С 324.
С-603

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-1692

Л.Д. Соловьев

МЯГКИЕ ФОТОНЫ В ПРОЦЕССАХ С ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1964

P-1692

Л.Д. Соловьев

МЯГКИЕ ФОТОНЫ В ПРОЦЕССАХ С ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Направлено в Nuclear Physics

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Аннотация

С помощью общих уравнений локальной теории поля (включая квантовую электродинамику во всех порядках по e) получены два первых члена разложения матричного элемента тормозного излучения по импульсам мягких фотонов. Для излучения одного фотона с импульсом k первый член этого разложения имеет порядок k^{-1}, второй – $e^2 \ln k$, третий – k^0. Коэффициенты при первом и втором членах этого разложения пропорциональны матричному элементу соответствующего процесса без излучения мягких фотонов. С помощью этого разложения

1) получены два первых члена разложения сечения тормозного излучения произвольного числа фотонов с энергией в заданном интервале по энергии излучения;

2) в полном сечении рассеяния фотона с импульсом k на заряженной частице найден член порядка $k^2 \ln k$;

3) показано, что мнимая часть амплитуды упругого комптоиовского рассеяния при фиксированном переданном импульсе является обобщенной степенной функцией энергии s вблизи порога $s = m^2$; найден первый член разложения амплитуды по $s - m^2$ и оценен следующий член;

4) из простых физических соображений и условия спектральности получена формула факторизации инфракрасных расходимостей.

Abstract

General equations of the local field theory (including quantum electrodynamics in all orders in e) have been used to obtain the first two terms in the series expansion of the bremsstrahlung matrix element in the momenta of the soft photons. For bremsstrahlung of one photon with momentum k the first term of this expansion is of order k^{-1}, the second one is of order $e^2 \ln k$, and the third term is of order k^0. The coefficients of the first and second terms are proportional to the matrix element for the corresponding process without emission of the soft photons. With the aid of this expansion

1. the first two terms in the series expansion of the bremsstrahlung cross section in the radiated energy are obtained;

2. a term of order $k^2 \ln k$ in the series expansion of the total cross section for scattering of a photon with momentum k by a charged particle is found;

3. It is shown that the imaginary part of the elastic Compton scattering amplitude at fixed momentum transfer is a generalized power function of the energy s near the threshold $s=m^2$; the first term in the expansion of the amplitude in powers of $s-m^2$ is found and the next term is estimated;

4. It is shown that the factorization of infrared divergences of any scattering amplitude follows from simple physical considerations and the spectrality condition.

1. Введение

Сечение процесса, в котором участвуют мягкие фотоны, можно разложить в ряд по энергиям этих фотонов. Если коэффициенты этого разложения могут быть независимо измерены, то оно решает задачу о процессе с мягкими фотонами.

Для рассеяния мягких фотонов на заряженной частице Тирринг /1/ показал, что первый, не зависящий от энергии фотонов член такого разложения в ренормируемой релятивистски-инвариантной теории совпадает с классическим томсоновским сечением. Второй, линейный по энергии член этого разложения был найден Лоу /2/, Гелл-Манном и Гольдбергером /3/ и Лапидусом и Чжоу Гуан-чжао /4/, которые показали, что с помощью условия градиентной инвариантности он выражается через заряд и магнитный момент рассеивателя. Возникает вопрос о следующих, квадратичных по энергии членах этого разложения. Интерес к ним усиливается в связи с тем, что при усреднении по спинам рассеивателя линейный член в сечении исчезает, а для бесспинового рассеивателя он отсутствует и в амплитуде.

Другим примером рассматриваемых процессов является тормозное излучение мягких фотонов. Лоу /5/ и Биленький и Рындин /6/ нашли, что первый член разложения амплитуды этого процесса по энергии фотона k пропорционален k^{-1}, второй член k^{0}. Однако этот результат справедлив лишь в низшем порядке по e. В старших порядках по e коэффициент при k^{0} оказывается расходящимся (более точно, он расходится сильнее, чем исходная амплитуда). Это указывает на то, что справедливое во всех порядках по e разложение может содержать не только k^{-1}, но и другие сингулярные при $k \to 0$ члены, которые асимптотически более важны, чем члены с k^{0}. Поэтому возникает вопрос о разложении амплитуды тормозного излучения по энергии фотона во всех порядках по e.

Эти вопросы и решаются в данной работе. Мы исходим из общих уравнений локальной теории поля /7/, которые исследовались Медведевым и Поливановым /8/ в связи с аксиоматическим построением теории сильных взаимодействий, и рассматриваем эти уравнения, включая электромагнитное взаимодействие во всех порядках по e. С помощью этих уравнений в п. 2 данной работы найдены два первых члена разложения амплитуды тормозного излучения по энергиям мягких фотонов. В случае излучения одного фотона первый член совпадает с первым членом, полученным Лоу /5/, второй же член содержит $e^{2}\ln k$. Оба члена выражаются через амплитуду соответствующего процесса без излучения мягких фотонов. Член с $e^2 \ln k$ есть результат суммирования бесконечного числа промежуточных состояний с мягкими фотонами в исходных уравнениях. Теоретически при $k \to 0$ этот член более важен, чем второй член (порядка k^0), полученный Лоу [5]. Однако коэффициент e^2 сильно уменьшает его величину при $k \not\to 0$.

В п. 2 показано, что следующий член разложения амплитуды имеет порядок k^0. Его вид обсуждается в Дополнении А.

В п. 3-6 рассматриваются некоторые приложения полученного разложения. В п.3 найдены два первых члена разложения сечения процесса с излучением произвольного числа фотонов с суммарной энергией в заданном интервале по энергии излучения. Первый член этого разложения был получен в работах [9,10].

В п. 4 рассмотрено рассеяние фотона с энергией k на заряженной частице и получен член порядка $e^2 k^2 \ln k$ в полном сечении этого процесса. Теоретически этот член является главным среди членов порядка k^2, и, следовательно, является следующим членом разложения сечения после членов, найденных в работах [1-3]. Заметим, что он присутствует и в сечении рассеяния на неполяризованной частице.

Далее на примере упругого комптоновского рассеяния при фиксированном переданном импульсе t рассматривается эффект излучения и поглощения бесконечного числа виртуальных мягких фотонов. В низшем порядке по e амплитуда этого процесса удовлетворяет дисперсионным соотношениям по s [11,12] (s, u и t –мандельстамовские переменные прямого, перекрестного и аннигиляционного каналов реакции). Как изменяются аналитические свойства амплитуды при включении электромагнитного взаимодействия во всех порядках по e? В четвертом порядке этот вопрос рассматривался Прэнджем [13], однако при фиксированном t и $s \to m^2$ (m –масса рассеивателя) теория возмущений неприменима. Вид особенности амплитуды в этой области $\Phi(t)(s-m^2)^{\beta(t)-1}$ был получен в работах [14,15] с помощью ренормализационной группы (при этом коэффициент при особенности определялся по теории возмущений) и в работе [16] с помощью дисперсионных соотношений (коэффициент найден полностью). В п. 5 данной работы оценен следующий член разложения амплитуды по $s-m^2$ и показано, что член, найденный в [16], действительно является главным. Кроме того, показано, что амплитуда удовлетворяет дисперсионным соотношениям, если ее мнимую часть рассматривать как обобщенную степенную функцию [17] в окрестности $s=m^2$ и $u=m^2$. Заметим, что в работе [13] предлагались дисперсионные соотношения лишь для произведения амплитуды на $(s-m^2)(u-m^2)$, что соответствует двум лишним вычитаниям в электродинамике по сравнению с мезонной теорией. В п. 5 показано, что такая несимметрия между обеими теориями на самом деле отсутствует, и все различие между ними с точки зрения дисперсионных соотношений сводится к заданию в электродинамике правила интегрирования особенности мнимой части при

$s = m^2 (u = m^2)$, вызванной бесконечным числом промежуточных состояний с фотонами нулевой энергии. Это правило соответствует введению обобщенных степенных функций, рассмотренных в книге Гельфанда и Шилова[17].

Наконец, в п. 6 рассматривается вопрос о факторизации инфракрасных расходимостей. Ему посвящено большое число работ[9,10], ссылки на которые имеются в[9]. В п. 6 указано, что факторизация инфракрасных расходимостей есть простое следствие спектральности и физически оправданного требования отсутствия инфракрасных особенностей, если импульсы заряженных частиц не изменяются.

