$  - число внутренних волнистых линий,  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  - параметры Фейнмана волнистых и мезонных линий соответственно;  $x_i$  - масса  $i$ -ой волнистой линии.

$$t = (p_\mu - p'_\mu)^2, \quad u = (p_\mu + p'_\mu)^2$$

$$K = R(\alpha_i, \beta_i, E, p, p') = E_\mu^2 L(\alpha_i, \beta_i) + (p_\mu + \frac{E_\mu}{2})^2 R_1(\alpha_i, \beta_i) + (p_\mu - \frac{E_\mu}{2})^2 R_2(\alpha_i, \beta_i) + (p'_\mu + \frac{E'_\mu}{2})^2 R_3(\alpha_i, \beta_i) + (p'_\mu - \frac{E'_\mu}{2})^2 R_4(\alpha_i, \beta_i).$$

Функции  $H(\alpha_i, \beta_i)$ ,  $G(\alpha_i, \beta_i)$ ,  $L(\alpha_i, \beta_i)$  и  $R_k(\alpha_i, \beta_i)$  являются положительными однородными функциями  $n$ -ой степени по переменным  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ ;  $U$  - определитель диаграммы. Выражение (3.3) отличается от соответствующего выражения в теории  $g\phi^3$  добавочными интеграциями (3.3) по переменным  $x_i$ .

Разлагая функцию  $K^{(n)}$  по полиномам Лежандра, получаем следующее выражение для функции  $K_\ell^{(n)}$ :

$$K_\ell^{(n)} = \int \frac{(1 - \sum_1^n \alpha_i - \sum_1^{2n-2} \beta_i) \prod_1^n d\alpha_i \prod_1^{2n-2} d\beta_i \prod_1^n \text{Im} F(x_i) dx_i Q_\ell^{(n-1)}(\frac{A}{B})}{U^2 B^n}, \quad (3.4)$$

где мы использовали следующие выражения инвариантов  $u$  и  $t$  через  $\cos \theta$ :



$$u = p_0^2 - p^2 + p_0'^2 - p'^2 + 2p_0 p_0' - 2p p' \cos \theta$$

$$t = p_0^2 - p^2 + p_0'^2 - p'^2 - 2p_0 p_0' + 2p p' \cos \theta$$

Функции А и В определяются следующим образом:

$$A = \mu \sum \beta_1 + \sum x_1 \alpha_1 - \frac{1}{U} [(p_0^2 + p_0'^2 - p^2 - p'^2 - 2p_0 p_0') H + (p_0^2 + p_0'^2 - p^2 - p'^2 + 2p_0 p_0') G + R(\alpha, \beta; E, p, p')] , \quad (3.4a)$$

$$B = 2p p' (G(\alpha, \beta) - H(\alpha, \beta)) .$$

Функция  $Q_\ell^{(n-1)}(\frac{A}{B})$  представляет собой производную  $n-1$ -го порядка функции Лежандра второго рода. (Мы разложили функцию  $K^{(n)}$  в СЦМ двух частиц, где только нулевая компонента вектора  $E_\mu$  отлична от нуля).

Выражение (3.4) делим на две части в зависимости от знака В. В области, где  $B < 0$ , используя известные свойства функций  $Q_\ell$ , положим

$$Q_\ell^{(n-1)}\left(\frac{A}{B}\right) = (-1)^{\ell+n-1} Q_\ell\left(\frac{A}{|B|}\right) .$$

Из суммы и разности упомянутых частей конструируем ядра с противоположной сигнатурой. Они отличаются от нуля только для четных или нечетных значений  $\ell$ , соответственно. Очевидно, что зависимость функции А от  $p_0$  и  $p_0'$  допускает при некоторых значениях Е поворот пути интегрирования по переменной  $p_0'$  в уравнении БС.

В дальнейшем полагаем:

$$p_0'^2 < 0 .$$

Приведем только результаты вычислений (подробности излагаются в Приложении). Верхняя граница асимптотического поведения функции  $K_\ell^{(n)}$  для больших значений  $p, p', p_0, p_0'$  и при фиксированном значении Е определяется следующим выражением:

$$K_\ell^{(n)} \approx \left[ \log \frac{p^2 + p'^2 + p_0^2 + p_0'^2 - E^2}{m^2} \right]^{-n} \quad \ell > 0$$

$$K_0^{(n)} \approx \left[ \log \frac{p^2 + p'^2 + p_0^2 + p_0'^2 - E^2}{m^2} \right]^{-n+1} . \quad (3.5)$$

Как следует из замечания, сделанного в начале этой главы, поведение функции  $K_\ell^{(n)}$  для  $n \geq 2$  обеспечивает фредгольмовский характер уравнения (3.1). Но в случае  $n=1$  оценка (3.5) не применима. Для  $n=1$  единственной диаграммой, которая содержится в ядре, является диаграмма обмена одной волнистой линией, имеющей поведение  $(\log p)^{-2}$  для  $\ell > 0$ .

