ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 1690

П. Винтерниц, Я.А. Смородинский, М. Углирж

К ТЕОРИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1964

Винтерницц П., Смородинский Я.А., Углирж М. Р-1690

К теории четырехмерного момента количества движения

Дан явный вид компонент оператора четырехмерного момента количества движения в четырех системах координат в пространстве Лобачевского релятивистских скоростей и полные наборы коммутирующих операторов, определяющие данные системы. Рассмотрены классические величины, соответствующие инвариантам подгрупп группы Лоренца и электромагнитные поля, в которых они являются интегралами движения.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

Р-1690

Winternitz P., Smorodinsky J.A., Uhlíř M.

On Relativistic Angular Momentum Theory

Explicit relations are given for the components of the relativistic angular momentum in four coordinate systems in the Lobachevsky space of relativistic velocities together with the complete sets of commuting operators determining these systems. Classical dynamical quantities corresponding to subgroup of the Lorentz group and the electromagnetic fields, in which these are integrals of motion are considered.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.

P - 1690

П. Винтернитц, Я.А. Смородинский, М. Углирж

К ТЕОРИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

1. Введение[x]

В работе[1] рассмотрены разложения амплитуды рассеяния по собственным функциям оператора Лапласа в пространстве Лобачевского (в пространстве релятивистских скоростей). Олевским[2] найдены все триортогональные системы координат в трехмерном пространстве постоянной кривизны, в которых уравнение Лапласа допускает полное разделение переменных и получена их классификация по форме линейного элемента. Из 34 систем, приведенных в[2], четыре особенно удобны для исследования бинарных столкновений частиц со спином нуль[3] и они исследованы в[1]. В этой работе мы рассмотрим более подробно эти четыре системы, обладающие аксиальной симметрией и тем свойством, что среди координатных линий нет кривых второго порядка с двумя центрами (и их вырождений). Все они могут быть получены при рассмотрении одной из трех типов связок прямых в пространстве Лобачевского и поверхностей, ортогональных к ним. В дальнейшем будем придерживаться обозначений и терминологии, используемой в[1]. Получим сферическую систему S, рассматривая сходящуюся связку с центром в начале координат (в вершине гиперболоида). Поверхности, ортогональные к такой связке, образуют семейство сфер. Рассматривая расходящуюся связку с плоскостью (2,3) в качестве базиса, получим гиперболическую систему H. В качестве ортогональных поверхностей получаем семейство гиперсфер (эквидистантных поверхностей). Аналогично в цилиндрической системе C имеем связку расходящихся прямых; в качестве базиса фигурирует плоскость определенная ортами $u_1 u - u_3 \sin\phi + u_2 \cos\phi$. Наконец, взяв параллельную связку с направляющим лучом вдоль оси u_3, получаем семейство орисфер (предельных поверхностей) и орисферическую систему 0.

В теории поля для описания рассеяния часто используются параметры Мандельстама s, t, u. Для наших целей эти переменные неудобны, так как соответствующие им координатные кривые в пространстве Лобачевского не ортогональны и оператор Лапласа в них не допускает разделения переменных. Покажем, как связаны параметры s, t, u с переменными в S, H и C системах и нарисуем соответствующие кинематические диаграммы (для случая равных масс)

---

[x] Часть результатов этой работы была предварительно опубликована в[11].

S – система

$$u_0 = \mathrm{ch}\,a \qquad\qquad s = 4m^2\,\mathrm{ch}^2 a$$

$$u_3 = \mathrm{sh}\,a \cos\theta \qquad\qquad t = -4m^2\,\mathrm{sh}^2 a\,\sin^2\theta$$

$$u_2 = \mathrm{sh}\,a \sin\theta\cos\phi \qquad\qquad u = -4m^2\,\mathrm{sh}^2 a\cos^2\theta$$