Для простоты изложения мы рассматриваем лишь процессы, в которых наряду с произвольным числом нейтральных частиц присутствует только одна бесспиновая заряженная частица. Обобщение на случай заряженной частицы со спином 1/2 обсуждается в заключении (п. 7).

Используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$. Векторное произведение равно $ab = g^{mn} a_m b_n = a^0 b^0 - \vec{a}\vec{b}$. Амплитуда состояния частицы с импульсом k нормирована условием $\langle k'|k\rangle = (2\pi)^3 2k^0 \delta(\vec{k}' - \vec{k})$, соответственно которому введено обозначение:

$$\tilde{d}\vec{k} = d\vec{k}/(2\pi)^3 2k^0 .$$

Если некоторая величина $F(k_1)$ зависит от импульса фотона k_1 (и его вектора поляризации ϵ_1), то для произведения таких величин, соответствующих n фотонам, используется обозначение:

$$(F(k))_n = \prod_{l=1}^{n} F(k_l) .$$

2. Излучение мягких фотонов

Рассмотрим матричный элемент:

$$\langle k_1, \ldots, k_n, a, p | I | r \rangle = \langle n, a, p | I | r \rangle , \tag{2.1}$$

где $I = I(0)$, $I(x)$ – оператор нейтрального локального тока: $I(x) = i(\delta S/\delta\phi(x))S^+$, $\phi(x)$ –произвольное локальное электрически нейтральное поле. Если $\phi(x)$ –электромагнитное поле, то вместо I мы будем также писать j ; p и r – импульсы заряженной бесспиновой частицы (мезона) с массой m ; a-импульсы и поляризации произвольного числа нейтральных жестких частиц с полным импульсом A ; k_l – импульсы мягких фотонов с вещественными векторами поляризации ϵ_l . Обозначим $t = (p - r)^2$.

Исследуем зависимость (2.1) от $k_1, \ldots, k_n$. Из основных аксиом локальной теории поля[7] и равенства

$$(\delta^2 S/\delta A(x)\delta\phi(0))S^+ = -T(j(x)I(0)) \tag{2.2}$$

получаем систему уравнений, которым удовлетворяют матричные элементы (2.1) как функции фотонных импульсов $k_1, \ldots, k_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$

$$\langle n, a, p \,|I|\, r\rangle = -(2\pi)^3 \sum_N \Big[\frac{\delta(\vec{p}_N - \vec{p} - \vec{A} - \vec{K}_n)\langle n-1, a, p|\epsilon_n j|N\rangle\langle N|I|r\rangle}{p_N^0 - p^0 - A^0 - K_n^0 - i0} + \tag{2.3}$$

$$+ \frac{\delta(\vec{p}_N + \vec{k}_n - \vec{r})\langle n-1, a, p\,|I|\,N\rangle\langle N|\epsilon_n j|\,r\rangle}{p_N^0 + k_n^0 - r^0 - i0} \Big]$$

$$K_n = k_1 + \ldots + k_n . \tag{2.4}$$

Равенство (2.2) определено лишь для $x \neq 0$. В локальной теории к его правой части может быть добавлен произвольный квазилокальный оператор, содержащий $\delta(x)$, $\delta'(x)$ и т.д. Это означает, что к правой части (2.3) можно добавить полином от k_n. Однако мы будем искать лишь те члены матричного элемента (2.1), которые сингулярны, когда любой из фотониых импульсов стремится к нулю. Поэтому всякий произвол в (2.2), который ие дает в (2.3) сингулярных при $k_n \to 0$ членов, для нас несуществен.

Если интегралы по большим импульсам промежуточных частиц в (2.3) расходятся, то введем импульсы обрезания; они не дадут вклада в интересующие нас члены. Для того, чтобы избежать расходимости при интегрировании по малым импульсам промежуточных фотонов, припишем им малую массу λ. При этом нужно считать, что λ много меньше всех импульсов $|\vec{k}_i|$. В тех выражениях, которые конечны при $k_i \neq 0$, мы будем полагать $\lambda = 0$.

В уравнении (2.3) сингулярные при $k_n \to 0$ члены дают лишь те промежуточные состояния, которые не интегрируемым образом обращают в нуль знаменатели, если в них положить $\lambda = 0$ и $k_n = 0$.

В первом слагаемом в правой части (2.3) такие состояния должны содержать мезон с импульсом p_1, близким к p, нейтральные жесткие частицы с импульсами a_1, близкими к a, $n-1$ фотонов с импульсами q_i, близкими к k_i, $i = 1, \ldots, n-1$, и произвольное число фотонов с импульсами, близкими к нулю. При этом неинтегрируемый вклад дают лишь те члены в $\langle n-1, a, p|\epsilon_n j|N\rangle$, которые содержат $\delta(\vec{a} - \vec{a}_1)\delta(\vec{k}_1 - \vec{q}_1) \ldots \delta(\vec{k}_{n-1} - \vec{q}_{n-1})$, т.е. соответствуют несвязным диаграммам.

Во втором слагаемом интересующий нас вклад дают лишь состояния, содержащие мезон с импульсом p_1, близким к r, и произвольное число фотонов с импульсами, близкими к нулю.

Выпишем систему уравнений, дающих сингулярную зависимость от k_n при $k_n \to 0$, $n = 1, 2, \ldots$, не для самих матричных элементов (2.1), а для амплитуд

$I(\ell,p\,;\,r,i)$, определенных равенством x/

$$<\ell,p\,|I|\,r,i> = (m/\lambda)^{\beta} I(\ell,p;\,r,i), \tag{2.5}$$

где ℓ и i -квантовые числа нейтральных частиц и

$$\beta = \beta(t) = (a/\pi)(1 - pr\int_0^1 dx/p_x^2),\quad p_x = px + r(1-x), \tag{2.6}$$

a - постоянная тонкой структуры.

Мы имеем

$$I(n,a;p,r) = -(2\pi)\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{\ell!}(\Sigma\eta\int_g dq)_\ell\Big[\int_{g_1} dp_1(\frac{m}{\lambda})^b\frac{\delta(\vec p_1+\vec Q_\ell-\vec p-\vec k_n)\epsilon_n j(p;p_1,\ell)I(\ell,n-1,a,p_1;r)}{p_1^0+Q_\ell^0-p^0-k_n^0-i0}$$

$$+\int_{g_2} d\vec p_1(\frac{m}{\lambda})^b\frac{\delta(\vec p_1+\vec Q_\ell-\vec r+\vec k_n)I(n-1,a,p;p_1,\ell)\epsilon_n j(\ell,p_1;r)}{p_1^0+Q_\ell^0-r^0+k_n^0-i0}\Big]. \tag{2.7}$$

Здесь

$$b = -\beta((p-r)^2) + \beta((p-p_1)^2) + \beta((p_1-r)^2), \tag{2.8}$$

аргумент ℓ у I и j означает зависимость от фотонных импульсов $q_1,\ldots q_\ell$, сумма которых равна Q_ℓ , Σ означает суммирование по поляризациям этих фотонов, $\eta = -1$ для временной и 1 для пространственных поляризаций xx/; области интегрирования определяются неравенствами: $|\vec q| < \delta$ (область g), $||\vec p_1| - |\vec p|| < \delta_1(g_1)$, $||p_1| - |r|| < \delta_2(g_2)$ где δ , δ_1 , и δ_2 сколь угодно малы. При этом $|\vec k_n| \ll \delta$.

Покажем, что система (2.7) имеет следующее решение

$$I(n,a,p;r) = (F_{pr}(k))_n\, I(a,p;r) + \ldots, \tag{2.9}$$

где точками обозначены члены, конечные при стремлении к нулю одного фотонного импульса, а по другим фотонным импульсам не более сингулярные, чем $F_{pr}(k)$,

$$F_{pr}(k) = \epsilon f_{pr}(k),\qquad f_{pr}(k) = a_{pr}(k)(1+\gamma_{pr}(k)), \tag{2.10}$$

$$a_{pr}(k) = e\,(\frac{p}{pk} - \frac{r}{rk}), \tag{2.11}$$

$$\gamma_{pr}(k) = 2(pk\ln\frac{m^2}{rk} - rk\ln\frac{m^2}{pk})\,\beta'((p-r)^2), \tag{2.12}$$

---

x/ В п. 6 будет показано, что эти амплитуды конечны при $\lambda = 0$. См. также /10/.

xx/ Удобно пользоваться калибровкой, при которой вакуум не содержит временных и продольных фотонов. При этом полная система амплитуд состояний должна включать состояния с этими фотонами и суммирование по поляризациям промежуточных фотонов производится по формуле $\Sigma\eta\epsilon_m\epsilon_n = -g_{mn}$. В уравнение (2.7) входят лишь калибровочно-инвариантные выражения; поэтому в данном случае результат не зависит от выбора калибровки.