Обсудим проблему вершинных поправок. Параметрическая формула Фейнмана для вершинной части имеет вид (см. рис. 6):

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-\mu^2} \frac{\delta(1-\alpha-\beta-\gamma) \operatorname{Im} F(x) dx d\alpha d\beta d\gamma}{[\mu^2 + (x-\mu^2)\gamma - p^2\alpha\beta - k^2\alpha\gamma - (p-k)^2\beta\gamma]}$$

где мы регуляризовали расходящийся интеграл, вводя обрезавший параметр  $M^2$  в интегрировании по переменной  $x$  (заметим, что это регуляризация является ковариантной). Это выражение обладает следующим поведением для  $M^2 \gg p^2\alpha\beta + k^2\alpha\gamma + (p-k)^2\beta\gamma \gg 1$ :

$$V = \log \log M^2 - \log \log (p^2 + k^2 + (p-k)^2).$$

Исследуем вершинную диаграмму высшего порядка. Примером такой диаграммы является диаграмма, показанная на рис. 7.

Соответствующий интеграл в представлении Фейнмана имеет следующую форму:

$$\int_0^1 dx / \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{\delta(1-\alpha-\beta-\gamma-\delta-\epsilon-\eta) d\alpha d\beta d\gamma d\delta d\epsilon d\eta \operatorname{Im} F(x) \operatorname{Im} F(y) dx dy}{[\mu^2 + (x-\mu^2)\alpha + (y-\mu^2)\beta - R(p, R, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \eta)]}$$

где  $R$  является линейной функцией инвариантных переменных  $p^2$ ,  $k^2$ ,  $(p-k)^2$  и однородной функцией третьего порядка от параметров Фейнмана.

Проинтегрировав это выражение по параметрам  $\alpha$  и  $\beta$ , получим интеграл, который стремится к конечному пределу, при  $M^2 \rightarrow \infty$ :

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1}{xy} \log \frac{x+y}{xy} \frac{1}{\log^2 x} \frac{1}{\log^2 y}.$$

Этот странный факт, что диаграмма, содержащая расходящуюся внутреннюю часть, остается сходящейся, является следствием некоторых сокращений расходимостей. Можно показать, что включение вершинных поправок внутрь диаграмм всегда приводит к подобным сокращениям и включение волнистой линии в вершины приводит к такому же симметричному поведению амплитуды, как включение ее в любом другом месте диаграммы (см. уравнение (см. уравнение (3.5))).

Возвратимся к проблеме асимптотического поведения пропагатора волнистой линии. С помощью наших результатов легко показать, что функция  $f_K(t, F)$  в уравнении (2.2) не может скомпенсировать логарифмического роста амплитуды  $f_K(t)$ , соответствующей одному пузырьку без поправок. Функция  $K(t, F)$  получается таким образом, что в один пузырек нужно включить  $s$ -волну полной двухчастичной амплитуды рассеяния. Как следует из уравнения (3.5), вклад  $s$ -волны стремится к нулю не медленнее, чем  $(\log p^2)^{-1}$ , и итерация таких диаграмм не может привести к ухудшению этого поведения. По существу, эти поправки имеют такое же поведение, как диаграмма обмена одной волнистой линией.

Включая одну волнистую линию в пузырьки и регуляризуя полученную диаграмму указанным выше способом, получаем:

$$K_1(t, F) = \log \log M^2 - \log \log t.$$

Видно, что включение в волнистую линию поправок высшего порядка приводит только к другой перенормированной константе связи, но член, зависящий от импульса, не может скомпенсировать логарифмического роста функции  $K(t)$ . Таким образом, доказана самосогласованность асимптотического поведения "пропегатора" волнистой линии.