$$u_1 = \mathrm{sh}\,a \sin\theta\sin\phi$$

$$0 \le a < \infty\ ,\quad 0 \le \theta \le \pi\ ,\quad 0 \le \phi < 2\pi$$

H – система

$$u_0 = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b \qquad\qquad s = 4m^2\,\mathrm{ch}^2 a\,\mathrm{ch}^2 b$$

$$u_3 = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,b\cos\phi \qquad\qquad t = -4m^2\,\mathrm{sh}^2 a$$

$$u_2 = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,b\sin\phi \qquad\qquad u = -4m^2\,\mathrm{ch}^2 a\,\mathrm{sh}^2 b$$

$$u_1 = \mathrm{sh}\,a$$

$$-\infty < a < \infty\ ,\quad 0 \le b < \infty\ ,\quad 0 \le \phi < 2\pi .$$

C – система

$$u_0 = \mathrm{ch}\,b\,\mathrm{ch}\,a \qquad\qquad s = 4m^2\,\mathrm{ch}^2 b\,\mathrm{ch}^2 a$$

$$u_3 = \mathrm{sh}\,b\cos\phi \qquad\qquad t = -4m^2\,\mathrm{ch}^2 b\,\mathrm{sh}^2 a$$

$$u_2 = \mathrm{sh}\,b\sin\phi \qquad\qquad u = -4m^2\,\mathrm{sh}^2 b$$

$$u_1 = \mathrm{ch}\,b\,\mathrm{sh}\,a$$

$$-\infty < a < \infty\ ,\quad 0 \le b < \infty\ ,\quad 0 \le \phi < 2\pi .$$

Таким образом, мы видим, что в S –системе поверхности $a = const$ (сферы) соответствуют параметру $s = const$, в H – системе $a = const$ (гиперсферы) параметру $t = const$ и в C системе $b = const$ (поверхности вращения семейства эквидистант вокруг их общего базиса) – параметру $u = const$. Орисферическая система непосредственного отношения к переменным Мандельстама не имеет, но она важна по другим соображениям: расстояние между орисферами (переменная a) связана с величиной импульса частицы с ненулевой массой по отношению к импульсу фотона, что часто применяется в квантовой электродинамике.

В дальнейшем рассмотрим некоторые групповые свойства систем S, H, C и O и укажем на их связь с теорией четырехмерного момента количества движения.

Исследованы классические величины, соответствующие полным наборам коммутирующих операторов в каждой из систем, и поля, в которых они являются интегралами движения.

II Инфинитезимальные операторы собственной группы Лоренца

Будем работать в пространстве функций, определенных на верхней полости двухполостного трехмерного гиперболоида, который является инвариантной гиперповерхностью в четырехмерном пространстве релятивистских скоростей (это и есть реализация пространства Лобачевского).

Рассмотрим представление собственной группы Лоренца, базисными векторами которого являются собственные функции оператора Лапласа на гиперболоиде и выпишем в явном виде инфинитезимальные операторы. В дальнейшем L_i -инфинитезимальные операторы пространственных поворотов, K_i -гиперболических. Инфинитезимальные операторы можно получить, например, решая уравнения Киллинга /4/ или непосредственно, разлагая в ряд по a функцию $T_g f(x) = f(g_a x)$, где g_a однопараметрические подгруппы группы Лоренца.

Сферическая система S

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \mathrm{cotg}\,\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \\
L_2 &= -\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \mathrm{cotg}\,\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \\
L_3 &= \frac{\partial}{\partial\phi} \\
K_1 &= \sin\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial a} + \mathrm{ctha}\cos\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\,\mathrm{ctha}\cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \\
K_2 &= \sin\theta\cos\phi \frac{\partial}{\partial a} + \mathrm{ctha}\cos\theta\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\,\mathrm{ctha}\sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \\
K_3 &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial a} - \sin\theta\,\mathrm{ctha} \frac{\partial}{\partial\theta}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Гиперболическая система H