$\beta'(t)$ есть производная от функции $\beta(t)$ (2.6). Как мы увидим в п. 5, $\beta(t)$ пред-
ставляет собой релятивистское обобщение кулоновской траектории Редже. Поэтому ко-
эффициент при логарифмической зависимости от k в (2.10) определяется наклоном
кулоновской траектории Редже. С точностью до константы (по k) в (2.10) вместо
(2.12) можно также написать

$$\gamma_{pr}(k) = 2(p-r)k \ln \frac{m^2}{rk}\beta'(t). \tag{2.13}$$

Кроме амплитуд (2.9) в правую часть (2.7) входят также амплитуды с фотона-
ми в начальном и конечном состоянии. Однако они связаны с (2.9) условием симмет-
рии. В самом деле, матричный элемент $<k|I|q>$, где k и q –фотонные импульсы,
при $k \neq q$ получается из $<k, q|I|>$ заменой q на $-q$ x/. Выбирая $\delta<|\vec{k}_i|, i=1,\dots,n-1,$
получаем, что если (2.9) выполнено, то

$$I(n-1,p;r_f\,\ell) = (F_{pr_f}(k))_{n-1}(F_{pr_f}(-q))_\ell\, I(a,p;r) + \dots, \tag{2.14}$$

В случае электромагнитного тока из градиентной инвариантности следует, что
произведение матричного элемента (2.1) на вектор $k = K_n + A + p - r$ должно равнять-
ся нулю. Выражение (2.9) удовлетворяет этому условию, если в k можно пренебречь
K_n , т.е. если $A+p-r \neq 0$ (тормозное излучение). Однако в уравнение (2.7)
входят амплитуды $j(n,p;r)$ при сколь угодно малых значениях $p-r$. Для них вы-
ражение (2.9) не градиентно инвариантно. Однако его нетрудно сделать градиентно-
инвариантным, добавив члены порядка константы по каждому из k_i :

$$j(n,p;r) = (F_{pr}(k))_n[j(p;r) + \sum_{i=1}^{n}\frac{D_{pr}(k_i)}{\epsilon_i a_{pr}(k_i)} f((p-r)^2)], \tag{2.15}$$

где

$$j(p;r) = (p+r)f((p-r)^2), \tag{2.16}$$

$$D^n_{pr}(k) = d^{nm}_{pr}(k)\epsilon_m; \quad d^{nm}_{pr}(k) = e[k^n(\frac{p^m}{pk}+\frac{r^m}{rk}) - 2g^{nm}]. \tag{2.17}$$

Покажем теперь, что выражение (2.9), его следствие (2.14) и его градиентно-
инвариантное при $p \to r$ "дополнение" (2.15) удовлетворяют уравнению (2.7) с точ-
ностью до членов, которые конечны при $k_n \to 0$, а при $k_i \to 0$, $i=1,\dots,n-1$ не более
сингулярны, чем (2.9). Подставив в правую часть (2.7) выражения (2.9,14,15), вос-
пользовавшись равенством

$$\frac{\delta(\vec{a})}{a^0 - i0} = \frac{i}{(2\pi)^3}\int_{x^0>0} d^4x\, e^{-iax}, \quad a^0 \to a^0 - i0 \tag{2.18}$$

---

x/ В самом деле, $<k,q|I|> = \int d^4x\,\epsilon_n <k|\delta I/\delta A_n(x)|> e^{iqx}$, в то время как
при $k \neq q$ $<k|I|q> = \int d^4x\,\epsilon_n <k|\delta I/\delta A_n(x)|> e^{-iqx}$.

и просуммировав по ℓ, перепишем ее первое слагаемое в виде:

$$-i\int_{\delta_1}\tilde{d}\vec{p}_1\,(F_{p_1 r}(k))_{n-1}\left(\frac{m}{\lambda}\right)^b e^B\int_{x^0>0} d^4x\, e^{-i(p_1-p-k_n)x}\exp\left\{\int_\delta \tilde{d}q\,(He^{-iqx}-h)\right\}\times \tag{2.19}$$

$$\times[j^l(p;p_1)-\int_\delta \tilde{d}\vec{q}\,(1+\gamma_{p_1p}(q))d^{lj}_{pp_1}(q)\,l_{p_1rj}(q)\,e^{-iqx}\, f((p-p_1)^2)]\,\epsilon_{nl}\, I(a,p_1;r),$$

где

$$H=-\,l_{p_1p}(q)\,l_{p_1r}(q);\quad h=-\,a_{p_1p}(q)\,a_{p_1r}(q);\quad B=\int_\delta \tilde{d}\vec{q}\,h. \tag{2.20}$$

При $\lambda\to 0$ функция B равна

$$B=b\ln(\lambda/2\delta)+D\ , \tag{2.21}$$

где b дается формулой (2.8) и

$$D=\phi(p,r)-\phi(p_1,r)+\phi(p_1,p_1)-\phi(p,p_1) \tag{2.22}$$

$$\phi(p,r)=\frac{\alpha}{\pi}\,pr\int_0^1\frac{dx}{p_x^2}\,\frac{1}{2a}\ln\frac{1+a}{1-a}\,,\quad a=|\vec{p}_x|/p^0_x\ . \tag{2.23}$$

Таким образом, при $\lambda\to 0$

$$(m/\lambda)^b e^B=(m/2\delta)^b e^D \tag{2.24}$$

и выражение (2.19) не содержит явной зависимости от λ.

Импульс p_1 в этом выражении близок к p, поэтому в нем можно произвести разложение по $p_1\to p$ и оценить каждый член разложения. При этом существенно, что функции H и h в экспоненте обращаются в нуль при $p_1=p$, и эту экспоненту можно разложить в степенной ряд. Нетрудно убедиться, что только первый и второй члены этого ряда дают сингулярную зависимость при $k_n\to 0$.

Далее, члены с $\gamma(q)$ дают лишь константы при $k_n\to 0$. Причина этого состоит в том, что 1) γ_{pr} содержит лишь логарифмическую зависимость от фотонного импульса и 2) $\gamma_{pp}=0$. Таким образом, чтобы получить все сингулярные при $k_n\to 0$ члены матричного элемента (2.1), в правую часть (2.7) достаточно подставить этот матричный элемент лишь в главном (полюсном) приближении по k_n.

Разложение формфактора $f((p-p_1)^2)$, определенного равенствами (2.5,16), начинается с e: $f(0)=e$. В работе /14/ было показано, что в третьем порядке теории возмущений $f(t)$ является аналитической функцией t с разрезом от $t=4m^2$ до ∞. Поэтому следующий член разложения $f((p-p_1)^2)$ в этом порядке содержит $(p-p_1)^2$ и не дает интересующего нас вклада. Начиная с седьмого порядка возникают диаграммы с промежуточными фотонами, дающие разрез от нуля. Они могут дать члены порядка $e^7(p-p_1)^2 \ln(p-p_1)^2$. Однако, поскольку $(p-p_1)^2$ порядка $\vec{k}_n^2$, то даже эти члены не дают интересующего нас вклада.