#### 4. Заключительные замечания

Результаты главы 3 приводят к заключению, что ядро уравнения БС для двухчастичной амплитуды рассеяния в  $\ell$ -представлении принадлежит к фредгольмовскому классу. Однако сумма ядерных диаграмм может расходиться при некотором  $\ell$ . Мы надеемся, что она сходится для некоторого  $\ell$ , иначе теория вообще не существовала бы. Точка  $\ell_0$ , в которой сумма ядерных диаграмм начинает расходиться, соответствует ведущей особенности ядра в  $\ell$ -плоскости. Если эта особенность является "сингулярной" ( $K_\ell \rightarrow \infty$ , если  $\ell \rightarrow \ell_0$ ), то полная амплитуда всегда имеет полюс Редже справа от точки  $\ell_0$ . Однако, если ядро обладает "регулярной" особенностью, эта особенность может остаться ведущей для полной амплитуды, например, особенность, найденная Мандельштамом <sup>/20/</sup>. Однако и в этом случае, когда ядро обладает особенностью по  $\ell$  в точке  $\ell_0$ , можно продолжить ядро по  $\ell$  ниже значения, и уравнение остается фредгольмовским при  $\ell \geq 0$  за исключением, может быть, точки  $\ell = 0$ .

Необходимо сделать еще небольшое замечание, касающееся диаграмм обмена одной волнистой линией, хотя они и не важны с точки зрения фредгольмовского характера ядра. Если волнистая линия связана со свободными пионами, то, на первый взгляд кажется, что включение вершинных частей приводит к возникновению некоторых добавочных неоднозначностей. Отсутствие интеграции по импульсам приводит к необходимости введения в вершинную часть некоторой добавочной константы вычитания. Однако ниже мы увидим, что константа определяется однозначно. Определим перенормированную константу связи с помощью пропегатора волнистой линии

$$f = F(0).$$

Вершинная часть на массовой оболочке пионов удовлетворяет следующему интегральному представлению:

$$V = c + t \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\text{Im } F(t')}{t'(t'-t)} Q_0\left(\frac{t+t'}{t-4\mu^2}\right) dt'.$$

Если необходимо, чтобы вклад от диаграммы обмена одной волнистой линией давал перенормированную константу связи, то мы обязаны без всякой неоднозначности положить  $s = 1$ . Наконец, обсудим асимптотическое поведение ведущего полюса Редже для больших значений переданного импульса. В работе<sup>12/</sup> мы получили, что  $\ell(s) = (\log s)^{-1}$ .

Это поведение связано с поведением ядерной диаграммы для больших значений импульсов  $(K_\ell(p^2 + p'^2) \approx [\log(p^2 + p'^2)]^{-2})$ . Из уравнения (3.4) вытекает, что это является главным вкладом в ядро для  $\ell > 0$ . Таким образом, можно заключить, что логарифмическое убывание функции  $\ell(s)$  является универсальной чертой теории типа  $\lambda\phi^4$ .

Авторы благодарны В.Г.Кадышевскому и А.В.Ефремову за ценные дискуссии.

### П Р И Л О Ж Е Н И Е

В приложении выведем формулы (3.5) для асимптотического поведения диаграммы В. Сделаем это следующим образом:

а) Пренебрегаем параметрами  $\alpha_i$  в функции В (см. уравнение (3.4)) и в  $\delta(1 - \sum \alpha_i - \sum \beta_i)$ .

б) Напишем  $n-2$  производных функции  $Q_\ell$  как производных по  $n-2$   $\alpha$ -переменным. Это позволяет интегрировать выражение (3.4) по этим  $\alpha$ -переменным.

в) Оставляя самый главный член, интегрируем полученную таким образом функцию по соответствующим переменным.

Эти манипуляции приводят к возникновению в знаменателе  $n-2$  логарифмических факторов, зависящих от внешних импульсов.

г) Докажем, что остальные четыре интеграции по переменным  $\alpha$  и  $x$  приводят к двум или одному логарифмическим факторам для  $\ell > 0$  и для  $\ell = 0$ , соответственно.

а) Заметим сначала, что В не может равняться тождественно нулю, если пренебречь членами пропорциональными  $\alpha_i$  в В. Это означало бы, что диаграмма содержит двухчастичное промежуточное состояние в  $s = E^2$  направлений. Нетрудно видеть, что пренебрегая параметрами  $\alpha_i$  в В и в  $\delta(1 - \sum \alpha_i - \sum \beta_i)$ , мы не теряем самого главного вклада.

