ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-1682

В.П. Шириков

МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

1964

P-1682

В.П. Ширяков

МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

I. В ряде работ, посвященных некоторым вопросам математической физики, рассматривались следующие задачи.

1) Найти решения $y = y(x)$ уравнения

$$y'' + \frac{2}{x} y' - y + y^n = 0, \quad n > 1, \quad x \geq 0, \tag{1.1}$$

удовлетворяющие условиям

$$y(0) = y_0 < \infty, \quad y'(0) = 0, \quad y(\infty) = 0, \tag{1.2}$$

y_0^* –неизвестный положительный параметр.

2) Найти решения $\eta = \eta(x)$ уравнения

$$\eta'' = \eta - \frac{\eta^n}{x^{n-1}}, \quad n > 1, \quad x \geq 0, \tag{1.3}$$

удовлетворяющие условиям

$$\eta(0) = 0, \quad \eta'(0) = a < \infty, \quad \eta(\infty) = 0, \tag{1.4}$$

a –неизвестный положительный параметр.

3) Найти решения $z = z(x)$ уравнения

$$z'' + \frac{2}{x} z' - z + |z|^{n-1} \cdot z = 0, \quad n > 1, \quad x \geq 0, \tag{1.5}$$

удовлетворяющие условиям

$$z(0) = z_0 < \infty, \quad z'(0) = 0, \quad z(\infty) = 0, \tag{1.6}$$

z_0 –неизвестный положительный параметр.

Уравнение (1.1) получается из уравнения (1.3) заменой $\eta(x) = x \cdot y(x)$. Если задача (1.3)–(1.4) разрешима, одновременно разрешима и задача (1.1)–(1.2), причем $y_0 = a$.

В работах /1/,/2/ было доказано существование положительных решений задач (1.1)–(1.2), (1.3)–(1.4) при любом действительном n, если $1 < n \leq 4$. Этот результат верен и для задачи (1.5)–(1.6), поскольку для отыскания положительных решений этой задачи можно обойтись областью $z > 0$. В случае $n = \frac{2p+1}{2q}$ (p и q – натуральные числа) любое решение уравнений (1.1) и (1.3) имеет не более одного нуля на интервале $0 < x < \infty$ и непродолжимо за этот нуль. При таких n задачи (1.1)–(1.2), (1.3)–(1.4) не могут иметь никаких решений, кроме положительных. В случае $n = 2m$ или $n = \frac{2p}{2q+1}$ решения уравнений (1.1) и (1.3) не могут иметь отрицательных минимумов, и все решения соответствующих краевых задач положительны при $0 < x < \infty$, если эти решения существуют. Для случая $n = \frac{2p+1}{2q+1}$ в работе[3], например, утверждалось существование решений задач (1.1)-(1.2), (1.3)-(1.4) с любым числом нулей на интервале $0 < x < \infty$. Авторами работы[4] было найдено с определенной точностью пять значений начальной производной a, соответствующих пяти различным решениям задачи (1.3)-(1.4) при $n = 3$. Теоремой 1 раздела II настоящей работы доказывается существование счетного множества решений задач (1.1)-(1.2), (1.3)-(1.4) для любого n, $1 < n < 4$, $n = \frac{2p+1}{2q+1}$. Эти решения отличаются друг от друга количеством нулей на интервале $0 < x < \infty$. Для задачи (1.5)-(1.6) такое множество существует для любого действительного n, $1 < n < 4$.

Теоремой 3 раздела III доказывается отсутствие решений у задач (1.1)-(1.2), (1.3)-(1.4), (1.5)-(1.6) для $n \geq 5$. Результаты для задачи (1.5)-(1.6) получаются как следствие соответствующих результатов для задачи (1.1)-(1.2).

Для доказательства основной теоремы 1 потребуется вспомогательное предложение.

Л е м м а 1. Для любого $a > 0$ и любого $n > 1$, $n = \frac{2p+1}{2q+1}$ (p и q - натуральные числа) существует единственное решение задачи Коши для уравнения (1.3) при начальных условиях $\eta(0) = 0$, $\eta'(0) = a$, определенное для всех $x > 0$. Решение непрерывно зависит от a.

Приведенное предложение является следствием лемм 1,2,3 работы[2].

II. Т е о р е м а 1. Для любого целого положительного i ($i = 0,1,2,\dots$) и любого $n = \frac{2p+1}{2q+1}$ (p и q -натуральные числа), $1 < n < 4$, существуют решения $y = \bar{y}_i(x)$, $\eta = \bar{\eta}_i(x)$ задач (1.1)-(1.2), (1.3)-(1.4), имеющие в точности i нулей на интервале $0 < x < \infty$.

Разрешимость задачи (1.1)-(1.2) есть следствие разрешимости задачи (1.3)-(1.4). В работе[2] положительное решение $\eta = \bar{\eta}_0(x)$ задачи (1.3)-(1.4) найдено следующим алгоритмом. Множество решений $\eta = \eta(x)$ уравнения (1.3), не пересекающих ось x при $x > 0$, обозначим через L_0, а соответствующее множество значений начальных производных $a > 0$ - через L_0^a. В частности, множеству L_0^a принадлежат все a, такие, что $a \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ (см. доказательство теоремы 2 работы[2]). Это верно для любого $n > 1$. При достаточно больших значениях a любое решение $\eta = \eta(x)$ уравнения (1.3) пересекает ось x по крайней мере один раз на интервале $0 < x < \infty$, если $1 < n \leq 3$. Множество L_0^a, следовательно, ограничено сверху для таких n. Если $\bar{a}_0 = \sup\limits_{L_0^a} \{a\}$, то решение $\eta = \bar{\eta}_0(x)$ уравнения (1.3), такое, что $\bar{\eta}_0(0) = 0$, $\eta_0'(0) = \bar{a}_0$, и есть решение задачи (1.3)-(1.4), не имеющее нулей на интервале $0 < x < \infty$. При доказательстве теоремы 1 можно применить аналогичный алгоритм и для поиска решений $\eta = \bar{\eta}_i(x)$, отыскивая их на границе множества решений уравнения (1.3) с i нулями и множества решений, имеющих не менее $i+1$ нулей, если такие множества имеются. Докажем, прежде всего, существование решений $\eta = \eta(x)$, $\eta(0) = 0$, $\eta'(0) = a$ уравнения (1.3) с любым наперед заданным числом нулей на интервале $0 < x < \infty$, если n удовлетворяет условию теоремы 1.

Лемма 2. Для любого целого положительного i ($i = 0, 1, 2..$) и любого $n = \frac{2p+1}{2q+1}$ (p и q – натуральные числа), $1 < n < 4$, существуют решения $\eta = \eta(x)$ уравнения (1.3), $\eta(0) = 0$ и $\eta'(0) > 0$, имеющие не менее $i+1$ нулей на интервале $0 < x < \infty$.

Доказательство. В уравнении (1.3) сделаем замену переменных по формулам

$$\eta(x) = e^{x}\cdot v(t), \quad t = \tfrac{1}{2}(1 - e^{-2x}), \quad x = -\tfrac{1}{2}\ln(1-2t). \tag{2.1}$$

Для любого решения $\eta = \eta(x)$, $\eta(0) = 0$, $\eta'(0) = a > 0$ уравнения (1.3) соответствующая функция $v = v(t)$ удовлетворяет на интервале $0 \leq t < \frac{1}{2}$ уравнению

$$v'' + \frac{v^{n}}{(-\frac{1}{2})^{n-1}\cdot(1-2t)^{\frac{n+3}{2}}\ln^{n-1}(1-2t)} = 0, \text{ где } \quad v'' = \frac{d^2v}{dt^2}.$$

При этом $v(0) = 0$, $\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0} = e^{x}\left(\frac{d\eta}{dx} - \eta\right)\Big|_{x=0} = \eta'(0) = a$ в силу преобразования (2.1). Полагая

$$f(t) = (-\tfrac{1}{2})^{n-1}\cdot(1-2t)^{\frac{n+3}{2}}\ln^{n-1}(1-2t), \quad F(v^2, t) = \frac{(v^2)^{\frac{n-1}{2}}}{f(t)}, \tag{2.2}$$

получаем для задачи Коши $\eta'' = \eta - \frac{\eta^n}{x^{n-1}}$, $\eta(0) = 0$, $\eta'(0) = a$ эквивалентную задачу Коши

$$v'' + vF(v^2, t) = 0, \tag{2.3}$$

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = a. \tag{2.4}$$

Лемма будет доказана, если удастся подобрать такое a, что решение задачи (2.3)–(2.4) имеет в точности i нулей на некотором интервале $0 < t < b$, $b < \frac{1}{2}$, причем $v(b) = 0$.