Итак, с точностью до константы при $k_n \to 0$ выражение (2.19) равно

$$(F_{pr}(k))_{n-1}(-2ie\int_{\delta_1} d\vec{p}_1 \int_{x^0>0} d^4x e^{-i(p_1-p-k_n)x}\{p^i[1+\int_\delta d\vec{q}h(e^{-iqx}-1)] - \tag{2.25}$$

$$-\int_\delta d\vec{q}\, d^{ij}_{pp}(q)a_{prj}(q)e^{-iqx}\})\epsilon_{ni}\; I(a,p;r).$$

После интегрирования по x и $\vec{p}_1$, выражение в круглых скобках принимает вид:

$$e(\frac{p^i}{pk_n}+p^i\int_\delta d\vec{q}[\frac{h_1}{p(k_n-q)+i0}-\frac{h_2}{pk_n}]-\int_\delta d\vec{q}\frac{d^{ij}_{pp}(q)a_{prj}(q)}{p(k_n-q)+i0}), \tag{2.26}$$

где h_1 –функция h (2.20) при $p_1-p=\{\vec{p}(\vec{k}_n-\vec{q})/p^0, \vec{k}_n-\vec{q}\}$, h_2– та же функция при $p_1-p=\{\vec{p}\vec{k}_n/p^0, \vec{k}_n\}$. С точностью до константы при $k_n \to 0$ выражение (2.26) равно

$$e\frac{p^i}{pk_n} - a^i_{pr}(k_n)2\pi k_n \ln\frac{m^2}{pk_n}\beta'((p-r)^2). \tag{2.27}$$

Вычисление первого слагаемого правой части (2.7) закончено. Вычисляя аналогичным образом и второе слагаемое, получаем для него выражение (2.9), симметричное по всем k_i. Поэтому ограничение $|\vec{k}_n| \ll |\vec{k}_i|$, $i=1,\dots,n-1$, которое использовалось в ходе вычислений, несущественно.

Таким образом, выражение (2.9) и его следствия (2.14, 15) удовлетворяют системе (2.7) (а также системе (2.3)) с точностью до членов, регулярных по одному или нескольким фотонным импульсам и не более сингулярных, чем (2.9) – по остальным.

Единственность (2.9) следует из того обстоятельства, что главный (полюсной) по k_n член дает бесфотонное промежуточное состояние в (2.7), а также из единственности выражения (2.15).

Выражение (2.9) дает два первых члена разложения матричного элемента (2.1,5) по фотонным импульсам

$$\langle k_1,\dots,k_n, a,p\,|I|\,r\rangle = (\epsilon a_{pr}(k))_n[1+\sum_{i=1}^n 2(p-r)k_i \ln\frac{m^2}{rk_i}\beta'((p-r)^2)]\langle a,p\,|I|\,r\rangle\,. \tag{2.28}$$

Следующий член этого разложения (порядка константы по одному фотонному импульсу и k^{-1} по каждому из остальных) рассмотрен в Дополнении А. В Дополнении Б формула (2.28) поясняется с помощью диаграмм Фейнмана. При этом оказывается, что разложение (2.28) возникает в результате взаимной компенсации более сильных сингулярностей в отдельных диаграммах.

Заметим, что разложение (2.28) справедливо и для матричного элемента более общего вида:

$$\langle k_1,\dots,k_n, a, p\,|I|\, r, b, q_1,\dots,q_m\rangle, \tag{2.29}$$

а также для $\langle k_1,\dots,k_n, a|I|\bar{p}, r, b, q_1,\dots,q_m\rangle$, где q_i – импульсы мягких фотонов, b – квантовые числа нейтральных жестких частиц и $\bar{p}$ – импульс антимезона (при этом импульсы q_i и $\bar{p}$ будут входить в разложение (2.28) со знаком минус). Это следует из того обстоятельства, что матричный элемент с античастицей в начальном состоянии и матричный элемент с частицей в конечном состоянии выражаются одной и той же функцией с изменением знака перед импульсом частицы и заменой спиноров. Поэтому в формуле (2.28) произвольное число античастиц из начального состояния можно "перенести" в конечное (где они будут частицами), изменив знак перед их импульсами.

В дальнейшем мы рассмотрим некоторые приложения разложения (2.28).

3. Тормозное излучение

Рассмотрим процесс взаимодействия заряженного мезона с нейтральной жесткой частицей, в котором излучается произвольное число мягких фотонов. Пусть полная энергия этих фотонов ϵ фиксирована или может изменяться в заданном интервале. Найдем два первых члена разложения сечения этого процесса по ϵ.

Амплитуда такого процесса с излучением n мягких фотонов пропорциональна матричному элементу (2.1), где $v = k_1+\dots+k_n+A+p-r$ — импульс нейтральной частицы в начальном состоянии. Воспользовавшись для амплитуды разложением (2.28), получаем следующее выражение для дифференциального сечения рассматриваемого процесса при фиксированном ϵ:

$$d\sigma(\epsilon) = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\int d\vec{k}\, h(k)\right)_n \left[1+2\sum_{i=1}^{n}\gamma_{pr}(k_i)\right]\delta(p+A+K_n-r-v)\left(\frac{m}{\lambda}\right)^b d\sigma'. \tag{3.1}$$

Здесь $h(k) = -a^2_{pr}(k)$, $b = 2\beta$ (β дается формулой (2.6)), $d\sigma'$ – не проинтегрированное с δ – функцией выражение для дифференциального сечения процесса без излучения мягких фотонов, определенное амплитудой $I(a,p;r)$ (2.5). Интегралы по $d\vec{k}$ в (3.1) можно брать по области $k^0 \le \epsilon$, δ – функция при этом обеспечивает выполнение закона сохранения. Используя для нее представление Фурье, суммируя по n и переходя к пределу $\lambda \to 0$, получаем

$$d\sigma(\epsilon) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 x\, e^{i(p+A-r-v)x} \left(\frac{m}{2\epsilon}\right)^b \exp\{D + \int d\vec{k}\, h(k)(e^{ikx} - 1)\} \times \tag{3.2}$$

$$\times [1 + 2\int d\vec{k}\, h(k) \gamma_{pr}(k) e^{ikx}]\, d\sigma',$$

где

$$D = \phi(p,p) - 2\phi(p,r) + \phi(r,r), \tag{3.3}$$

ϕ дается формулой (2.23).

Рассмотрим теперь случай, когда фиксируется квадрат импульса, переданного заряженной частице $t = (p-r)^2$. Энергия $p^0 + A^0 (\approx r^0 + v^0 - \epsilon)$ по условию также фиксирована. Импульс же конечного состояния $\vec{p} + \vec{A}$ не фиксирован. Тогда выражение (3.2) нужно проинтегрировать по $d(\vec{p} + \vec{A})$.

Разложим все функции в (3.2), кроме $\exp\{i(p + A - r - v)x\}$, по $p^0 + A^0$ около значения $r^0 + v^0$ и учтем лишь первый член этого разложения. Следующий член этого разложения в ϵ/m раз меньше. Разложим далее эти же функции по $\vec{p} + \vec{A}$ около значения $\vec{r} + \vec{v}$. Интегрируя затем по $d(\vec{p} + \vec{A})$, мы получим $\delta(\vec{x})$ в первом члене разложения, $\nabla\delta(\vec{x})$ во втором и т.д. Легко проверить, что второй член с $\vec{\nabla}\delta(\vec{x})$ в ϵ/m раз меньше первого. Учитывая лишь первый член, получаем:

$$d\sigma(\epsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx^0\, e^{-i\epsilon x^0} \left(\frac{m}{2\epsilon}\right)^b \exp\{D + \int d\vec{k}\, h(k)(e^{ik^0x^0} - 1)\} \times \tag{3.4}$$

$$\times [1 + 2\int d\vec{k}\, h(k)\, \gamma_{pr}(k)\, e^{ik^0x^0}]\, d\sigma',$$

где импульсы жестких частиц связаны кинематикой процесса без излучения мягких фотонов при фиксированном t.

После интегрирования по углам вектора $\vec{k}$ и замены $k \to k\epsilon (k = |\vec{k}|)$, $x^0 \to x/\epsilon$ вычисление сечения (3.4) сводится к вычислению интеграла

$$R = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\{-ix - b \int_0^1 \frac{dk}{k} (e^{ikx} - 1)\} = \frac{\exp(Cb)}{\Gamma(-b)}, \tag{3.5}$$

где C – постоянная Эйлера, Γ – Γ –функция /10/, и интеграла

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\{-ix - b\int_0^1 \frac{dk}{k}(e^{ikx} - 1)\} \int_0^1 dk\, e^{ikx} = -\frac{R}{b}, \tag{3.6}$$

который интегрированием по частям сводится к предыдущему. В результате получаем

$$d\sigma(\epsilon) = \frac{\exp(Cb + D)}{\Gamma(-b)} \left(\frac{m}{2\epsilon}\right)^b \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{g}{b} \ln\frac{m}{\epsilon}\right) d\sigma' + O\left(\left(\frac{m}{\epsilon}\right)^b\right), \tag{3.7}$$

где

$$b = \beta'((p-r)^2)\int \frac{d\vec{n}}{(2\pi)^3}(-a^2_{pr}(n))\,2(p-r)n\ ,\ n = (1,\vec{n}),\ |\vec{n}| = 1 \tag{3.8}$$

и $O(x)$ означает величину порядка x.