б) Тогда выражение (3.4) принимает форму:

$$K_\ell^{(n)} = \int \frac{\delta(1 - \sum \beta_i)}{U B^2} \frac{1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \dots \frac{1}{\partial \alpha_{n-2}} Q'_\ell \left( \frac{A}{B} \right) \times \\ \times \prod_1^n d\alpha_i \prod_1^{2n-2} d\beta_i \prod_1^l \text{Im} F(x_i) dx_i.$$

Функция  $A$  зависит линейно от переменной  $a_1$ , а  $\frac{\partial A}{\partial a_1}$  от нее уже не зависит. Интегрируя приведенное выражение по переменной  $a_1$ , получаем два члена, соответствующие верхней и нижней границам интегрирования ( $a_1 = 1$  и  $a_1 = 0$ ). Член, соответствующий значению  $a_1 = 0$ , всегда больше, чем член, соответствующий  $a_1 = 1$ , которым можно пренебречь. Мажорируем это выражение, пренебрегая в дальнейшем переменной  $a_2$  в функции  $\frac{\partial A}{\partial a_1}$ . Это позволяет проинтегрировать данное выражение и по остальным  $n-3\alpha$ -переменным. Получаем следующее выражение:

$$K_{\ell}^{(n)} = \int \frac{\delta(1 - \sum \beta_i)}{U \cdot B^2 \prod_{i=1}^{n-2} (x_i + \frac{\partial \bar{A}}{\partial a_1})} \cdot Q_{\ell}^* \left( \frac{\bar{A}}{B} \right) d\alpha_{n-1} d\alpha_n \prod_{i=1}^n \text{Im} F(x_i) dx_i. \quad (\text{A.2})$$

Нужно подчеркнуть, что функция  $\frac{\bar{A}}{B}$  как аргумент функции  $Q_{\ell}^* \left( \frac{\bar{A}}{B} \right)$  не содержит члена  $\sum_{i=1}^{n-2} \frac{x_i \alpha_i}{B}$  ( $\bar{A} = A - \sum_{i=1}^n a_i x_i$ ).

в) Подынтегральную функцию в выражении (A.2) можно проинтегрировать по переменным  $x_i, i=1, 2 \dots n-2$  (подынтегральная функция факторизована в этих переменных).

Если в выражении (A.2) заменить функцию  $\text{Im} F(x_i)$  ее асимптотической формой, получаем следующие интегралы

$$I \left( \frac{\partial \bar{A}}{\partial a_1} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_i}{u^2 (x_i + \frac{\partial \bar{A}}{\partial a_1}) \log^2 x_i}.$$

Эти интегралы обладают следующим асимптотическим поведением

$$I \left( \frac{\partial \bar{A}}{\partial a_1} \right) = \frac{1}{|\log \frac{\partial \bar{A}}{\partial a_1}| + a} \quad (\text{A.3})$$

для больших значений внешних импульсов, ( $\frac{\partial \bar{A}}{\partial a_1}$  зависит линейным образом от переменных  $p^2, p'^2, p_0^2, p_0'^2, E^2$ ).

з) Оставшийся интеграл по переменным  $a_{n-1}, a_n, x_{n-1}, x_n$  имеет следующий вид:

$$\int \frac{da_{n-1} da_n}{B^2} Q_{\ell}^* \left( \frac{a_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n + \bar{A}}{B} \right) \times \text{Im} F(x_{n-1}) \text{Im} F(x_n) \times dx_{n-1} dx_n. \quad (\text{A.3a})$$

Заметим, что

$$Q_{\ell}^* \left( \frac{a_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n + \bar{A}}{B} \right) = \frac{B}{\partial \bar{A}} \frac{\partial}{\partial a_{n-1}} Q_{\ell}^* \left( \frac{a_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n + \bar{A}}{B} \right)$$

и проинтегрируем функцию в выражении (A.3a) по  $a_{n-1}$ , оставляя пока оба члена, соответствующие  $a_{n-1} = 1$  и  $a_{n-1} = 0$ .

$$\int_{4\mu^2}^{\infty} dx_{n-1} \int_{4\mu^2}^{\infty} dx_n \int_0^1 \frac{da_n}{B(\frac{\partial \bar{A}}{\partial a_n} + x_n)} \left[ Q_{\ell} \left( \frac{x_{n-1} + a_n x_n + \bar{A}}{B} \right) - Q_{\ell} \left( \frac{a_n x_n + \bar{A}}{B} \right) \right] \text{Im } F(x_{n-1}) \text{Im } F(x_n) dx_{n-1} dx_n. \quad (A.4)$$