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \frac{\partial}{\partial\phi} \\
L_2 &= -\,\mathrm{sh}\,b\cos\phi \frac{\partial}{\partial a} + \mathrm{tha}\,\mathrm{ch}\,b\cos\phi \frac{\partial}{\partial b} - \mathrm{tha}\frac{1}{\mathrm{sh}\,b}\sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \\
L_3 &= \mathrm{sh}\,b\sin\phi \frac{\partial}{\partial a} - \mathrm{tha}\,\mathrm{ch}\,b\sin\phi \frac{\partial}{\partial b} - \mathrm{tha}\frac{1}{\mathrm{sh}\,b}\cos\phi \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} \\
K_1 &= \mathrm{ch}\,b \frac{\partial}{\partial a} - \mathrm{tha}\,\mathrm{sh}\,b \frac{\partial}{\partial b} \\
K_2 &= \sin\phi \frac{\partial}{\partial b} + \mathrm{cth}\,b\cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \\
K_3 &= \cos\phi \frac{\partial}{\partial b} - \mathrm{cth}\,b\sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Цилиндрическая система C

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$L_2 = -\,\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{th}\,b\cos\phi\frac{\partial}{\partial a} + \mathrm{sh}\,a\cos\phi\frac{\partial}{\partial b} - \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{cth}\,b\sin\phi\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$L_3 = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{th}\,b\sin\phi\frac{\partial}{\partial a} - \mathrm{sh}\,a\sin\phi\frac{\partial}{\partial b} - \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{cth}\,b\cos\phi\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$K_1 = \frac{\partial}{\partial a}$$

$$K_2 = -\,\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{th}\,b\sin\phi\frac{\partial}{\partial a} + \mathrm{ch}\,a\sin\phi\frac{\partial}{\partial b} + \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{cth}\,b\cos\phi\frac{\partial}{\partial \phi} \qquad (3)$$

$$K_3 = -\,\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{th}\,b\cos\phi\frac{\partial}{\partial a} + \mathrm{ch}\,a\cos\phi\frac{\partial}{\partial b} - \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{cth}\,b\sin\phi\frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Орисферическая система 0

$$L_1 = r\cos\phi\frac{\partial}{\partial a} - \frac{e^{-a}}{2}\left[-e^{-a} + (r^2+1)e^{a}\right]\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{e^{-a}}{2r}\left[-e^{-a} + (-r^2+1)e^{a}\right]\sin\phi\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$L_2 = -r\sin\phi\frac{\partial}{\partial a} + \frac{e^{-a}}{2}\left[-e^{-a} + (r^2+1)e^{a}\right]\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{e^{-a}}{2r}\left[-e^{-a} + (-r^2+1)e^{a}\right]\cos\phi\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$L_3 = \frac{\partial}{\partial \phi} \qquad (4)$$

$$K_1 = r\sin\phi\frac{\partial}{\partial a} - \frac{e^{-a}}{2}\left[-e^{-a} + (r^2-1)e^{a}\right]\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{e^{-a}}{2r}\left[e^{-a} + (r^2+1)e^{a}\right]\cos\phi\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$K_2 = r\cos\phi\frac{\partial}{\partial a} - \frac{e^{-a}}{2}\left[-e^{-a} + (r^2-1)e^{a}\right]\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{e^{-a}}{2r}\left[e^{-a} + (r^2+1)e^{a}\right]\sin\phi\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$K_3 = -\frac{\partial}{\partial a} + r\frac{\partial}{\partial r}$$

Заметим, что коммутационные соотношения для этих операторов во всех системах одинаковы.

$$[L_i, L_k] = \epsilon_{ikm} L_m \qquad i,k,m = 1,2,3$$

$$[L_i, K_k] = \epsilon_{ikm} K_m \qquad (5)$$

$$[K_i, K_k] = -\epsilon_{ikm} L_m$$

Однако матричный вид инфинитезимальных операторов в различных системах будет различным и только в S системе будет совпадать с приведенным в [5,6].