Заметим, что $f(t) > 0$ для всех t, $0 < t < \frac{1}{2}$, и для $n = \frac{2p+1}{2q+1}$ имеем $\frac{v^{n-1}}{f(t)} \geq 0$ для любых v. Кроме того, в силу определения (2.2) имеем $F(\rho, t)$ – неубывающая функция от ρ. Воспользуемся идеей Z. Nehari /5,6/, исследовавшего разрешимость краевых задач для уравнения вида (2.3) с аналогичными функциями $F(\rho, t)$, которые у Nehari непрерывны для всех ρ и t. Определим функцию $G(\rho, t)$ равенством

$$G(\rho, t) = \int_0^{\rho} F(\tau, t)\,d\tau = \frac{2}{n+1}\cdot\frac{\rho^{\frac{n+1}{2}}}{f(t)} \tag{2.5}$$

в силу определения (2.2) и рассмотрим функционал

$$I(v) = \int_0^b [v'^2(t) - G(v^2(t), t)]\,dt = \int_0^b [v'^2 - \frac{2}{n+1}\cdot\frac{v^{n+1}}{f(t)}]\,dt \tag{2.6}$$

в классе функций $\{v(t)\} = \Gamma$. Определим Γ следующим образом. $v(t) \in \Gamma$, если $v(t)$ непрерывна и неотрицательна на интервале $0 \leq t \leq b$, имеет кусочно-непрерывную производную на этом интервале, т.е. $v \in D$, удовлетворяет условиям $v(0)=0$, $v(t) \not\equiv 0$, $v(b)=0$ и

$$\int_0^b v'^2\,dt = \int_0^b \frac{v^{n+1}}{f(t)}\,dt\,. \tag{2.7}$$

Заметим, что интеграл в правой части условия (2.7) сходится для любой функции $v(t)$ класса Γ, ибо $f(t)$ имеет порядок нуля не выше $n-1$ в точке $t=0$. Условие (2.7) является условием нормировки: если функция $v(t)$ удовлетворяет всем условиям принадлежности классу Γ, кроме (2.7), то функция $u(t)=cv(t)\in\Gamma$. Константа c определяется равенством

$$\int_0^b v'^2\,dt = c^{n-1}\int_0^b \frac{v^{n+1}}{f(t)}\,dt\,.$$

В силу равенства (2.8) для функций класса Γ имеем

$$I(v) = \frac{n-1}{n+1}\int_0^b v'^2 dt > 0\,. \tag{2.8}$$

Пусть $\{v_k(t)\}$ –последовательность функций, такая, что

$$\lim_{k\to\infty} I(v_k) = \inf_{v\in\Gamma} I(v) = \lambda\,(0,b)\,,\quad v_k\in\Gamma\,.$$

В силу равенства (2.8) найдется такая константа M, что $\int_0^b v_k'^2\,dt < M < \infty$. Следовательно, последовательность $\{v_k(t)\}$ компактна. Пусть $\{v_k(t)\}\to v_0(t)$, $v_0(t)$ непрерывна на интервале $0\le t\le b$. Построим новую последовательность $\{u_k(t)\}$ по формулам

$$u_k''(t) = -c_k\frac{v_k^n(t)}{f(t)}\,, \tag{2.9}$$

$$u_k'(t) = c_k\left[\frac{1}{b}\int_0^b dt\int_0^t \frac{v_k^n(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau - \int_0^t \frac{v_k^n(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau\right], \tag{2.10}$$

$$u_k(t) = c_k\left[\frac{t}{b}\int_0^b dt\int_0^t \frac{v_k^n(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau - \int_0^t d\rho\int_0^\rho \frac{v_k^n(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau\right]. \tag{2.11}$$

Очевидно, $u_k(0)=u_k(b)=0$. Константы c_k выберем так, чтобы $u_k(t)$ удовлетворяло условию нормировки (2.7). В таком случае $u_k\in\Gamma$.

Покажем, что $I(u_k)\le I(v_k)$, или, что то же в силу (2.6) и (2.7),

$$\int_0^b \frac{u_k^{n+1}}{f(t)}\,dt - \frac{2}{n+1}\int_0^b \frac{u_k^{n+1}}{f(t)}\,dt < \int_0^b \frac{v_k^{n+1}}{f(t)}\,dt - \frac{2}{n+1}\int_0^b \frac{v_k^{n+1}}{f(t)}\,dt\,. \tag{2.12}$$

Функция $G(u_k^2,t) = \frac{2}{n+1}\cdot\frac{u_k^{n+1}}{f(t)}$ при $n>1$ возрастает по u_k^2 и выпукла вниз, поэтому

$$\frac{2}{n+1}\int_0^b \frac{u_k^{n+1}}{f(t)}dt \ge \frac{2}{n+1}\int_0^b \frac{v_k^{n+1}}{f(t)}dt + \int_0^b (u_k^2 - v_k^2)\frac{v_k^{n-1}}{f(t)}dt .$$

Следовательно,

$$\int_0^b \frac{u_k^{n+1}}{f(t)}dt - \frac{2}{n+1}\int_0^b \frac{u_k^{n+1}}{f(t)}dt \le \int_0^b \frac{u_k^{n+1}}{f(t)}dt + \int_0^b \frac{v_k^{n+1}}{f(t)}dt - \frac{2}{n+1}\int_0^b \frac{v_k^{n+1}}{f(t)}dt - \int_0^b u_k^2 \cdot \frac{v_k^{n-1}}{f(t)}dt .$$

Соотношение (2.12) следует отсюда, если $\int_0^b \frac{u_k^{n+1}}{f(t)}dt \le \int_0^b u_k^2 \cdot \frac{v_k^{n-1}}{f(t)}dt$. Очевидно,

$$\left(\int_0^b \frac{u_k^{n+1}}{f(t)}dt\right)^2 = \left(\int_0^b u_k'^2 dt\right)^2 = \left(\int_0^b u_k u_k'' dt\right)^2 = c_k^2\left(\int_0^b u_k \frac{v_k^n}{f(t)}dt\right)^2 \le \int_0^b \frac{u_k^2 v_k^{n-1}}{f(t)}dt \cdot c_k^2 \int_0^b \frac{v_k^{n+1}}{f(t)}dt .$$

Однако :

$$c_k^2\left(\int_0^b \frac{v_k^{n+1}}{f(t)}dt\right)^2 = \left(\int_0^b v_k u_k'' dt\right)^2 = \left(\int_0^b v_k' u_k' dt\right)^2 \le \int_0^b \frac{u_k^{n+1}}{f(t)}dt \cdot \int_0^b \frac{v_k^{n+1}}{f(t)}dt ,$$

Откуда

$$c_k^2 \int_0^b \frac{v_k^{n+1}}{f(t)}dt \le \int_0^b \frac{u_k^{n+1}}{f(t)}dt .$$

Следовательно,

$$\left(\int_0^b \frac{u_k^{n+1}}{f(t)}dt\right)^2 \le \int_0^b \frac{u_k^2 \cdot v_k^{n-1}}{f(t)}dt \cdot \int_0^b \frac{u_k^{n+1}}{f(t)}dt , \quad \int_0^b \frac{u_k^{n+1}}{f(t)}dt \le \int_0^b \frac{u_k^2 \cdot v_k^{n-1}}{f(t)}dt .$$

Это доказывает неравенство (2.12), следовательно, $I(u_k) \le I(v_k)$. Равенство здесь возможно в единственном случае $u_k \equiv v_k$. Итак, $\{u_k(t)\}$ –минимизирующая последовательность для функционала $I(v)$, $v \in \Gamma$.