Формула (3.7) дает два первых члена асимптотического разложения сечения тормозного излучения по энергии излучения ϵ. Если эта энергия не фиксирована, а может меняться от 0 до δ, то выражение (3.7) нужно проинтегрировать по $d\epsilon$ в этих пределах:

$$d\sigma(\Sigma k^0_i \le \delta) = \frac{\exp(Cb+D)}{\Gamma(-b)}\left(\frac{m}{2\delta}\right)^b\left(1+\frac{b}{1-b}\,\delta \ln\frac{m}{\delta}\right)d\sigma' + O\left(\left(\frac{m}{\delta}\right)^{b-1}\right). \tag{3.9}$$

Эта формула дает зависимость сечения от разрешающей способности аппаратуры по энергии δ.

Если мягкие фотоны тормозного излучения фиксируются, то вероятность процесса определяется непосредственно формулой (2.28). В частности, если при заданном $\delta \ll m$ регистрируются фотоны с энергиями k такими, что $\delta < k \ll m$, то в формуле (3.9) можно разложить сечение $d\sigma'$ по k с помощью (2.28).

4. Рассеяние мягких фотонов

Рассмотрим рассеяние мягкого фотона с импульсом k и вектором поляризации ν на заряженном мезоне и найдем два первых члена разложения полного сечения этого процесса по k. Амплитуда этого процесса с излучением n фотонов пропорциональна $\langle q_1,\dots,q_n,p|\nu j|r\rangle$, где $k = q_1+\dots+q_n+p-r$. При $k\to 0$ $p-r$ также стремится к нулю, поэтому для разложения амплитуды воспользуемся разложением (2.15). Запишем с помощью (2.5,15) полное сечение рассеяния с излучением n фотонов, в котором при наличии δ – функции закона сохранения 4-импульса – можно интегрировать по каждому $d\vec{q}$ по области $rq \le rk$, и просуммируем по всем n, для чего представим δ -функцию закона сохранения 4-импульса в виде интеграла Фурье. Дальнейшие вычисления аналогичны вычислениям п. 2. Переходя к пределу $\lambda\to 0$, получаем конечное выражение, содержащее малые параметры k и $p-r$. Разлагая по этим параметрам и оценивая каждый член разложения подобно тому, как это было сделано в п. 2, получаем, что с точностью до членов порядка $\vec{k}^2$ полное сечение равно

$$\sigma(k,\nu) = \int d\Omega_q \frac{d\sigma_2(q;k,\nu)}{d\Omega_q}\left(1 + b\ln\frac{m^2}{rk}\right), \tag{4.1}$$

где $d\sigma_2(q;k,\nu)/d\Omega_q$ – дифференциальное сечение процесса в низшем порядке теории возмущений, просуммированное по поляризациям конечного фотона, $q=r-p+k$ – импульс конечного фотона, коэффициент $b=2\beta$ с интересующей нас точностью равен

$$b=-4qk\beta'(0). \qquad (4.2)$$

Усредняя по ν, получаем следующее разложение полного сечения:

$$\sigma(k)=\sigma_T\left(1-\frac{4a}{3\pi}\frac{k^2}{m^2}\ln\frac{m}{k}\right)+O(k^2), \qquad (4.3)$$

где k – энергия фотона в лабораторной системе и σ_T – томсоновское сечение с кинематической поправкой

$$\sigma_T=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{a}{m}\right)^2\left(1-\frac{2k}{m}\right). \qquad (4.4)$$

Сечение комптоновского рассеяния, записанное в форме

$$\sigma(k)=\sigma_T\left(1-[2md(k)/a]k^2\right), \qquad (4.5)$$

определяет так называемую полную динамическую поляризуемость рассеивателя $d(k)$. Из (4.3) получаем, что при малых k

$$d(k)=\frac{2a^2}{3\pi m^3}\ln\frac{m}{k}+O(k^0). \qquad (4.6)$$

При $k\to 0$ динамическая поляризуемость заряженной частицы обращается в бесконечность.

5. Инфракрасные особенности комптоновского рассеяния

До сих пор мы рассматривали эффекты излучения реальных мягких фотонов. Однако разложение (2.28) позволяет изучить также влияние виртуальных мягких фотонов на упругие процессы, если воспользоваться методом дисперсионных соотношений Н.Н. Боголюбова /7/. Рассмотрим амплитуду упругого рассеяния фотона на мезоне, приписав малую массу λ фотонам в промежуточных состояниях. Она равна матричному элементу

$$\langle k_2,p|\epsilon_1 j|r\rangle=\epsilon_{2a}\epsilon_{1b}\int d^4x\, e^{ik_2x}\langle p|\delta j^b/\delta A_a(x)|r\rangle=\left(\frac{m}{\lambda}\right)^{\beta(t)}\epsilon_{2a}\epsilon_{1b}T^{ab}, \qquad (5.1)$$

где $k_1=k_2+p-r$ и ϵ_1 – импульс и вектор поляризации начального фотона. Остальные обозначения те же, что в п. 2. Как и в п. 2, мы выделили зависящий от λ фактор $(m/\lambda)^\beta$, обозначив оставшуюся амплитуду через T. Исследуем зависимость T от $s=(r+k_1)^2$ вблизи порога $s=m^2$ при фиксированном $t<0$ и

$\lambda = 0$. Нашей целью будет найти первые члены разложения T по $(s-m^2)/m^2$ и оценить следующие члены.

Пусть сначала $\lambda \neq 0$. Положим в экспоненте в (5.1)

$$k_1^2 = k_2^2 = r < \tfrac{1}{4} t \quad . \tag{5.2}$$

Тогда вместо (5.1) мы получим функцию T_r, удовлетворяющую дисперсионным соотношениям по s. Запишем эти соотношения в следующем виде[x/]

$$T_r(s,t) = \int_{m^2}^{(m+\delta)^2} \frac{T_{1r}(s',t)}{s'-s-i0} + R \;, \tag{5.3}$$

где δ сколь угодно мало, но много больше, чем λ. Функция R конечна при $s = m^2$ и мы не будем ее рассматривать. Абсорбтивная часть амплитуды $T_{1r}(s,t)$ в (5.3) при $s \leq (m+\delta)^2$ выражается через амплитуды (2.5), соответствующие матричным элементам электромагнитного тока

$$T_{1r}(s,t) = -(2\pi)^3 \int \tilde{d}\vec{p}_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\Sigma \eta \int \tilde{d}\vec{q})_n\, \delta(P - p_1 - Q_n) \left(\frac{m}{\lambda}\right)^b j^a(p;p_1,n) j^b(n,p_1;r) \,, \tag{5.4}$$

где $P = r + k_1$. Благодаря δ-функции интеграл по $d\vec{p}_1$ можно брать по области $p_1 P \leq s$, интегралы по $d\vec{q}$ – по области $qP \leq s - m\sqrt{s}$. Поскольку s в (5.4) сколь угодно близко к m^2, и, следовательно, фотонные импульсы близки к нулю, воспользуемся для амплитуд j разложением (2.28). Подставляя вместо δ функции ее интеграл Фурье и суммируя по n, получаем вместо (5.4)

$$T_{1r}(s,t) = -\frac{1}{2\pi} \int \tilde{d}\vec{p}_1 \int d^4x\, e^{-i(P-p_1)x} \left(\frac{m/2}{\sqrt{s}-m}\right)^b \exp\{D + \int \tilde{d}\vec{q}\, h\,(e^{iqx} - 1)\} \times \tag{5.5}$$

$$\times \{1 + \int \tilde{d}\vec{q}\, h [\gamma_{p_1 p}(q) + \gamma_{p_1 r}(q)] e^{iqx}\} j^a(p;p_1) j^b(p_1;r) ,$$

где функция D в системе координат, где $\vec{P} = 0$, дается формулами (2.22,23). Это выражение не содержит явной зависимости от λ.