Связь с четырехмерным моментом количества движения во всех системах сохраняется, а именно в нашей (вещественной) метрике имеем:

$$M_{k\ell} = -i\left(u_k\frac{\partial}{\partial u_\ell} - u_\ell\frac{\partial}{\partial u_k}\right) = i\epsilon_{k\ell m} L_m \qquad (6)$$

$$M_{ok} = u_0 \frac{\partial}{\partial u_k} + u_k \frac{\partial}{\partial u_0} = K_k$$

$$k, l, m = 1, 2, 3$$

III. Инварианты группы Лоренца и ее подгрупп

Как известно [6], из инфинитезимальных операторов собственной группы Лоренца можно построить два инварианта

$$\Delta_L = \sum_{i=1}^{3} (K_i^2 - L_i^2) \tag{7}$$

$$\Delta' = -4 \sum_{i=1}^{3} L_i K_i .$$

В рассматриваемом случае первый из них равен лапласиану на гиперболоиде (в соответствующих координатах), второй связан со спином и тождественно равен нулю.

Системы S, H, C и O отличаются друг от друга инвариантами, соответствующими не всей группе Лоренца, а определенным подгруппам, т.е. коммутирующим только с частью операторов представления. Именно с этими инвариантами связано разделение переменных в уравнении Лапласа:

$$\Delta_L f(u) = -(p^2 + 1) f(u) \tag{8}$$

и функция $f(u)$ в каждой системе будет собственной функцией соответствующих инвариантов. Собственные значения, возникающие как константы разделения в уравнении, будут играть роль квантовых чисел. Инварианту Δ_L всегда соответствует квантовое число p. Заметим, что все собственные функции, соответствующие одному и тому же p, образуют базис для неприводимого (в общем случае бесконечномерного) представления группы Лоренца.

Рассмотрим с этой точки зрения все четыре системы координат.

S -система. Инвариантами являются

$$L_1^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} . \tag{9}$$

$$L_3 = \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Они соответствуют группе трехмерных вращений и ее подгруппе -вращениям вокруг одной из пространственных осей. Здесь естественно получаются квантовые числа l и m (момент количества движения и его проекция).

H –система. Инварианты

$$H^2 = K_2^2 + K_3^2 - L_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial b^2} + cth\, b \frac{\partial}{\partial b} + \frac{1}{sh^2 b} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \tag{10}$$

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial \phi}$$

соответствуют трехмерной группе Лоренца с инфинитезимальными операторами K_2, K_3, L_1, т.е. "малой группе" Лоренца /7,8/, связанной с пространственным вектором, и ее однопараметрической подгруппе пространственных вращений вокруг оси 1. Так возникают квантовые числа a и m, где $a = -\frac{1}{2} + iq$ (см. /1/).

С –система. Эта система симметрична по отношению к пространственным и гиперболическим поворотам. Инварианты

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$K_1 = \frac{\partial}{\partial a} \tag{11}$$

соответствуют однопараметрическим подгруппам пространственных вращений в плоскости (2,3) и гиперболических вращений в плоскости (0,1). Соответствующие квантовые числа – это r и m.

0–система. Инвариантами являются операторы

$$0^2 = (K_1 + L_2)^2 + (K_2 - L_1)^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \tag{12}$$

$$L_3 = \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Им соответствует трехпараметрическая подгруппа с инфинитезимальными операторами $L_3, K_1 + L_2, K_2 - L_1$. Их коммутационные свойства следующие:

$$[L_3, K_1 + L_2] = K_2 - L_1, \quad [K_2 - L_1, L_3] = K_1 + L_2, \tag{13}$$

$$[K_1 + L_2, K_2 - L_1] = 0$$

Операторы (13) определяют группу движений в плоскости, т.е. группу вращений и трансляций на обычной евклидовой плоскости (это "малая группа", связанная с изотропным вектором). В данном случае операторы конечных преобразований этой подгруппы определяют группу движений на орисфере. Оператор 0^2 есть как раз оператор Лапласа на плоскости в цилиндрических координатах и поэтому естественно возникает решение в виде цилиндрических функций. Как всегда L_3 просто соответствует вращениям вокруг одной оси.