Вследствие сходимости последовательности $\{v_k(t)\}$ к $v_0(t)$ и формул (2.9)–(2.11) минимизирующая последовательность $\{u_k(t)\}$ сходится к функции $u_0(t) \in C^2$ при $0 < t \le b$, $u_0(0) = u_0(b) = 0$. Выражения для $u_0(t)$ и $u_0'(t)$ получаются предельным переходом под знаком интеграла в формулах (2.10)–(2.11). Действительно, $v_k^2(t) < t\int_0^b v_k'^2(r)dr \le tM$, для любого t, $0 < t \le b$, поэтому $v_0(t) \le t^{1/2} M^{1/2}$ и $\int_0^t \frac{v_0^n(r)}{f(r)}dr \le M^{\frac{n}{2}} \int_0^t \frac{r^{n/2}}{f(r)}dr$. В силу определения (2.2) подинтегральная функция $\frac{r^{n/2}}{f(r)} \approx c\frac{r^{n/2}}{r^{n-1}} = \frac{c}{r^{\frac{n-2}{2}}}$ в точке $t = 0$. Итак, при $\frac{n-2}{2} < 1$, $n < 4$, интеграл $\int_0^t \frac{v_0^n(r)}{f(r)}dr$ существует для любого t, $0 < t \le b < 1/2$.

Далее покажем, что для любого $\epsilon > 0$ найдется $N = N(\epsilon)$, такое, что

$$\left|\int_0^t \frac{v_k^n(r)}{f(r)}dr - \int_0^t \frac{v_0^n(r)}{f(r)}dr\right| \le \int_0^b \left|\frac{v_k^n(r) - v_0^n(r)}{f(r)}\right| dr < \epsilon ,$$

коль скоро $k > N$ (2.13). В самом деле,

$$\int_0^b \left|\frac{v_k^n(r) - v_0^n(r)}{f(r)}\right| dr \le \int_0^\delta \left|\frac{v_k^n(r)}{f(r)}\right| dr + \int_0^\delta \left|\frac{v_0^n(r)}{f(r)}\right| dr + \int_\delta^b \left|\frac{v_k^n(r) - v_0^n(r)}{f(r)}\right| dr .$$

Поскольку $v_k^2(r) < rM$ и $v_0^2(r) \le rM$, можно при $n < 4$ выбрать $\delta = \delta(\epsilon)$ так, чтобы

$$\int_0^\delta \left| \frac{v_k^n(\tau)}{l(\tau)} \right| d\tau < M^{\frac{n}{2}} \int_0^\delta \frac{\tau^{\frac{n}{2}}}{l(\tau)}\, d\tau < \frac{\epsilon}{4}$$

и

$$\int_0^\delta \left| \frac{v_0^n(\tau)}{l(\tau)} \right| d\tau < M^{\frac{n}{2}} \int_0^\delta \frac{\tau^{\frac{n}{2}}}{l(\tau)}\, d\tau < \frac{\epsilon}{4} \quad .$$

Выберем теперь N из условия:

$$| v_k^n - v_0^n | < \frac{\epsilon/2}{b \cdot \max\limits_{\delta \le t \le b} \frac{1}{l(t)}} \ ,$$

пользуясь равномерной сходимостью $\{v_k(t)\} \to v_0(t)$ на интервале $0 < t \le b$. В таком случае

$$\int_\delta^b \left| \frac{v_k^n(\tau) - v_0^n(\tau)}{l(\tau)} \right| d\tau < b \cdot \max_{[\delta, b]} \frac{1}{l(t)} \max_{[\delta, b]} | v_k^n(t) - v_0^n(t) | < \frac{\epsilon}{2} \quad .$$

При выбранном $N = N(\epsilon)$ неравенство (2.13) имеет место, что и завершает доказательство сходимости минимизирующей последовательности $\{u_k(t)\}$ к функции $u_0(t) \in C^2$ при $0 < t \le b$.

В силу равенства (2.8) и условия (2.7) имеем

$$I(v) = \frac{n-1}{n+1} \int_0^b \frac{v^{n+1}}{l(t)}\, dt$$

и тем же путем, которым доказывался предельный переход от функций $u_k(t)$, $u_k'(t)$ к функции $u_0(t)$, $u_0'(t)$, можно показать, что для $n < 5$ справедливо равенство

$$\lim_{k \to \infty} I(u_k) = I(u_0) = \inf_{v \in \Gamma} I(v) = \lambda(0,b).$$

Покажем, что $u_0(t) \not\equiv 0$ на интервале $0 \le t \le b$. Полагая $\beta = \int_0^b u_k'^2 dt$ для функции $u_k(t) \not\equiv 0$, имеем $u_k^2(t) \le t\beta$. Из условия

$$\beta = \int_0^b u_k'^2 dt = \int_0^b \frac{u_k^{n+1}(t)}{l(t)}\, dt$$

получаем, что

$$1 \le \beta^{\frac{n-1}{2}} \int_0^b \frac{\tau^{\frac{n+1}{2}}}{l(\tau)}\, d\tau \qquad \text{и} \qquad \beta \ge \left(\int_0^b \frac{\tau^{\frac{n+1}{2}}}{l(\tau)}\, d\tau \right)^{\frac{2}{1-n}} = \beta_0 .$$

Для $n < 5$ интеграл $\int_0^b \frac{\tau^{\frac{n+1}{2}}}{l(\tau)} d\tau$ сходится, поэтому $\beta_0 > 0$.

Следовательно, $\int_0^b u_0'^2(t)\,dt \ge \beta_0 > 0$ и $u_0(t) \not\equiv 0$. Положим

$$\bar{u}_0''(t) = - c_0 \frac{u_0^n(t)}{l(t)}$$

и построим функцию $\bar{u}_0(t)$ согласно формулам (2.10) и (2.11). Тогда $I(\bar{u}_0) \le I(u_0)$. Однако $I(u_0) = \inf\limits_{v \in \Gamma} I(v)$, поэтому на самом деле $I(\bar{u}_0) = I(u_0)$ и $\bar{u}_0(t) \equiv u_0(t)$.

при $0 < t < b$. Итак, $u_0(t)$ удовлетворяет уравнению $u_0'' + c_0 \frac{u_0^n}{l(t)} = 0$. Отсюда, учитывая, что $u_0(0) = u_0(b) = 0$, получаем равенство

$$\int_0^b u_0'^2 dt = c_0 \int_0^b \frac{u_0^{n+1}}{l(t)} dt.$$

Поскольку $u_0(t)$ удовлетворяет условию нормировки (2.7), имеем $c_0 = 1$. Итак, $u_0(t)$ удовлетворяет уравнению (2.3) и условиям $u_0(0) = u_0(b) = 0$. В силу формул (2.9)–(2.11) легко показать, что $u_0(t) > 0$ для $0 < t < b$.

Итак, для любого $b < ½$ уравнение (2.3) имеет решение $v = v(t)$, знакоопределенное на интервале $0 < t < b$ и удовлетворяющее краевым условиям $v(0) = v(b) = 0$.

На любом интервале $a_{\nu-1} \le t \le a_\nu$, $a_{\nu-1} > 0$ и $a_\nu < b < ½$ теорема 2.1 Nehari /6/ применима непосредственно и обеспечивает существование знакоопределенного решения $v_\nu(t)$, исчезающего в концах интервала. При этом $l(v_\nu) = \inf_{v \in \Gamma_\nu} l(v) = \lambda(a_{\nu-1}, a_\nu)$. Класс Γ_ν определяется так же, как и класс Γ, но только для интервала $[a_{\nu-1}, a_\nu]$.

Рассмотрим возможные разбиения интервала $(0, b)$ точками $a_1, \dots, a_i$. Определим

$$\Lambda = \sum_{\nu=1}^{i+1} \lambda(a_{\nu-1}, a_\nu), \quad a_0 = 0, \quad a_{i+1} = b.$$

Каждому значению Λ при фиксированном разбиении интервала $(0, b)$ соответствует кривая, составленная из v_ν $(\nu = 1, \dots, i+1)$. Поскольку уравнение (2.3) при рассматриваемых n от смены знака v не зависит, можно построить кривую так, что v_ν и $v_{\nu+1}$ имеют разные знаки. Покажем, что функция $\Lambda = \Lambda(a_1, \dots, a_i)$ достигает минимума на некотором разбиении отрезка $[0, b]$. Для этого достаточно доказать следующую вспомогательную лемму.