В выражении (A.4) заменим переменные интегрирования:

$$\frac{a_n(x_n + \frac{\partial \bar{A}}{\partial a_n})}{B} = z$$

и разделим интегрирование по  $z$  на две части  $0 < z < c$ ,  $c < z < \frac{x_n + \frac{\partial \bar{A}}{\partial a_n}}{B}$ , где  $c$  - некоторая константа. Если проинтегрировать по  $x_{n-1}$  и  $x_n$ , то добавка, получаемая в результате интегрирования по  $z$  в пределе  $0 < z < c$ , даже для  $\ell = 0$  дает асимптотическое поведение типа:

$$\frac{1}{(|\log \frac{\partial \bar{A}}{\partial a_{n-1}}| + c)(|\log \frac{\partial \bar{A}}{\partial a_n}| + c)}. \quad (A.5)$$

Положение не изменится для  $\ell > 0$ , если интегрировать по  $z$  в пределах  $c < z < (x_n + \frac{\partial \bar{A}}{\partial a_n}) B^{-1}$ .

Для  $\ell = 0$ , используя асимптотическую форму функции  $Q_0$  и интегрируя по  $z$ , получаем следующий интеграл:

$$J = \int \frac{dx_n dx_{n-1}}{(\log^2 x_n)(\log^2 x_{n-1}) \cdot (x_n + \frac{\partial \bar{A}}{\partial a_n})(x_{n-1} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial a_{n-1}})} \times \\ \times \log \frac{(\frac{x_{n-1}}{B} + \frac{x_n}{B} + \frac{\bar{A}}{B})(c + \frac{\bar{A}}{B})}{(c + \frac{x_{n-1}}{B} + \frac{\bar{A}}{B})(c + \frac{x_n}{B} + \frac{\bar{A}}{B})},$$

который обладает следующим асимптотическим поведением:

$$J = \{ |\log (\frac{\partial \bar{A}}{\partial a_{n-1}} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial a_n}) | + c \}^{-1}. \quad (A.6)$$

Используя (A.2), (A.3), (A.4), (A.5), получаем окончательно асимптотическое поведение функции  $K_{\ell}^{(n)}$

$$K_{\ell}^{(n)} \sim \int \frac{\delta(1 - \sum \beta_i) \prod d\beta_i}{U^{\frac{n}{\ell}} (|\log \frac{\partial \bar{A}}{\partial a_i}| + c)} \quad \ell > 0$$

$$K_0^{(n)} = \int \frac{\delta(1 - \sum \beta_i) \prod d\beta_i}{U \prod_{i=1}^{n-2} (|\log \frac{\partial \bar{A}}{\partial \alpha_i}| + c) (|\log(\frac{\partial \bar{A}}{\partial \alpha_{n-1}} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial \alpha_n})| + c)}$$

Так как функция  $\frac{\partial \bar{A}}{\partial \alpha_i}$  является линейной функцией переменных  $p^2, p_0^2, p_0^2, p_0^2, E^2$ , получаем асимптотическое поведение, определенное уравнением (3,5).

### Л и т е р а т у р а

1. T. Regge, Nuovo Cim., 14, 951 (1959).
2. S. Bottino, A.M. Longoni, T. Regge, Nuovo Cim., 93, 954 (1962).
3. M. Froissart, J. Math. Phys., 3, 922 (1962).
4. L. Brown, D.I. Fivel, B.W. Lee and R.F. Sawyer, Annals of Physics, 23, 187 (1963).
5. G. Domokos and P. Suranyi, Nucl. Phys., 54, 529 (1964).
6. A. Bastai, L. Jartochi, G. Furlan and M. Tonin, Nuovo Cim., 30, 1512 (1963).
7. A. Bastai, L. Bertocchi, G. Furlan and Tonin, Nuovo Cim., 30, 1532 (1963).
8. B.A. Arbuzov, A.T. Filippov and O.A. Khrustalev, Phys. Lett., 8, 205 (1964).
9. A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze, I.T. Todorov and O.A. Khrustalev, Nuovo Cim., 30, 134 (1963).
10. A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze, preprint JINR E-1145.
11. G. Domokos, P. Suranyi and A. Ancura, Preprint JINR E-1512 (1964).
12. П. Шураны и Я. Квечиньски. Препринт ОИЯИ, P-1533 (1964).  
J. Kwieciniski, P. Suranyi, Phys. Lett., 9, 283 (1964).
13. F. Zachariasen, Phys. Rev., 121, 1851 (1961).
- W. Thirring, Лекции по связанным системам в книге  
"Theoretical Physics", IAEA, Вена 1963.
14. В.Г. Вахс, А.И. Ларкин, ЖЭТФ, 45, 1087 (1963).
15. Ю.М. Ломсадзе, ЖЭТФ, 31, 887 (1956).
16. Feinberg, A. Pais, Phys. Rev., 131, 2724 (1963).
17. См., например, С.С. Швебер, Введение в релятивистскую квантовую теорию. Изд. Ин. Лит., Москва (1963).
18. Y. Shimamoto, Nuovo Cim., 25, 1292 (1962).
19. Higher Transcendental Functions, Bateman manuscript project, Mac Graw - Hill Book Company, INC New York, 1953.
20. S. Mandelstam, Nuovo Cim., 30, 1127 and 1148 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел  
18 июня 1964 г.