IV. Классические аналоги инвариантов подгрупп

Напомним, что найденные инфинитезимальные операторы непосредственно связаны с оператором четырехмерного момента количества движения. Для выяснения физического смысла инвариантов подгрупп рассмотрим координатное пространство, в котором можно ввести те же системы координат; например, S -система имеет вид:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= x \operatorname{ch} a \\
x_3 &= x \operatorname{sh} a \cos\theta \\
x_2 &= x \operatorname{sh} a \sin\theta \cos\phi \\
x_1 &= x \operatorname{sh} a \sin\theta \sin\phi
\end{aligned}
\tag{14}
$$

(для x и a необходимо допустить и комплексные значения). Формулы (1)-(4) остаются в силе, если правые стороны умножить на x.

Пусть x^i- произвольные криволинейные координаты. Инфинитезимальные операторы собственной группы Лоренца можно записать в виде[9]

$$
X_a = \xi^i_{(a)} \frac{\partial}{\partial x^i}
\tag{15}
$$

$$
i = 1,\dots,4
$$

$$
a = 1,\dots,6\ ,
$$

где $\xi^i_{(a)}$ — решения уравнений Киллинга. Этим величинам можно сопоставить линейные первые интегралы уравнения геодезической

$$
C^{(a)} = \xi_{i(a)} \frac{dx^i}{ds}\ .
\tag{16}
$$

Мы здесь не будем выписывать значения всех интегралов в наших системах, однако, рассмотрим комбинации из них, соответствующие инвариантам подгрупп.

Инварианту всей группы Δ_L сопоставим классическую величину:

$$
\mathfrak{M}^2 = \sum_{a=1}^{3} C^{(a)2} - \sum_{a=4}^{6} C^{(a)2}.
$$

В декартовых координатах имеем

$$
\mathfrak{M}^2 = m^2 \{ x^\mu x_\mu - (x_\mu u^\mu)^2 \} ;
\tag{17}
$$

это просто квадрат четырехмерного момента количества движения.

Теперь рассмотрим величины, сопоставленные инвариантам подгрупп (m -масса частицы):

S - система
$$\mathfrak{L}_z = m x^2 sh^2 a \sin^2\theta \frac{d\phi}{ds}$$
$$\mathfrak{L}^2 = m^2 x^4 sh^4 a \left[\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2\right] \tag{18}$$

H -система
$$\mathfrak{L}_z = m x^2 ch^2 a\, sh^2 b \frac{d\phi}{ds}$$
$$\mathcal{H}^2 = m^2 x^4 ch^4 a \left[\left(\frac{db}{ds}\right)^2 + sh^2 b\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2\right] \tag{19}$$

C -система
$$\mathfrak{L}_z = m x^2 sh^2 b \frac{d\phi}{ds}$$
$$\mathcal{K}_z = m x^2 ch^2 b \frac{da}{ds} \tag{20}$$

O - система
$$\mathfrak{L}_z = m x^2 r^2 e^{2a} \frac{d\phi}{ds}$$
$$\mathcal{O}^2 = m^2 x^4 e^{4a}\left[\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2\right]. \tag{21}$$

Таким образом, в S -системе получаем квадрат обычного трехмерного момента количества движения и его проекцию. В остальных системах возникают новые интегралы движения и надо выяснить, в каких полях они сохраняются. Здесь мы ограничимся рассмотрением движения заряженной частицы в электромагнитном поле.

Рассмотрим одну из компонент тензорного представления второго ранга группы Лоренца, а именно антисимметричный тензор
$$M_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & L_z & -L_y & K_x \\ -L_z & 0 & L_x & K_y \\ L_y & -L_x & 0 & K_z \\ -K_x & -K_y & -K_z & 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$
который сопоставим четырехмерному моменту количества движения. При преобразовании Лоренца он преобразуется по формулам
$$M'_{ik} = g_{il}\, g_{km} M_{lm} \tag{23}$$
или в матричной форме: $M' = gMg^T$ (g^T транспонированная матрица).