Л е м м а 3. Пусть c и d –точки интервала $(0, b)$, $0 \le c < d \le b$. Тогда $\lambda(c, d) \le \lambda(c', d')$ при $c \le c' < d' \le d$, $\lambda(c, d) \to \infty$ при $d - c \to 0$. Кроме того, $\lambda(c, d)$ –непрерывная функция от c, d.

Доказательство. Пусть $\lambda(c', d') = l(v)$. Положим $u(t) = v(t)$ для $c' \le t \le d'$, $u(t) \equiv 0$ для $d' \le t \le d$. Очевидно, $\lambda(c, d) \le l(u) = l(v) = \lambda(c', d')$.

Остальные утверждения леммы достаточно доказать для $c = 0$. Ранее было установлено, что $1 \le \beta^{\frac{n-1}{2}} \int_0^d \frac{r^{\frac{n+1}{2}}}{l(r)} dr$, если $\beta = \int_0^d v'^2 dt$. При $d \to 0$ и $1 < n < 5$ интеграл, входящий в неравенство, стремится к нулю. Следовательно, $\beta \to \infty$ при $d \to 0$. Но $\lambda(0, d) = l(v) = \frac{n-1}{n+1}\beta$. Итак, $\lambda(0, d) \to \infty$ при $d \to 0$. Покажем, что $\lambda(0, d)$ непрерывно зависит от d. Пусть $\lambda(0, d) = l(v)$ и $0 < d' < d$. Положим $t = \xi \frac{d}{d'}$ и $u(\xi) = v(t)$. Выберем постоянную γ так, чтобы функция $w(\xi) = \gamma \cdot u(\xi)$ удовлетворяла условию нормировки (2.7) на интервале $[0, d']$. В таком случае γ определяется равенством

$$\int_0^{d'} u'^2\, d\xi = \gamma^{n-1} \int_0^{d'} \frac{u^{n+1}}{f(\xi)}\, d\xi \; .$$

Отсюда ясно, что $\gamma \to 1$, если $d' \to d$.

Так как $w(0) = w(d') = 0$ и функция $w(\xi)$ удовлетворяет условию нормировки, имеем

$$\lambda(0, d') \le I(w) = \frac{n-1}{n+1} \int_0^{d'} w'^2(\xi)\, d\xi = \frac{n-1}{n+1} \int_0^{d} \gamma^2 \cdot \frac{d}{d'} \cdot v'^2(t)\, dt \le I(v) + \epsilon$$

при малом положительном ϵ и достаточной близости d' и d. Так как $I(v) = \lambda(0, d)$, то $\lambda(0, d') \le \lambda(0, d) + \epsilon$. Кроме того, как было показано, $\lambda(0, d') \ge \lambda(0, d)$, ибо $d' < d$. Отсюда следует непрерывная зависимость $\lambda(0, d)$ от d, и завершается доказательство леммы 3.

Пусть $\Lambda = \Lambda(a_1, \dots, a_i)$ достигает минимума на разбиении отрезка $[0, b]$ точками $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i$ и $\Lambda(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i) = I(v)$. Функция $v = v(t)$ на каждом из интервалов $[\bar{a}_{\nu-1}, \bar{a}_\nu]$ удовлетворяет уравнению (2.3) и условиям $v(\bar{a}_{\nu-1}) = v(\bar{a}_\nu) = 0$; $\nu = 1, \dots, i+1$ и $\bar{a}_0 = 0$, $\bar{a}_{i+1} = b$. Считаем без ограничения общности доказательств, что $v = v(t)$ меняет знак при прохождении через точки $\bar{a}_\nu$. Покажем теперь, что $v = v(t)$ есть решение уравнения (2.3) на всем интервале $[0, b]$. Для этого достаточно установить равенство

$$\lim_{t \to \bar{a}_\nu - 0} v'(t) = \lim_{t \to \bar{a}_\nu + 0} v'(t).$$

Пусть $\lim_{t \to \bar{a}_\nu - 0} v'(t) = v'_-(\bar{a}_\nu)$, $\lim_{t \to \bar{a}_\nu + 0} v'(t) = v'_+(\bar{a}_\nu)$. Предположим, что $v'_-(\bar{a}_\nu) \ne v'_+(\bar{a}_\nu)$ для какой-то точки $\bar{a}_\nu$. Пусть также $v(t) > 0$ для $t \in (\bar{a}_{\nu-1}, \bar{a}_\nu)$ и $v(t) < 0$ для $t \in (\bar{a}_\nu, \bar{a}_{\nu+1})$. Для малого $\delta > 0$ построим функцию $u(t)$ по следующему правилу: $u(t) = v(t)$ для $t \le \bar{a}_\nu - \delta$ и $t \ge \bar{a}_\nu + \delta$, а на интервале $\bar{a}_\nu - \delta \le t \le \bar{a}_\nu + \delta$ совпадает с уравнением прямой, проведенной через точки графика $v(t)$ с абсциссами $t = \bar{a}_\nu - \delta$ и $t = \bar{a}_\nu + \delta$. Пусть эта прямая пересекает отрезок $[\bar{a}_\nu - \delta, \bar{a}_\nu + \delta]$ в точке c. Подберем константы ρ, σ так, чтобы выполнялись равенства

$$\int_{\bar{a}_{\nu-1}}^{c} u'^2\, dt = \rho^{n-1} \int_{\bar{a}_{\nu-1}}^{c} \frac{u^{n+1}}{f(t)}\, dt \; ,$$

$$\int_{c}^{\bar{a}_{\nu+1}} u'^2\, dt = \sigma^{n-1} \int_{c}^{\bar{a}_{\nu+1}} \frac{u^{n+1}}{f(t)}\, dt \; .$$

Определим, наконец, функцию $w(t)$ равенствами $w(t) = u(t) = v(t)$ для $t \le \bar{a}_{\nu-1}$ и $t \ge \bar{a}_{\nu+1}$; $w(t) = \rho u(t)$ для $t \in [\bar{a}_{\nu-1}, c]$ и $w(t) = \sigma \cdot u(t)$ для $t \in [c, \bar{a}_{\nu+1}]$.

По определению функции $v = v(t)$ имеем $I(v) \le I(w)$, где $I(v)$ определен равенством (2.6). С другой стороны, замечая, что функция $G(r^2, t) = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{(r^2)^{\frac{n+1}{2}}}{f(t)}$ выпукла вниз по r^2 при $n > 1$, имеем

$$\frac{2}{n+1} \int_{\bar{a}_{\nu-1}}^{\bar{a}_{\nu+1}} \frac{(w^2)^{\frac{n+1}{2}}}{f(t)}\, dt \ge \frac{2}{n+1} \int_{\bar{a}_{\nu-1}}^{\bar{a}_{\nu+1}} \frac{(v^2)^{\frac{n+1}{2}}}{f(t)}\, dt + \int_{\bar{a}_{\nu-1}}^{\bar{a}_{\nu+1}} (w^2 - v^2) \frac{v^{n-1}}{f(t)}\, dt .$$

Следовательно,

$$\int_{\bar{a}_{\nu-1}}^{\bar{a}_{\nu+1}} \left[w'^2 - \frac{2}{n+1} \cdot \frac{w^{n+1}}{f(t)} \right] dt \le \int_{\bar{a}_{\nu-1}}^{\bar{a}_{\nu+1}} \left[w'^2 - \frac{2}{n+1} \cdot \frac{v^{n+1}}{f(t)} - (w^2 - v^2) \frac{v^{n-1}}{f(t)} \right] dt =$$

$$= \frac{n-1}{n+1} \int_{\bar{a}_{\nu-1}}^{\bar{a}_{\nu+1}} \frac{v^{n+1}}{f(t)}\, dt + \int_{\bar{a}_{\nu-1}}^{\bar{a}_{\nu+1}} \left[w'^2 - w^2 \cdot \frac{v^{n-1}}{f(t)} \right] dt .$$

Отсюда

$$I(w) \le I(v) + \int_{\bar{a}_{\nu-1}}^{\bar{a}_{\nu+1}} \left[w'^2 - w^2 \frac{v^{n-1}}{f(t)} \right] dt .$$

Заметим, что $w^2(t) \frac{v^{n-1}(t)}{f(t)} > 0$ при $t \in [\bar{a}_{\nu-1}, \bar{a}_{\nu+1}]$, ибо $n = \frac{2p+1}{2q+1} > 1$. Продолжая оценку $I(w)$, можем видеть, что

$$I(w) \le I(v) + \rho^2 \int_{\bar{a}_{\nu-1}}^{\bar{a}_\nu - \delta} \left[u'^2 - \frac{u^{n+1}}{f(t)} \right] dt + \sigma^2 \int_{\bar{a}_\nu + \delta}^{\bar{a}_{\nu+1}} \left[u'^2 - \frac{u^{n+1}}{f(t)} \right] dt + \rho^2 \int_{\bar{a}_\nu - \delta}^{c} u'^2\, dt + \sigma^2 \int_{c}^{\bar{a}_\nu + \delta} u'^2 dt = I(v) + S.$$

Покажем, что $S < 0$ при достаточно малом δ.