В системе координат, где $\vec{P} = 0$, интегрирование по $d\vec{p}_1$ в (5.5) идет по области $\vec{p}_1^{\,2} \leq s - m^2$. Поэтому подинтегральную функцию (кроме члена $\exp(-i\vec{p}_1\vec{x})$, где $\vec{p}_1$ умножается на произвольно большой вектор $\vec{x}$) можно разложить по степеням $\vec{p}_1$ и оценить каждый член разложения. При таком разложении интегрирование по $\vec{p}_1$ дает δ-функцию от $\vec{x}$ и ее производные, поэтому интегрирование по $d\vec{x}$ производится автоматически и остается вычислить интегралы по dx_0. Интегралы такого типа рассмотрены в п. 3.

---

x/ Это соотношение означает несколько соотношений для инвариантных амплитуд.

Интересующий нас вклад дают два члена разложения показателя b и первый член разложения остальных выражений. Мы имеем

$$T_{1r}(s,t) = -\frac{\exp(Cb_1+D_1)}{m^2\Gamma(-b_1)}\left(\frac{m/2}{\sqrt{s}-m}\right)^{1+b_1}\left[1+\frac{\sqrt{s}-m}{m}\ln\frac{m}{\sqrt{s}-m}2\beta'(r_1)r_1\right]M^{ab}(r_1) + + O\left(\left(\frac{m^2}{s-m^2}\right)^{b_1}\right), \tag{5.6}$$

где индекс 1 означает, что соответствующие функции взяты при $p_1=\{m,\vec{0}\}$ в системе координат, где $\vec{P}=0$; $r_1=(p-p_1)^2$ при тех же условиях,

$$M^{ab}(r) = (p+P)^a(P+r)^b f^2(r)\ ;\quad f(0)=e.; \tag{5.7}$$

Разлагая, наконец, в (5.6) по $s-m^2$, получаем следующее выражение для абсорбтивной части амплитуды

$$T_{1r}(s,t) = -\frac{\exp(Cb_0+D_0)}{m^2\Gamma(-b_0)}\left(\frac{m^2}{s-m^2}\right)^{1+b_0}M^{ab}(r) + O\left(\left(\frac{m^2}{s-m^2}\right)^{b_0}\right) \tag{5.8}$$

(члены с логирифмом сократились). Индекс 0 означает, что в функциях, ранее отмеченных индексом 1, нужно положить $s=m^2$.

Величина b_0 в (5.8) равна $b_0=2\beta(r)-\beta(t)$. При $b_0>-1$ абсорбтивная часть (5.8) обращается в бесконечность в точке $s=m^2$. Однако при условии (5.2) $b_0<0$, поэтому абсорбтивная часть (5.8) в соответствии с общей теорией [7] интегрируема. Однако при $r=0$ $b_0=-\beta(t)>0$ (при $t<0$) и абсорбтивная часть в обычном смысле не интегрируема. Поэтому мы должны подставить (5.8) в (5.3) при $r<\frac{1}{2}t$, т.е. при $b_0<0$, выполнить интегрирование и лишь затем положить $r=0$. Это эквивалентно тому, что мы определим абсорбтивную часть (5.8) при $r=0$

$$T_1(s,t) = -\frac{\exp(-C\beta+\delta)}{m^2\Gamma(\beta)}\left(\frac{s-m^2}{m^2}\right)_+^{\beta-1}M^{ab}(0) + O\left(\left(\frac{s-m^2}{m^2}\right)_+^{\beta}\right), \tag{5.9}$$

где

$$\delta=\delta(t) = -(\alpha/\pi)\left(1+pr\int_0^1 dx\ln|2x-1|/p_x^2\right), \tag{5.10}$$

как обобщенную степенную функцию от $x=(s-m^2)/m^2$ вида [17]

$$f(x,a) = \frac{x_+^a}{\Gamma(a+1)}\ ,\quad x_+^a = \begin{cases} x^a, & x>0 \\ 0, & x\le 0\ . \end{cases} \tag{5.11}$$

Интеграл $\int_{-\delta}^{\delta} f(x,a)\phi(x)dx$, где $\phi(x)$ регулярна в нуле, определяется как аналитическое продолжение при $a_0 \to a$ интеграла $\int_0^\delta f(x, a_0)\phi(x)\,dx$, где $Re\, a_0 > -1$. Он существует при любых a . При $a = -n$, n - целое положительное

$$f(x, -n) = \delta^{(n-1)}(x). \qquad (5.12)$$

Таким образом, при $r = 0$ и $t < 0$ амплитуда T удовлетворяет дисперсионному соотношению (5.3), где T_1 вблизи $s = m^2$ представляет собой обобщенную степенную функцию (5.9).

В окрестности $s = m^2$ амплитуда T равна

$$T(s, t) = -\frac{\pi \exp(-C\beta + \delta)}{m^2\Gamma(\beta)\sin\pi\beta}\left(\frac{m^2 - s}{m^2}\right)^{\beta - 1} M^{ab}(0) + O\left(\left(\frac{m^2 - s}{m^2}\right)^{\beta}\right) + const \qquad (5.13)$$

$$\beta(t) < 0 \quad \text{при} \quad t < 0.$$

Первый член этого выражения имеет полюса при

$$\beta(t) = 1, 2, ..., \qquad (5.14)$$

Решения этих уравнений лежат в интервале $0 < t < 4m^2$ и в нерелятивистском приближении определяют кулоновские уровни в t -канале. Кроме того, они дают и часть тонкой структуры кулоновского спектра, связанную с относительным движением частиц. Однако при $\beta \geq 1$ первый член в (5.13) становится регулярным в точке $s = m^2$, следовательно, он становится сравнимым с другими членами, обозначенными в (5.1) через $const$. Поэтому нельзя сказать, что полюса, определяемые уравнением (5.14), присутствуют в полной амплитуде. Разумно допустить, что эти полюса сохраняются в полной амплитуде, если пренебречь фотон-фотонным взаимодействием и виртуальными фотонными линиями, которые испускаются и поглощаются до того, как поглощен начальный фотон или после того, как испущен конечный (для перекрестных диаграмм слова " до" и "после" нужно поменять местами). В этом случае уравнение (5.14) давало бы связанные состояния заряженного мезона и его античастицы, если пренебречь распадом этих состояний и "внутренней электромагнитной структурой" мезонов.

6. О факторизации инфракрасных расходимостей

Выше мы рассматривали матричные элементы (2,1), описывающие процессы с фиксированным числом частиц, вводя фиктивную фотонную массу λ и выделяя затем зависимость от λ в виде фактора (2.5). Оставшиеся после такого выделения амплитуды в тех случаях, когда они вычислялись до конца в какой-либо области (как в п.п. 4 и 5), оказывались конечными при $\lambda = 0$. Покажем, что это обстоятельство неслучайно: амплитуда I в (2.5) конечна при $\lambda = 0$.

В самом деле, физически очевидно, что инфракрасные расходимости, а, следовательно, и зависимость от λ, должны отсутствовать, если импульсы заряженных частиц не изменяются. Поэтому матричный элемент $< a,p\,|II|\,p,a >$, где I -нейтральный локальный ток, p -импульс заряженной частицы и a -квантовые числа нейтральных частиц, должен быть конечным при $\lambda = 0$. Разложим произведение токов в этом выражении по полной системе амплитуд. Из независимости отдельных членов этого разложения, соответствующих физически различным состояниям, следует, что каждый такой член должен быть конечным при $\lambda = 0$. Рассмотрим член, соответствующий промежуточному состоянию с одной заряженной частицей с импульсом r, произвольным фиксированным числом нейтральных частиц с квантовыми числами b и энергиями больше δ, где δ сколь угодно мало, но много больше λ, и произвольным числом мягких фотонов с импульсами q_i и энергиями меньше δ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\Sigma\eta \int_{\delta} d\vec{q} \right)_n < a,p\,|I|\,r,b,n > < n,b,r\,|I|\,p,a > . \tag{6.1}$$

Подставляя сюда выражение (2.5) и ограничиваясь первым членом разложения по q_i, получаем, что с точностью до членов, пренебрежимо малых при малом δ, это выражение равно

$$\left(\frac{m}{2\delta}\right)^{2\beta((p-r)^2)} e^{D} I(a,p\,;r,b) I(b,r\,;p,a), \tag{6.2}$$

где D дается формулой (3.3). Из того, что (6.1), а, следовательно, и (6.2), конечно при $\lambda = 0$, следует, что амплитуда $I(a,p\,;r,b)$ конечна при $\lambda = 0$.