Выделяя определенные субматрицы, стоящие в (22) на главной диагонали, получаем различные подгруппы и, тем самым, различные системы координат. Матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & L_z & -L_y \\ -L_z & 0 & L_x \\ L_y & -L_x & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & L_z & K_y \\ -L_z & 0 & K_x \\ K_y & -K_x & 0 \end{pmatrix} \text{ и вместе } \begin{pmatrix} 0, L_z \\ -L_z, 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0, K_z \\ -K_z, 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

определяют соответственно S , H и C –системы. Чтобы получить 0– систему, выразим тензор M_{ik} в базисе $x, y, \sqrt{1/2}(z-t), \sqrt{1/2}(z+t)$. Получаем

$$\tilde{M}_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & L_z & -\sqrt{1/2}(K_x+L_y) & \sqrt{1/2}(K_x-L_y) \\ -L_z & 0 & -\sqrt{1/2}(K_y-L_x) & \sqrt{1/2}(K_y+L_x) \\ \sqrt{1/2}(K_x+L_y) & \sqrt{1/2}(K_y-L_x) & 0 & K_z \\ -\sqrt{1/2}(K_x-L_y) & -\sqrt{1/2}(K_y+L_x) & -K_z & 0 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где пунктиром выделена субматрица, определяющая "малую группу", связанную с изотропным вектором и, тем самым, 0–систему.

Интегралы движения, характеризующие отдельные системы, сохраняются, если отличны от нуля только те компоненты четерехмерного потенциала, которые не преобразуются при преобразовании из данной подгруппы. Эти компоненты должны зависеть только от комбинации координат, инвариантных по отношению к этим подгруппам. Итак, получаем;

S – система:

$$\begin{aligned} &A_i = 0 \qquad i = 1,2,3 \\ &A_0 = \Phi(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, x^0) \end{aligned} \tag{26}$$

H –система:

$$\begin{aligned} &A_1 = \Phi(x^1, \sqrt{x_0^2 - x_2^2 - x_3^2}) \\ &A_\lambda = 0 \qquad \lambda = 2,3,0 \end{aligned} \tag{27}$$

0 –система:

$$\begin{aligned} &A_1 = A_2 = 0 \\ &A_3 = -\Phi(x^0 - x^3, \sqrt{x_\mu x^\mu}) = -A^3, \\ &A_0 = \Phi(x^0 - x^3, \sqrt{x_\mu x^\mu}) = A^0, \end{aligned} \tag{28}$$

т.е. в базисе:

$$x, y, \sqrt{1/2}(z-t), \sqrt{1/2}(z+t)$$

$$A^x = A^y = A^{z-t} = 0 \qquad A^{z+t} = \sqrt{2}\,\Phi(x^0 - x^3, \sqrt{x_\mu x^\mu}). \tag{28}$$

В C-системе положение несколько сложнее, что связано с тем, что здесь подгруппа распадается на две независимые однопараметрические подгруппы. Условие сохранения интегралов движения можно записать в виде:

$$
\begin{aligned}
&A_0 = A_1 = 0 \\
&A_2 = x_2\Phi(a,b) \qquad && a = \sqrt{x_0^2 - x_1^2} \\
&A_3 = x_3\Phi(a,b) \qquad && b = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

или

$$
\begin{aligned}
&A_2 = A_3 = 0 \\
&A_0 = x_0\Phi'(a,b) \qquad && \frac{1}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial a} = \frac{1}{b}\frac{\partial\Phi'}{\partial b} \\
&A_1 = x_1\Phi'(a,b)
\end{aligned}
\tag{29^1}
$$

Результаты этого параграфа можно проверить, написав уравнения движения в криволинейных координатах

$$
m\left(\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\rho}{ds}\right) = e\left(\frac{\partial A^\sigma}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\sigma}\right)u_\sigma \tag{30}
$$

и требуя, чтобы величина $\mathfrak{L}_z$ и, соответственно, одна из величин $\mathfrak{L}^2$, $\mathcal{K}^2$, $\mathcal{K}_z$ или O^2 сохранялась вдоль траектории. Так снова получим условия (26)-(29) (с точностью до градиентного преобразования).