Функция $u = u(t)$ на интервале $[\bar{a}_{\nu-1}, \bar{a}_\nu - \delta]$ и $[\bar{a}_\nu + \delta, \bar{a}_{\nu+1}]$ удовлетворяет уравнениям $u'' + \frac{u^n}{f(t)} = 0$, $u(\bar{a}_{\nu-1}) = u(\bar{a}_{\nu+1}) = 0$. Следовательно,

$$\int_{\bar{a}_{\nu-1}}^{\bar{a}_\nu - \delta} \left[u'^2 - \frac{u^{n+1}}{f(t)} \right] dt = u(\bar{a}_\nu - \delta) \cdot u'(\bar{a}_\nu - \delta) = v(\bar{a}_\nu - \delta) \cdot v'(\bar{a}_\nu - \delta),$$

аналогично

$$\int_{\bar{a}_\nu + \delta}^{\bar{a}_{\nu+1}} \left[u'^2 - \frac{u^{n+1}}{f(t)} \right] dt = - v(\bar{a}_\nu + \delta) \cdot v'(\bar{a}_\nu + \delta).$$

В таком случае

$$S \le v(\bar{a}_\nu - \delta) v'(\bar{a}_\nu - \delta) - v(\bar{a}_\nu + \delta) v'(\bar{a}_\nu + \delta) + (\rho^2 - 1) v(\bar{a}_\nu - \delta) v'(\bar{a}_\nu - \delta) -$$
$$- (\delta^2 - 1) v(\bar{a}_\nu + \delta) v'(\bar{a}_\nu + \delta) + \int_{\bar{a}_\nu - \delta}^{\bar{a}_\nu + \delta} u'^2 dt + (|\rho^2 - 1| + |\sigma^2 - 1|) \int_{\bar{a}_\nu - \delta}^{\bar{a}_\nu + \delta} u'^2 dt .$$

По построению, на интервале $[\bar{a}_\nu - \delta, \bar{a}_\nu + \delta]$ функция $u(t)$ задается уравнением

$$u(t) = v(\bar{a}_\nu - \delta) + \frac{t - \bar{a}_\nu + \delta}{2\delta} \cdot [v(\bar{a}_\nu + \delta) - v(\bar{a}_\nu - \delta)].$$

Следовательно,

$$\int_{\bar{a}_\nu - \delta}^{\bar{a}_\nu + \delta} u'^2 dt = \frac{1}{2\delta} [v(\bar{\varepsilon}_\nu + \delta) - v(\bar{a}_\nu - \delta)]^2 .$$

Устремим теперь δ к нулю. При этом $c \to \bar{a}_\nu$ и, в силу уравнений для ρ и σ, также $\rho^2 \to 1$ и $\sigma^2 \to 1$. Далее имеем

$$v(\bar{a}_\nu \pm \delta) = \pm \delta v'_\pm(\bar{a}_\nu) + O(\delta^3), \quad v'(\bar{a}_\nu \pm \delta) = v'_\pm(\bar{a}_\nu) + O(\delta^2).$$

В таком случае $v(\bar{a}_\nu - \delta)v'(\bar{a}_\nu - \delta) - v(\bar{a}_\nu + \delta)v'(\bar{a}_\nu + \delta) = -\delta[v'^2_-(\bar{a}_\nu) + v'^2_+(\bar{a}_\nu)] + O(\delta^3)$

и

$$\int\limits_{\bar{a}_\nu - \delta}^{\bar{a}_\nu + \delta} u'^2\, dt = \frac{\delta}{2}\,[v'^2_-(\bar{a}_\nu) + v'^2_+(\bar{a}_\nu)] + O(\delta^3).$$

Окончательно имеем при $\delta \to 0$

$$S \le -\frac{\delta}{2}\,[v'^2_-(\bar{a}_\nu) + v'^2_+(\bar{a}_\nu) + o(\delta).$$

При достаточно малом положительном δ правая часть неравенства для S отрицательна. Следовательно, $I(w) < I(v)$. Это противоречит определению $I(v) = \Lambda(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_i) = \min \sum\limits_{\nu=1}^{i+1} \lambda(a_{\nu-1}, a_\nu)$. Итак, $\lim\limits_{t \to \bar{a}_\nu - 0} v'(t) = \lim\limits_{t \to \bar{a}_\nu + 0} v'(t)$ при $\nu = 1, \ldots, i$. Следовательно, $v = v(t)$ есть решение уравнения (2.3) на интервале (o, b), имеющее внутри этого интервала i нулей и обращающееся в нуль на его концах. Соответствующая функция $\eta(x) = e^x \cdot v(t)$ также имеет по крайней мере $i+1$ нулей на интервале $0 < x < \infty$. Лемма 2 доказана.

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется

Л е м м а 4. Пусть $\eta = \eta(x)$ –решение уравнения (1.3), такое, что $\eta(x_0) = 0$, $\eta'(x_0) = \epsilon$, $x_0 > 0$. При достаточно малом $|\epsilon|$ и достаточно большом x_0 функция $\eta(x)$ не имеет нулей на полупрямой $x > x_0$.

Доказательство. Уравнение (1.3) не зависит от замены η на $-\eta$, поэтому достаточно доказать лемму для положительных ϵ. Итак, пусть при некотором $x = x_0 > 0$ имеем $\eta(x_0) = 0$, $\eta'(x_0) = \epsilon > 0$. Если $\eta(x) < x$ для всех $x > x_0$, то $\eta = \eta(x)$ не может иметь максимума при $x > x_0$ в силу уравнения (1.3), а следовательно, и не обращается в нуль при $x > x_0$. Пусть $\eta(x_1) = x_1$, $0 < \eta(x) < x$ для всех x, $x_0 < x < x_1$. Выше прямой $\eta = x$ имеем $\eta'' = \eta\left(1 - \frac{\eta^{n-1}}{x^{n-1}}\right) < 0$. В некоторой точке $x = x_2$ кривая $\eta = \eta(x)$ вновь достигает прямой $\eta = x$, причем $x_2 \le x_1 + \frac{\pi}{\sqrt{n-1}}$. Доказательство этого факта содержится в работе /2/. Умножая уравнение (1.3) на $2\eta'$ и интегрируя его в пределах от x_0 до x, получаем для $\eta = \eta(x)$ равенство

$$\eta'^2(x) - \eta^2(x) + \frac{2}{n+1} \cdot \frac{\eta^{n+1}(x)}{x^{n-1}} = \epsilon^2 - 2\frac{n-1}{n+1} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\eta^{n+1}}{x^n}\, dx.$$

Если $2\frac{n-1}{n+1} \int\limits_{x_0}^{x_2} \frac{\eta^{n+1}}{x^n}\, dx > \epsilon^2$, то для $x > x_2$ левая часть равенства отрицательна, вследствие чего $\eta(x)$ не может обратиться в нуль при $x > x_2$ или стремиться к нулю при $x \to \infty$.