7. Заключение

В заключение подчеркнем, что все полученные выше формулы вытекают из общих принципов локальной теории поля (включая квантовую электродинамику), поэтому они должны выполняться в любой из известных в настоящее время теорий. Далее, мы нигде не делали разложений по константе электромагнитной связи. Поэтому полученные формулы были бы справедливы и в случае, если бы эта константа была сколь угодно большой. Заметим, что в формулы тормозного излучения п. 3 эта константа при больших $|t|$ входит в комбинации $a \ln \frac{-t}{m^2}$. Поэтому при больших значениях модуля квадрата импульса, переданного заряженной частице, разложение по a в этих формулах неприменимо и при малых a.

Ограничение, которое было сделано, состоит в том, что мы рассматривали процессы с одной заряженной частицей, не имеющей спина. Однако это ограничение не принципиальное.

Полученные результаты нетрудно обобщить на случай заряженной частицы со спином 1/2. Формула (2.28) и результаты п.п. 3,6 справедливы и в этом случае. Формула (4.3) соответствует рассеянию на неполяризованной частице. В п. 5 нужно лишь ввести суммирование по поляризациям промежуточной заряженной частицы в формуле (5.4) и заменить формулу (5.7) на

$$M^{ab}(r) = \bar{u}(p)\Gamma^{a}(\hat{p} + m)\Gamma^{b}u(r)f^{2}(r),$$

$$\Gamma^{a} = \gamma^{a} + \mu' \sigma^{ab}(p-r)_{b},$$

где μ' – дополнительный магнитный момент заряженной частицы.

Обобщение на случай произвольного числа заряженных частиц также может быть проделано.

Автор благодарен участникам семинаров ЛТФ ОИЯИ и МИАН СССР им. В.А.Стеклова за обсуждение этой работы и С.Б. Герасимову, Л.И. Лапидусу и В.С. Барашенкову за обсуждение вопроса о поляризуемости заряженной частицы.

Дополнение А.

О следующем члене разложения по импульсам мягких фотонов

Рассмотрим матричный элемент (2.1) для электромагнитного тока. Обозначаем его через T_n и найдем, следуя Лоу /5/, первые члены его разложения по степеням компонент импульса k_n. Введем в фотонный пропагатор массу λ и рассмотрим связные диаграммы, соответствующие этому матричному элементу. Рассмотрим сначала вклад диаграмм, в которых фотон с импульсом k_n и выходящий (или входящий) мезон могут буть отделены от остальной части диаграммы, если перерезать одну мезонную линию. Он равен произведению вершинной функции, соответствующей мягкому фотону и выходящему (или входящему) мезону, на полную функцию распространения мезона и на вершинную функцию Λ_{n-1}, соответствующую всем остальным частицам:

$$T_n^{(1)} = e\,\frac{p\epsilon_n}{pk_n}\,\Lambda_{n-1}(p+k_n, r) - e\,\frac{r\epsilon_n}{rk_n}\,\Lambda_{n-1}(p, r-k_n). \qquad \text{(A.1)}$$

Здесь у функции Λ_{n-1} опущены все аргументы, кроме мезонных импульсов, через посредство которых она зависит от k_n. Эта функция имеет следующую структуру:

$$\Lambda_{n-1}(p_2, p_1) = (p_2 + p_1)f_{n-1} + (p_2 - p_1)g_{n-1} + R_{n-1}. \qquad \text{(A.2)}$$

где f и g –скалярные функции x/, зависящие от $p_1^2, p_2^2, (p_1 - p_2)^2$, от произведений

x/ Число спинорных частиц сохраняется, поэтому они входят в T_n парами.

p_1 и p_2 на векторы, соответствующие остальным частицам, а также от произведений этих последних друг на друга; R –векторная функция, которая разлагается по векторам остальных частиц с коэффициентами, зависящими от тех же аргументов, что и f и g.

Разложим вершинные функции в (A.1) по k_n и учтем два первых члена разложения:

$$\Lambda_{n-1}(p+k,r) = [1+2(p-r)k\frac{\partial}{\partial t} + \sum_c ck\frac{\partial}{\partial pc}]T_{n-1} + 2pk\frac{\partial}{\partial p^2}\Lambda_{n-1} + kf_{n-1} + kg_{n-1}, \qquad (A.3)$$

где Σ означает суммирование по всем векторам задачи, кроме p и r. Аналогично разлагается и $\Lambda_{n-1}(p,r-k)$. Эти разложения справедливы лишь при $\lambda \neq 0$.

Рассмотрим вклад всех остальных диаграмм. Они не дают полюса при $k_n = 0\ (\lambda \neq 0)$, поэтому их достаточно учесть при $k_n = 0$:

$$T_n^{(2)} = p\epsilon_n x + r\epsilon_n y + \sum_c c\epsilon_n z_c + \epsilon_n w. \qquad (A.4)$$

Коэффициенты x, y, z_c и w не зависят от k_n, ϵ_n и имеют ту же структуру, что и соответствующие коэффициенты в (A.3).

Из градиентной инвариантности следует, что сумма выражений (A.1,4) с заменой ϵ_n на k_n обращается в нуль. Это позволяет выразить все коэффициенты в (A.4) через коэффициенты разложения $\Lambda_{n-1}(p+k_n,r)$ и $\Lambda_{n-1}(p,r-k_n)$ в (A.1,3). Складывая затем выражения (A.1,4), получаем следующее разложение T_n по степеням k_n:

$$T_n = \{A(k_n)[1+2(p-r)k_n\frac{\partial}{\partial t}] + \sum_c B_c(k_n)\}T_{n-1} + D(k_n)f_{n-1} + k_n A(k_n)g_{n-1}, \qquad (A.5)$$

где

$$A(k) = \epsilon a(k), \qquad B_c(k) = e\left(\frac{p\epsilon\, ck}{pk} - c\epsilon\right)\frac{\partial}{\partial pc} + (p \to r), \qquad (A.6)$$

$a(k)$ и $D(k)$ даются формулами (2.11,17). Существенно, что производные по p^2 и r^2 в окончательное выражение (A.5) не вошли.

При выводе (A.5) предполагалось, что k_n много меньше всех остальных импульсов. Пусть теперь k_{n-1} много меньше всех других импульсов, кроме k_n, причем по-прежнему $k_n \ll k_{n-1}$. Тогда мы можем разложить T_{n-1} в (A.5) по k_{n-1}. Учтем в полюсных по k_n членах два члена этого разложения, а в членах порядка константы – один. Тогда мы получим разложение по k_n и k_{n-1}, все члены которого симметричны относительно их перестановки, кроме члена, содержащего

$$S(k_n,k_{n-1}) = [B_{k_{n-1}}(k_n) + B_{\epsilon_{n-1}}(k_n)]A(k_{n-1}). \qquad (A.7)$$

Однако этот член нетрудно симметризовать. Воспользовавшись условием $k_n \ll k_{n-1}$, заменим один из двух множителей pk_{n-1} в знаменателе (A.7) на $pk_n + pk_{n-1}$. То же самое проделаем и с rk_{n-1}. Тогда мы получим симметричное выражение

$$S(k_i, k_j) = \frac{e^2}{p(k_i + k_j)} \left(k_i \frac{p\epsilon_i}{pk_i} - \epsilon_i\right)\left(\epsilon_j - k_j \frac{p\epsilon_j}{pk_j}\right) - (p + r) \qquad (A.8)$$

и разложение по k_n, k_{n-1} будет справедливо при любых k_n, k_{n-1}, много меньших всех остальных импульсов. Продолжая разложение по оставшимся импульсам мягких фотонов, получаем два первых члена разложения T_n по импульсам $k_1, \ldots, k_n$, много меньшим всех остальных импульсов:

$$T_n = (A(k))_n \Big\{ \Big[1 + \sum_{i=1}^{n} \Big(2(p-r)k_i \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{a} \frac{D_a(k_i)}{A(k_i)} \Big) + \sum_{i<j}^{n} \frac{S(k_i, k_j)}{A(k_i)A(k_j)} \Big] T + \sum_{i=1}^{n} \frac{D(k_i)}{A(k_i)} f + \sum_{i=1}^{n} k_i g \Big\}, \qquad (A.9)$$

где T есть матричный элемент (2.1) без мягких фотонов в конечном состоянии, f и g –инвариантные коэффициенты его разложения, стоящие при векторах $p + r$ и $p - r$.;

Заметим, что эта формула дает два первых члена амплитуды, когда все $k_i \to 0$. Однако не все слагаемые второго члена дают одинаковый вклад в сечение и в правую часть уравнения (2.3,7). В самом деле, слагаемое с $S(k_i, k_j)$, содержащее в знаменателе сумму $pk_i + pk_j$, после умножения на фазовый объем $d\tilde{\vec{k}}_i\, d\tilde{\vec{k}}_j$ оказывается регулярным, в отличие от членов, содержащих только pk_i или pk_j.;

Формула (A.9) есть обобщение результатов Лоу [5] на случай испускания произвольного числа мягких фотонов в процессах взаимодействия заряженного мезона с жесткой нейтральной частицей.