Выпишем еще тензоры электромагнитного поля, в которых сохраняются интегралы движения. Связь их симметрии со свойствами подгрупп в (22) очень прозрачна:

S - система:

$$
F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x^1 \\ 0 & 0 & 0 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & x^3 \\ -x^1 & -x^2 & -x^3 & 0 \end{pmatrix} \cdot F(r,t) \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \qquad t = x^0
$$

H - система

$$
F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & x^2 & x^3 & x^0 \\ -x^2 & 0 & 0 & 0 \\ -x^3 & 0 & 0 & 0 \\ -x^0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot F(h, x^1) \qquad h = \sqrt{x_0^2 - x_2^2 - x_3^2} \tag{31}
$$

O - система

$$
F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x^1 & x^1 \\ 0 & 0 & x^2 & x^2 \\ -x^1, & -x^2, & 0 & x^3 - x^0 \\ -x^1, & -x^2, & -(x^3 - x^0) & 0 \end{pmatrix} F(x,a), \qquad
\tilde{F}^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\,x^1 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\,x^2 \\ 0 & 0 & 0 & x^3 - x^0 \\ -\sqrt{2}\,x^1, & -\sqrt{2}\,x^2, & -(x^3 - x^0) & 0 \end{pmatrix} \cdot F(x,a) \tag{32}
$$

где $x = \sqrt{x_\mu x^\mu}$, $a = x^0 - x^3$ и $\tilde{F}^{ik}$ – тензор электромагнитного поля в новом базисе.

C – система

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tfrac12 x^1x^3 & -\tfrac12 x^1x^0 \\ 0 & 0 & \tfrac12 x^2x^3 & -\tfrac12 x^2x^0 \\ -\tfrac12 x^1x^3 & -\tfrac12 x^2x^3 & 0 & -x^3x^0 \\ +\tfrac12 x^1x^0 & \tfrac12 x^2x^0 & x^3x^0 & 0 \end{pmatrix} \cdot F(a,b) + \begin{pmatrix} 0 & x^1x^2, & \tfrac12 x^1x^3, & \tfrac12 x^1x^0 \\ -x^1x^2, & 0 & -\tfrac12 x^2x^3, & -\tfrac12 x^2x^0 \\ -\tfrac12 x^1x^3, & \tfrac12 x^2x^3, & 0\ , & 0 \\ -\tfrac12 x^1x^0, & \tfrac12 x^2x^0, & 0\ , & 0 \end{pmatrix} F(a,b) = \tag{33}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & x^1x^2 & x^1x^3 & 0 \\ -x^1x^2 & 0 & 0 & -x^0x^2 \\ -x^1x^3 & 0 & 0 & -x^0x^3 \\ 0 & x^0x^2 & x^0x^3 & 0 \end{pmatrix} \cdot F(a,b) \qquad \begin{aligned} a &= \sqrt{x_0^2 - x_1^2} \\ b &= \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \end{aligned} \quad .$$

Заключение

Мы видим, что свойства релятивистского момента количества движения, связанного с однородной группой Лоренца, намного богаче свойств обычного трехмерного момента, связанного с группой вращений. Наличие различных подгрупп группы Лоренца сразу приводит к различным полным наборам коммутирующих наблюдаемых и, тем самым, к различным полным наборам собственных функций, по которым можно разлагать физические величины (амплитуды рассеяния). В теории поля обычно используется только разложение по парциальным волнам, что соответствует случаю разложений в нашей S –системе. В случае, когда задача симметрична не по отношению к группе вращений, а по отношению к другой подгруппе, кажется более естественным разлагать по собственным функциям в соответствующей системе[x/]. Групповая трактовка возникающих комплексных моментов непосредственна, так как все рассматриваемые подгруппы, кроме группы вращений, некомпактны и для них можно строить неприводимые (вообще говоря, бесконечномерные) представления, соответствующие любому комплексному числу a . Базисные функции представлений группы Лоренца, соответствующие , S , H, C и O системам, будут рассмотрены в следующей работе и также будут исследованы вопросы о других системах координат (эллиптического типа), в которых уравнение Лапласа допускает разделение переменных и о преобразованиях, переводящих одну такую систему в другую.