Поскольку $x < \eta(x)$ для всех x, $x_1 < x < x_2$, имеет место оценка

$$2\frac{n-1}{n+1}\int_{x_0}^{x_2}\frac{\eta^{n+1}}{x^n}dx > 2\frac{n-1}{n+1}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\eta^{n+1}}{x^n}dx > 2\frac{n-1}{n+1}\int_{x_1}^{x_2}x\,dx > \frac{n-1}{n+1}x_1(x_2-x_1). \qquad (2.14)$$

Считая ϵ достаточно малым и x_0 достаточно большим, оценим снизу величину x_2-x_1. На интервале $[x_1, x_2]$ функция $\eta=\eta(x)$ удовлетворяет условиям

$$\eta''+\eta[(\frac{\eta}{x})^{n-1}-1]=0,\quad \eta(x_1)=x_1,\quad \eta'(x_1)=\eta'|_{x=x_1},\quad \frac{\eta(x)}{x}\geq 1.$$

Функция $\frac{\eta(x)}{x}=y(x)$ удовлетворяет уравнению $y''+\frac{2}{x}y'-y+y^n=0$, т.е. уравнению (1.1). При этом $y(x_0)=0$, $y'(x_0)=\frac{\epsilon}{x_0}$, $y(x_1)=1$, $y(x_2)=1$, $0<y(x)<1$ при $x_0<x<x_1$ и $y(x)>1$ при $x_1<x<x_2$. Очевидно, $\frac{\eta(x)}{x}\leq\max\limits_{x_1\leq x\leq x_2}y(x)$. Так как $-y(x)+y^n(x)>0$ при $n>1$ и $x_1<x<x_2$, то

$y''(x)<0$ для всех x, если $x_1<x\leq\bar{x}$ и $y(\bar{x})=\max\limits_{[x_1,x_2]}y(x)$. Поэтому

$y(x)\leq 1+(x_2-x_1)y'(x_1)<1+\frac{\pi}{\sqrt{n-1}}y'(x_1)$. Итак, $\frac{\eta(x)}{x}\leq 1+\frac{\pi}{\sqrt{n-1}}y'(x_1)$ для всех x, $x_1\leq x\leq x_2$. Продолжая оценку $\frac{\eta(x)}{x}$, сравним решение $y=y(x)$ с решениями следующих уравнений:

$$u''-u+u^n=0,\ u(x_0)=0,\ u'(x_0)=\frac{\epsilon}{x_0};$$
$$z''-z=0,\ z(x_0)=0,\ z'(x_0)=\frac{\epsilon}{x_0}. \qquad (2.15)$$

Кривая $u=u(x)$ на участке $0<u\leq 1$ круче, чем кривая $y=y(x)$ на участке $0<y\leq 1$ при равных начальных условиях. При этом $u'|_{u=1}>y'(x)|_{y=1}$. Заметим также, что $u-z=\int_{x_0}^{x}(-u^n)\,\mathrm{sh}(x-t)\,dt$. Кривая $z=z(x)$ раньше достигает прямой $z=1$, чем кривая $u=u(x)$ достигает прямой $u=1$. Согласно уравнениям для функций $z(x)$ и $u(x)$ имеем $z'|_{z=1}>u'|_{u=1}$. Итак, $z'|_{z=1}>y'|_{y=1}=y'(x_1)$. Пусть $z'|_{z=1}=z'(\bar{x}_1)$. В силу условий (2.15) имеем $z'(\bar{x}_1)=\frac{\epsilon}{x_0}\,\mathrm{ch}(\bar{x}_1-x_0)$. Величина $\bar{x}_1-x_0$ определяется из уравнения $z(\bar{x}_1)=1$, т.е. $\frac{\epsilon}{x_0}\,\mathrm{sh}(\bar{x}_1-x_0)=1$. Имеем $\bar{x}_1-x_0=\ln[\frac{x_0}{\epsilon}+\sqrt{(\frac{x_0}{\epsilon})^2+1}]$. Следовательно,

$$z'(\bar{x}_1)=\tfrac{1}{2}[1+(1+\frac{\epsilon^2}{x_0^2})^{1/2}+\frac{\epsilon^2}{x_0^2}(1+(1+\frac{\epsilon^2}{x_0^2})^{1/2})^{-1}]<1+\frac{\epsilon^2}{2x_0^2}$$

для всех $\frac{\epsilon}{x_0}<1$. В таком случае $y'(x_1)<1+\frac{\epsilon^2}{2x_0^2}$. Это означает, что при $\frac{\epsilon}{x_0}<1$ на интервале $x_1\leq x\leq x_2$ справедлива оценка

$$1\leq\frac{\eta(x)}{x}\leq 1+\frac{\pi}{\sqrt{n-1}}+\frac{\epsilon^2}{x_0^2}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{n-1}}<1+\frac{3\pi}{2\sqrt{n-1}}.$$

Полагая $C(n)=1+\frac{3\pi}{2\sqrt{n-1}}$, рассмотрим уравнение

$$z'' + z\,[C^{n-1}(n) - 1] = 0.$$

Найдем такое его решение $z = z(x)$, что $z(x_1) = x_1$, $z'(x_1) = \eta'(x_1)$. Очевидно, $(\frac{\eta}{x})^{n-1} - 1 < C^{n-1} - 1$ на интервале (x_1, x_2). Согласно теореме о численном сравнении (см. Трикоми[7]) $z(x) \le \eta(x)$, пока $z(x) \ge x$. Следовательно, кривая $z = z(x)$ пересекает прямую $z = x$ раньше, чем $\eta = \eta(x)$ –прямую $\eta = x$, так что, если $z(\bar{x}_2) = \bar{x}_2$, $z(x) > x$ для всех x, $x_1 < x < \bar{x}_2$, то $\bar{x}_2 - x_1 \le x_2 - x_1$. Для получения оценки снизу величины $x_2 - x_1$ осталось оценить $\bar{x}_2 - x_1$. Уравнение $z(\bar{x}_2) = \bar{x}_2$ определяет величину $\bar{x}_2$. Это уравнение в силу уравнения для $z = z(x)$ имеет вид

$$x_1 \cos\sqrt{C^{n-1}(n) - 1}\,(\bar{x}_2 - x_1) + \frac{\eta'(x_1)}{\sqrt{C^{n-1}(n) - 1}} \sin\sqrt{C^{n-1}(n) - 1}\,(\bar{x}_2 - x_1) = \bar{x}_2.$$

Полагая $\sqrt{C^{n-1}(n) - 1}\,(\bar{x}_2 - x_1) = t$, $x_1\sqrt{C^{n-1}(n) - 1} = p$, получаем для t уравнение $p\cos t + \eta'(x_1)\sin t = t + p$.

Интересующий нас положительный корень этого уравнения не меньше, чем положительный корень уравнения

$$p - \frac{p}{2}\tau^2 + \eta'(x_1)\tau - \frac{\eta'(x_1)}{6}\tau^3 = \tau + p$$

или уравнения

$$\tau^2 + \frac{3p}{\eta'(x_1)}\cdot\tau - \frac{6(\eta'(x_1) - 1)}{\eta'(x_1)} = 0.$$

Отсюда

$$\tau = \frac{3p}{2\eta'(x_1)}\cdot\left[\sqrt{1 + \frac{8}{3}\cdot\frac{\eta'(x_1)(\eta'(x_1) - 1)}{p^2}} - 1\right].$$

Оценим величину τ снизу.

Замечая, что $\eta'(x_1) = y(x_1) + x_1 y'(x_1)$ и $y'(x_1) < 1 + \frac{\epsilon^2}{2x_0^2}$, $(\frac{\epsilon}{x_0} < 1,\ y(x_1) = 1)$, получаем оценку для $\eta'(x_1)$ вида:

$$\eta'(x_1) < 1 + x_1\cdot\left(1 + \frac{\epsilon^2}{2x_0^2}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{3p}{2\eta'(x_1)} = \frac{3\sqrt{C^{n-1}(n) - 1}\cdot x_1}{2\eta'(x_1)} > \frac{3\sqrt{C^{n-1}(n) - 1}\cdot x_1}{2(1 + \frac{\epsilon^2}{2x_0^2})(x_1 + 1)} > \frac{3\sqrt{C^{n-1}(n) - 1}\cdot x_1}{4x_1(1 + \frac{\epsilon^2}{2x_0^2})} > \frac{\sqrt{C^{n-1}(n) - 1}}{2}$$

при $\frac{\epsilon}{x_0} < 1$ и $x_1 > x_0 \ge 1$.