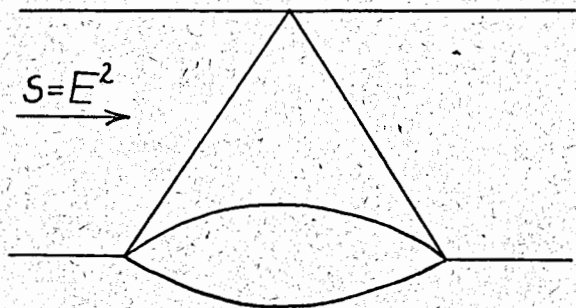


Рис. 1. Диаграмма, соответствующая ядру уравнения БС в работе /8/.  
Стрелка показывает направление  $s$ .

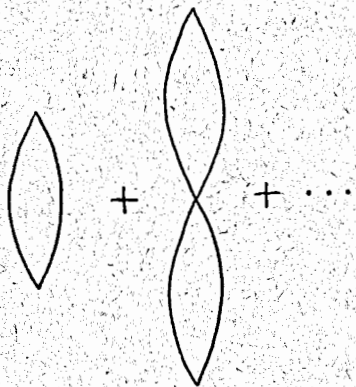


Рис. 2. Сумма диаграмм, дающих вклад в ядро уравнения БС в работе /12/.

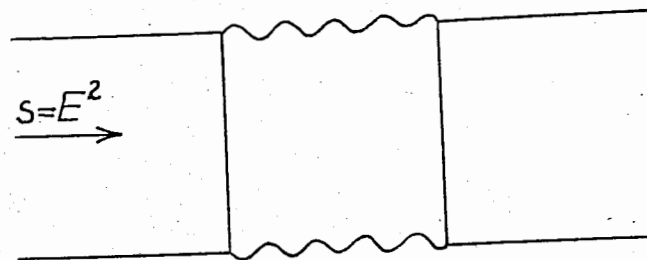


Рис. 3. Бесконечная сумма диаграмм, содержащих диаграмму 1.  
Волнистая линия соответствует сумме рис. 2.

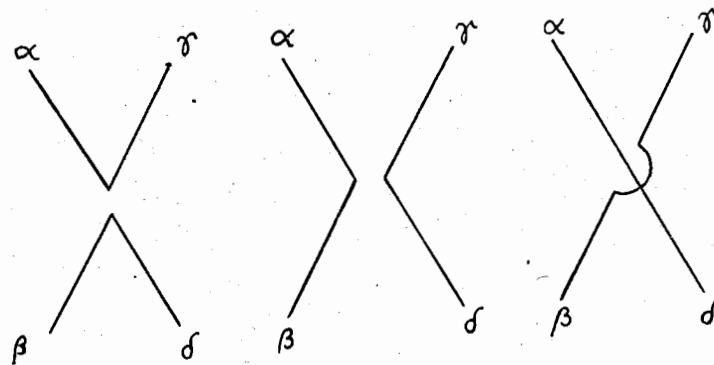


Рис. 4. Три возможные диаграммы, соответствующие вершинной части в СМТ.