Недостатком таких формул является то, что если их рассматривать не в низшем порядке по e, то в них, вообще говоря, нельзя перейти к пределу $\lambda \to 0$. Если воспользоваться формулой факторизации инфракрасных расходимостей (2,5), то мы получим, что из-за присутствия производной по t правая часть (A.9) содержит член

$$(A(k))_n \sum_{i=1}^{n} 2(p-r)k_i \ln \frac{m}{\lambda} \beta'(t) T \qquad (A.10)$$

с более сингулярной зависимостью от λ, чем левая Формула (A.9) справедлива при $\lambda \to 0$ (для амплитуд (2.5)) в двух случаях: 1) если в ней ограничиться первым – полюсным членом по k_i и 2) если в ней во втором члене разложения по k_i

удержать лишь первый член разложения по $p-r$. В первом случае (А.9) совпадает с (2.28), во стором случае – с (2.15), если в этих формулах сделать соответствующие приближения (как было замечено выше, в (А.9) можно опустить члены с $S(k_i\, k_j)$.

Появление члена (А.10) указывает, что в общем случае справедливое в пределе $\lambda \to 0$ разложение должно содержать члены с логарифмической зависимостью от k_i что и было показано в п. 2. Отметим близкое сходство этого члена со вторым членом в (2.28). Это сходство позволяет написать следующее разложение для амплитуд (2.5)

$$j(k_1,\ldots,k_n,a,p;r) = (A(k))_n \{[1+\sum_{i=1}^{n}(\gamma(k_i)+2(p-r)k_i\frac{\partial}{\partial t} + \sum_a \frac{B_a(k_i)}{A(k_i)} + \sum_{i<j}^{n}\frac{S(k_i,k_j)}{A(k_i)A(k_j)}]\,j(a,p;r) + \sum_{i=1}^{n}\frac{D(k_i)}{A(k_i)}\,f + \sum_{i=1}^{n} k_n\, g\}, \tag{А.11}$$

где f и g – коэффициентные функции амплитуды $j(a,p;r)$ и $\gamma(k)$ дается формулой (2.12). Члены с $S(k_i,k_j)$ можно опустить.

Дополнение Б. Теория возмущений

Рассмотрим сингулярные при $k \to 0(\lambda\to 0)$ члены матричного элемента $T=\langle k,p|j|r\rangle$ во 2-ом и 4-ом порядках теории возмущений. Учитывая свойство произведения вершинной функции с реальным фотоном на полную функцию распространения мезона, использованное в формуле (А.1), получаем, что интересующий нас вклад дают диаграммы, изображенные на рисунке, и перекрестно-симметричные диаграммы. Рассмотрим вклад диаграммы 1

$$T_1 = e(p\epsilon/pk)\,\Gamma_1(p+k,r). \tag{Б.1}$$

Вершинная функция Γ_1 в этом выражении при $\lambda=0$ и $k\to 0$ ведет себя как $\ln k$, поэтому T_1 имеет сингулярность $k^{-1}\ln k$. То же самое относится и к диаграмме 2 после выделения из нее зависимости от λ (2.5). Однако нетрудно проверить, что

$$\Gamma_1(p+k,r) = \Gamma_1(p,r) - \frac{1}{e}\,T_{2,3}(\epsilon\to k) + O(k\ln\lambda) + O(k), \tag{Б.2}$$

где $T_{2,3}(\epsilon\to k)$–вклад диаграмм 2 и 3 с заменой ϵ на k. Точно так же вклад диаграммы 4 равен

$$T_4 = e(p\epsilon/pk)\Gamma_4(p+k); \quad \Gamma_4(p+k) = \Gamma_4(p) - \frac{1}{e}\,T_5(\epsilon\to k) + O(k). \tag{Б.3}$$

Вклад всех диаграмм, изображенных на рисунке, равен

$$e(p\epsilon/pk)\langle p|j|r\rangle + T_{2,3,5} - (p\epsilon/pk)\,T_{2,3,5}(\epsilon\to k) + O(\ln\lambda) + O(1). \tag{Б.4}$$

Разности $T_1-(p\epsilon/pk)T_1(\epsilon\to k)$ менее сингулярны, чем вклады отдельных диаграмм, поэтому выражение (Б,4) имеет вид:

$$[e(p\epsilon/pk)+f(k)]<p|j|r>+O(\ln\lambda)+O(1), \tag{Б.5}$$

где

$$f(k)=\frac{4e^3i}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4q}{q^2[(p+k+q)^2-m^2][(r+q)^2-m^2]}\{r-(p/pk)rk-\frac{2pr[q-(p/pk)qk]}{(p+q)^2-m^2}\}\epsilon= \tag{Б.6}$$

$$=e(r\epsilon-\frac{p\epsilon}{pk}rk)2\beta'(p-r)^2)\ln\frac{m^2}{pk}+O(1).$$

Добавляя сюда вклад перекрестно-симметричных диаграмм, получаем

$$T=e(\frac{p\epsilon}{pk}-\frac{r\epsilon}{rk})[1+2(pk\ln\frac{m^2}{rk}-rk\ln\frac{m^2}{pk})\beta'((p-r)^2)]<p|j|r>+O(\ln\lambda)+O(1) \tag{Б.7}$$

что совпадает с результатом п. 2.

Заметим, что мы не учитывали диаграммы, которые сингулярны при $\lambda\to 0$ и фиксированном k. Они, а также члены $O(\ln\lambda)$ в (Б.7) дают вклад в инфракрасный множитель в (2.5), их вклад в функцию j конечен при $k=0$, $\lambda=0$.

Литература

1. W. Thirring, Phil. Mag. 41, 1193 (1950).
2. F.E. Low, Phys. Rev. 96, 1428 (1954).
3. M. Gell-Mann, M.L. Goldberger, Phys. Rev. 96, 1433 (1954).
4. Л.И. Лапидус, Чжоу-Гуан-чжао, ЖЭТФ, 39, 1286 (1960).
5. F.E. Low, Phys. Rev. 110, 947 (1958).
6. С.М. Биленький, Р.М. Рындин, ЖЭТФ, 40, 819 (1961).
7. Н.Н. Боголюбов, Б.В. Медведев, М.К. Поливанов, Вопросы теории дисперсионных соотношений. Физматгиз, Москва, 1958 г.
   Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, Москва, 1957 г.
8. Б.В. Медведев, ДАН СССР 135, 1087, (1960); ЖЭТФ, 40, 826 (1961).
   Б.В. Медведев, М.К. Поливанов, ЖЭТФ, 41, 1130 (1961).
9. D.R. Yennie, S.C. Frautschi, H. Suura, Ann. of Phys. 13, 379 (1961).
10. K.F. Eriksson, Nuovo Cim. 19, 1010 (1961).
11. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков, ДАН СССР, 113, 529 (1957).
12. A.A. Logunov, A.R. Frenkin, Nucl. Phys. 7, 573 (1958).
13. R.E. Prange, Phys. Rev. 110, 240 (1958).
14. Л.Д. Соловьев, ЖЭТФ, 44, 306 (1963).

15. Л.Д. Соловьев, Ю.Я. Юшин, ЖЭТФ, 45, 1202 (1963).

16. L.D.Soloviev, Phys. Lett. 5, 51 (1963).

17. И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, Москва, 1958 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 мая 1964 г.