Заметим теперь, что для определения поведения кривой $\eta = \eta(x)$ при $x > x_1$ достаточно рассмотреть случай, когда $\eta'(x_1)$ велико, хотя и меньше $1 + x_1(1 + \frac{\epsilon^2}{2x_0^2})$.

Действительно, кривая $\eta=\eta(x)$ имеет нули на полупрямой $0<x<\infty$ в тех же точках, что и $y=y(x)=\frac{\eta(x)}{x}$. В силу уравнения (1.1) для функции $y=y(x)$ и всех $x>x_1$ справедливо равенство

$$y'^2(x)-y^2(x)+\frac{2}{n+1}y^{n+1}(x)=y'^2(x_1)-y^2(x_1)+\frac{2}{n+1}y^{n+1}(x_1)-4\int_{x_1}^{x}\frac{y'^2dx}{x}.$$

Поскольку $y(x_1)=1$, имеем

$$y'^2(x)-y^2(x)+\frac{2}{n+1}y^{n+1}(x)=y'^2(x_1)-\frac{n-1}{n+1}-4\int_{x_1}^{x}y'^2\frac{dx}{x}.$$

Равенство противоречиво, если $y'(x_1)\le\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ и $y(x)=0$ в какой-то точке x, $x>x_1$. Следовательно, $\eta=\eta(x)$ не имеет нулей при $x>x_1$, если $\eta'(x_1)=y(x_1)+x_1y'(x_1)\le$ $\le 1+x_1\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$.

Итак, пусть $\eta'(x_1)>1+x_1\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$. В таком случае

$$\frac{8}{3}\cdot\frac{\eta'(x_1)(\eta'(x_1)-1)}{p^2}>\frac{8}{3}\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{x_1^2}{x_1^2(C^{n-1}(n)-1)}=\frac{8(n-1)}{3(n+1)(C^{n-1}(n)-1)}.$$

Окончательно имеем

$$r\ge\tfrac{1}{2}\sqrt{C^{n-1}(n)-1}\,[\sqrt{1+\frac{8(n-1)}{3(n+1)(C^{n-1}(n)-1)}}-1].$$

Имеем также $\sqrt{C^{n-1}(n)-1}\,(\bar x_2-x_1)=t\ge r$ $x_2-x_1>\bar x_2-x_1$. Следовательно,

$$x_2-x_1\ge\frac{1}{2}[\sqrt{1+\frac{8(n-1)}{3(n+1)(1+\frac{3\pi}{2\sqrt{n-1}})^{n-1}-1)}}-1]=P(n),$$

если $\frac{\varepsilon}{x_0}<1$ и $x_0>1$. Завершим оценку (2.14): $2\frac{n-1}{n+1}\int_{x_0}^{x_2}\frac{\eta^{n+1}dx}{x^n}>\frac{n-1}{n+1}\cdot P(n)x_1>\varepsilon^2$ при $x_1>x_0>\frac{n+1}{(n-1)P(n)}$, $\varepsilon<1$, $x_0>1$ и фиксированном $n>1$.

Лемма 4 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Доказательство. Согласно лемме 4 при любом рассматриваемом значении $n>1$, n фиксировано, существует решение $\eta=\eta_1(x)$ уравнения (1.3), $\eta_1(0)=0$ и $\eta_1'(0)=a_1$, имеющее не менее одного нуля на интервале $0<x<\infty$. Обозначим $\ell_0^a=\{a\}$ множество значений начальных производных a, $a<a_1$, соответствующих решениям $\eta=\eta(x)$, не имеющим нулей на интервале $0<x<\infty$. Очевидно, $\ell_0^a\subset L_0^a$ и ℓ_0^a содержит все a, $a\le(\frac{n+1}{2})^{\frac{1}{n-1}}$. Пусть $\bar a_0=\sup_{\ell_0^a}\{a\}$ и $\eta=\bar\eta_0(x)$ – решение уравнения (1.3), такое, что $\bar\eta_0(0)=0$, $\bar\eta_0'(0)=\bar a_0$. Точно такие же рассуждения, как и при доказательстве теоремы 2 работы /2/, показывают, что $\eta=\bar\eta_0(x)$ является положительным решением задачи (1.3)-(1.4), а $\bar y_0(x)=\frac{\bar\eta_0(x)}{x}$ – положительным решением задачи (1.1)-(1.2). Функция $\eta=\bar\eta_0(x)$ не имеет нулей на интервале $0<x<\infty$, $\bar\eta_0(x)\to 0$ при $x\to\infty$ и, как легко видеть, $\bar\eta_0'(x)\to 0$ при $x\to\infty$.

Согласно лемме 1 для любого сколь угодно большого T и любого сколь угодно малого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, $\delta = \delta(\epsilon, T)$, что $|\eta(x) - \bar{\eta}_0(x)| < \frac{\epsilon}{2}$, $|\eta'(x) - \bar{\eta}_0'(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ для любого x, $0 \le x \le T$, где $\eta(x)$ – положительные решения уравнения (1.3), такие, что $\eta(0) = 0$, $|\eta'(0) = \bar{a}_0| < \delta$. Пусть $T > 1$ таково, что $\bar{\eta}_0(x) < \frac{\epsilon}{2}$, $|\bar{\eta}_0'(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ при $x \ge T$, $\epsilon \ll 1$. В таком случае $\eta(T) < \epsilon$, $|\eta'(T)| < \epsilon$, $|\eta'(0) - \bar{a}_0| < \delta$. Предположим, что $\eta = \eta(x)$ для некоторых x, $x \ge T_1 \ge T$, возрастает, оставаясь положительным для всех меньших значений x. При достаточно малом ϵ это означает, что $\eta = \eta(x)$ имеет точку минимума на интервале $0 < x \le T_1$, $x = x_{min}$, $\eta'(x_{min}) = 0$, $\eta(x_{min}) < x_{min}$.
Для такого решения $\eta = \eta(x)$ при $x > x_{min}$ справедливо равенство, уже использовавщееся ранее:

$$\eta'^2(x) - \eta^2(x) + \frac{2}{n+1} \cdot \frac{\eta^{n+1}(x)}{x^{n-1}} = -\eta^2(x_{min})[1 - \frac{2}{n+1} \cdot \frac{\eta^{n-1}(x_{min})}{x_{min}^{n-1}}] - 2\frac{n-1}{n+1}\int_{x_{min}}^{x} \frac{\eta^{n+1}(t)}{t^n}\,dt .$$

Как видно, левая часть равенства остается отрицательной для всех $x > x_{min}$ и, следовательно, $\eta(x)$ не может обратиться в нуль при $x > x_{min}$.

Рассмотрим другую возможность. Предположим, $\eta = \eta(x)$ для $x > T$ убывает. При выбранном $\delta = \delta(\epsilon, T)$ найдется $a = a_1$, $|a_1 - \bar{a}_0| < \delta$, такое, что соответствующее решение $\eta = \eta_1(x)$ уравнения (1.3), $\eta_1(0) = 0$ и $\eta_1'(0) = a_1$, при некотором $x = x_0 > T$ пересекает ось x. Действительно, в противном случае все решения $\eta = \eta(x)$, $|\eta'(0) - \bar{a}_0| < \delta$, для всех $x > 0$ остаются положительными и не имеют нулей на интервале $0 < x < \infty$. Это противоречит определению $\bar{a}_0 = \sup_{\ell_0^a}\{a\}$.

Пусть $\eta_1(x_0) = 0$, $x_0 > T$. Очевидно, $|\eta_1'(x_0)| = \epsilon_1 \le \epsilon$. Как показывает лемма 4, при достаточно малом ϵ такое решение не имеет нулей при $x > x_1$ и не стремится к нулю при $x \to \infty$. Более того, согласно лемме 1, найдется такое $\delta_1 > 0$, что все решения $\eta = \eta(x)$ уравнения (1.3) обладают тем же свойством, что и $\eta = \eta_1(x)$, если $|\eta'(0) - a_1| < \delta_1$. Такие решения имеют в точности один нуль на интервале $0 < x < \infty$.