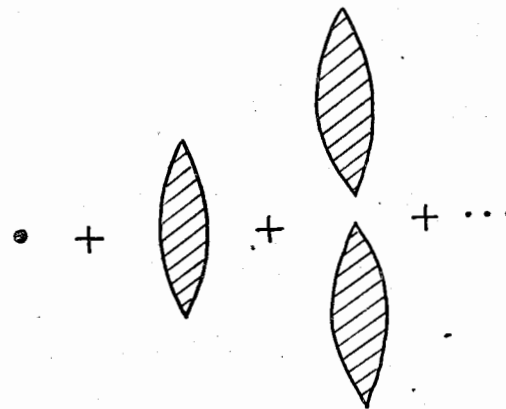


Рис. 5. Сумма диаграмм, дающих вклад в волнистую линию.



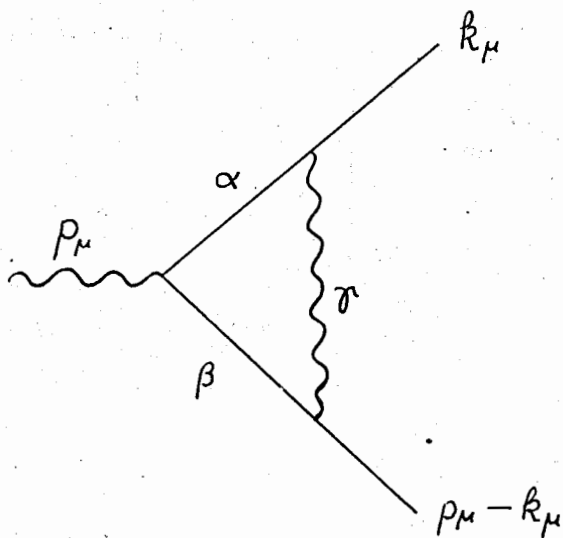


Рис. 6. Самая простая вершинная диаграмма.

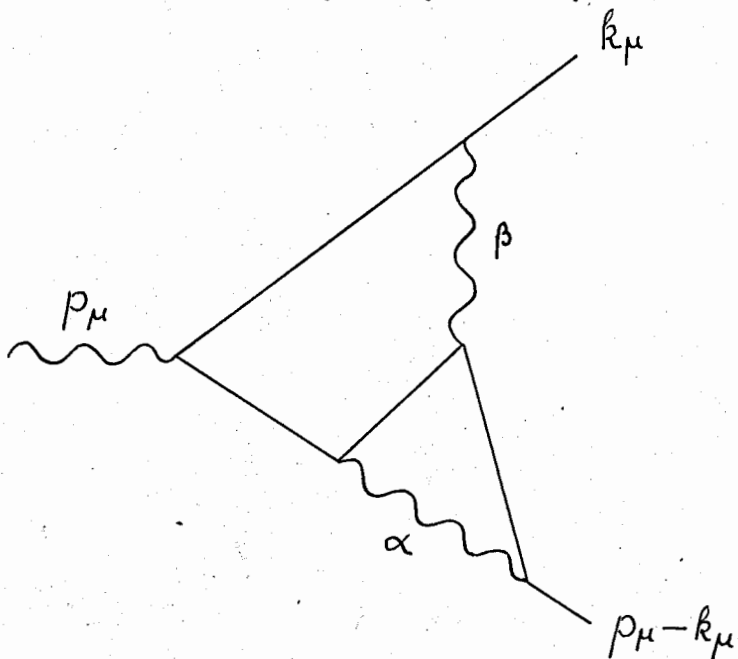


Рис. 7. Более сложная вершинная диаграмма.

Уравнение Бете-Солпитера в симметричной мезонной теории

Предлагается некоторое перестроение членов теории возмущения: четырехчастичные вершины заменяются трехчастичными. Показывается с помощью этого перестроения, что ядро уравнения БС является фредгольмовским оператором в любом порядке теории возмущений. Найдено асимптотическое поведение ведущего полюса Редже:  $\alpha(t) \approx (\log t)^{-1}$ .

Препринт Объединенного института ядерных исследований.  
Дубна. 1964.

Kwiecinski J., Suranyi P.

P-1715

The Bethe-Salpeter Equation in Symmetric Meson Theory

Some rearrangement of the terms of the perturbation theory is proposed. Three particle vertices appear instead of the initial four particle ones. With the help of this rearrangement it is shown in any order of perturbation expansion of the kernel of the Bethe Salpeter equation, that the kernel satisfies the Fredholm condition. The asymptic behaviour of the leading Regge pole is found to be  $\alpha(t) \approx (\log t)^{-1}$ .

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.  
Dubna. 1964.