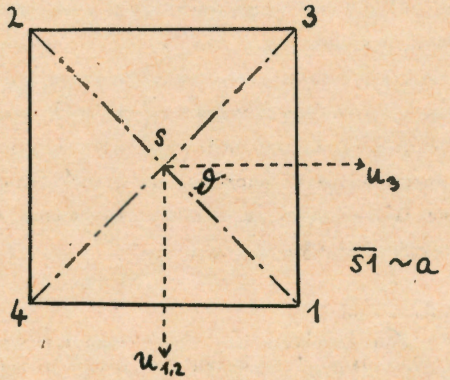
[x/] Это проделано для уравнения Бете–Солпитера для бесспиновых частиц в работе /10/, о которой мы узнали после окончания данной работы. Там рассмотрено уравнение для перекрестного канала, отмечена его симметрия по отношению к трехмерной группе Лоренца и произведено разложение по базисным функциям этой группы. Это соответствует разложению в нашей H –системе.

Литература

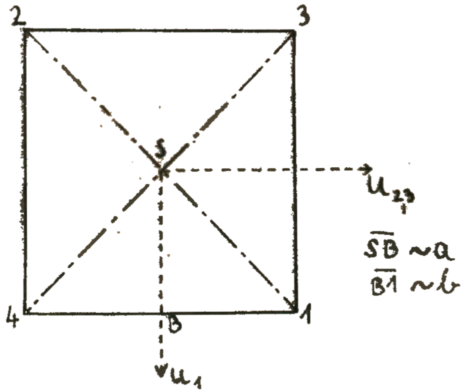
1. Н.Я. Виленкин, Я.А. Смородинский. Препринт ОИЯИ, Е-1503, Дубна, 1964.
2. М.П. Олевский. Мат. сборник 27, 379 (1950).
3. Я.А. Смородинский. Атомная энергия 14, 110 (1963).
4. J.L. Synge. Relativity. The General Theory. North-Holland 1960.

   русский перевод: Дж.Л. Синг, Общая теория относительности. ИЛ, 1963.
5. И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро. Представления группы вращений и группы Лоренца. ФМ, Москва, 1958.
6. М.А. Наймарк. Линейные представления группы Лоренца. Ф М., Москва, 1958.
7. E.P. Wigner. Annals of Math. 40, 149 (1939).
8. V. Bargmann. Annals of Math. 48, 568 (1947)
9. W.R. Davis, G.H. Katzin. Am. J. Phys. 30, 750 (1962).
10. L. Sertorio, M. Toller. Preprint Nr. 44 (1964), INFN – Sezione di Roma.
11. П. Винтерниц, Я.А. Смородинский, М. Углирж. Препринт ОИЯИ, Е-1591, Дубна, 1964.

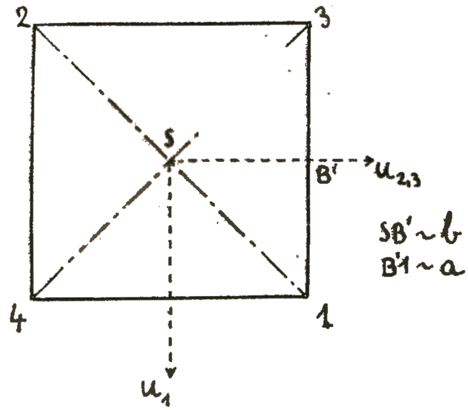
Рукопись поступила в издательский отдел
25 мая 1964 г.



Р и с. 1. Параметры рассеяния в S -системе.



Р и с. 2. Параметры рассеяния в *H* -системе.



Р и с. 3. Параметры рассеяния в C -системе.