Рассмотрим теперь эти решения, имеющие только один нуль при $0 < x < \infty$, и их производные в δ_1 –окрестности значения a_1. Согласно лемме 2, найдется такое $a = a_2$, что решение $\eta = \eta_2(x)$ уравнения (1.3), $\eta_2(0) = 0$ и $\eta_2'(0) = a_2$, имеет не менее двух нулей на интервале $0 < x < \infty$. Пусть для определенности $a_2 > a_1$. Обозначим $\ell_1^a = \{a\}$ множество значений начальных производных a, $a_1 \le a < a_2$, соответствующих решениям $\eta = \eta(x)$ с одним нулем на интервале $0 < x < \infty$. Пусть $\bar{a}_1 = \sup_{\ell_1^a}\{a\}$ и $\eta = \bar{\eta}_1(x)$ –решение уравнения (1.3), такое, что $\bar{\eta}_1(0) = 0$ и $\bar{\eta}_1'(0) = \bar{a}_1$. Покажем, что $\eta = \bar{\eta}_1(x)$ есть решение задачи (1.3)–(1.4), имеющее ровно один нуль на интервале $0 < x < \infty$. Допустим, это не так. Тогда

$\eta = \bar{\eta}_1(x)$ обязана быть решением задачи (1.3)-(1.4) без нулей на интервале $0 < x < \infty$. Любое другое допущение сразу приводит к противоречию с определением $\bar{a}_1 = \sup_{\ell^a} \{a\}$. В таком случае есть интервал значений a, $a > \bar{a}_1$, таких, что соответствующие решения $\eta = \eta(x)$ уравнения (1.3) не имеют нулей на интервале $0 < x < \infty$. Эти a образуют множество $\ell_0^a = \{a\}$, $a < a_2$. Выбирая $\bar{a}_0 = \sup_{\ell^a} \{a\}$, опять построим решение задачи (1.3)-(1.4), не имеющее нулей на интервале $0 < x < \infty$. Оно обладает тем свойством, что любое решение уравнения (1.3) с начальной производной из достаточно малой окрестности $\bar{a}_0$ или не имеет нулей, или имеет только один нуль на интервале $0 < x < \infty$. В силу выбора $\bar{a}_0 = \sup_{\ell^a} \{a\}$ все значения a из некоторого интервала, $a > \bar{a}_0$, $a < a_2$, соответствуют решениям $\eta = \eta(x)$ уравнения (1.3) с одним нулем на интервале $0 < x < \infty$. Это, однако, противоречит выбору $\bar{a}_1 = \sup_{\ell^a} \{a\}$ на интервале $a_1 < a < a_2$. Итак, $\eta = \bar{\eta}_1(x)$ – решение задачи (1.3)-(1.4) с одним нулем на интервале $0 < x < \infty$, а $y = \bar{y}_1(x) = \frac{\bar{\eta}_1(x)}{x}$ – аналогичное решение задачи (1.1)-(1.2). Если $a_2 < a_1$, то $\bar{a}_1 = \inf_{\ell^a} \{a\}$. Этот процесс можно продолжить, строя $\bar{a}_i = \sup_{\ell_i^a} \{a\}$ или $\bar{a}_i = \inf_{\ell_i^a} \{a\}$, $i \geq 2$. Здесь ℓ_i^a – множество a, таких, что $a_i \leq a < a_{i+1}$ или $a_{i+1} < a \leq a_i$. a_{i+1} есть начальная производная решения $\eta = \eta(x)$ уравнения (1.3), имеющего по крайней мере $i+1$ нулей на интервале $0 < x < \infty$. a_i и $a \in \ell_i^a$ – начальные производные решений, имеющих в точности i нулей на этом интервале. Выбор a_{i+1} производится согласно лемме 2. Выбор a_i делается в некоторой окрестности $\bar{a}_{i-1}$, начальной производной решения $\eta = \bar{\eta}_{i-1}(x)$ задачи (1.3)-(1.4) с $i-1$ нулем, как это было сделано для $i = 1$. Пусть $\bar{a}_i = \sup_{\ell_i^a} \{a\}$, $\bar{a}_i < a_{i+1}$ и $\eta = \bar{\eta}_i(x)$ – решения уравнения (1.3), $\bar{\eta}_i(0) = 0$ и $\eta_i'(0) = \bar{a}_i$. Допустим, это $\bar{\eta}_i(x)$ не есть решение задачи (1.3)-(1.4) с i нулями на интервале $0 < x < \infty$. Тогда это может быть только решение этой задачи с $i-1$ нулем, причем, согласно определению $\bar{a}_i = \sup_{\ell_i^a} \{a\}$, для $a \geq \bar{a}_i$ существует множество $\ell_{i-1}^a = \{a\}$, $a < a_{i+1}$. Пусть $\bar{a}_{i-1} = \sup_{\ell_{i-1}^a} \{a\}$, $\bar{a}_{i-1} < a_{i+1}$. Тогда $\eta = \bar{\eta}_{i-1}(x)$ есть решение задачи (1.3)-(1.4) с $i-1$ нулем на интервале $0 < x < \infty$, а для $a > \bar{a}_{i-1}$ существует множество ℓ_{i-2}^a с границей $\bar{a}_{i-2} = \sup_{\ell_{i-2}^a} \{a\}$. Продолжая этот процесс для a, $a_i < a < a_{i+1}$, придем к построению положительного решения $\eta = \bar{\eta}_0(x)$ задачи (1.3)-(1-4), $\bar{\eta}_0'(0) = \bar{a}_0$, причем для $a < \bar{a}_0$ существуют множества ℓ_1^a и ℓ_0^a. Однако для $a > \bar{a}_0$, $a < a_{i+1}$ вновь можно построить множество решений уравнения (1.3) с одним нулем на интервале $0 < x < \infty$. Это противоречит определению $\bar{a}_1 = \sup_{\ell_1^a} \{a\}$, границы множества ℓ_1^a, существующего при $a < \bar{a}_0$. Итак, $\eta = \bar{\eta}_i(x)$ есть на самом деле решение задачи (1.3)-(1.4) с i нулями на интервале $0 < x < \infty$, а $y = \bar{y}_i(x) = \frac{\bar{\eta}_i(x)}{x}$ – аналогичное решение задачи (1.1)-(1.2). Теорема 1 доказана.

Следствие. Для любого целого положительного i ($i = 0, 1, 2, \ldots$) и любого действительного n, $1 < n < 4$, существует решение $z = z_i(x)$ задачи (1.5)-(1.6), имеющее в точности i нулей на интервале $0 < x < \infty$.

Условие $n = \dfrac{2p+1}{2q+1}$ для уравнений (1.1)-(1.2) эквивалентно условию инвариантности уравнений относительно замены знака у решения. Последнее условие существенно, и оно использовано. Для уравнения же (1.5) оно выполняется при любом n.

III. Для численного нахождения решений задач (1.1)-(1.2), (1.3)-(1.4), (1.5)-(1.6) и использования их свойств интересен следующий результат.

Теорема 2. Любое решение задач (1.1)-(1.2), (1.3)-(1.4) и (1.5)-(1.6) неустойчиво по Ляпунову.

Не доказывая теорему полностью, положим $y_1 = \eta - \bar\eta(x)$, где $\bar\eta(x)$ – произвольное решение задачи (1.3)-(1.4), и составим систему для возмущения $y_1 = y_1(x)$:

$$y_1' = y_2,$$
$$y_2' = y_1 - \frac{1}{x^{n-1}}\left[(y_1 + \bar\eta(x))^n - \bar\eta^n(x)\right].$$

Полагая $\vec y = \binom{y_1}{y_2}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ имеем $\vec y' = A\vec y + f(x, \vec y)$, где $|f(x,\vec y)| = \left|\frac{1}{x^{n-1}}\left[(y_1+\bar\eta(x))^n - \bar\eta^n(x)\right]\right|$. Как видно, теорема 2 для решения задачи (1.3-(1.4) есть простое следствие теоремы 1.2 Коддингтона и Левинсона [8] (см. глава XIII, §1), если мы покажем, что для любого $\epsilon > 0$ неравенство $|f(x,\vec y)| < \epsilon|\vec y|$ выполняется при $|\vec y| < \delta$ и $x \geq T$ равномерно по x, $\delta = \delta(\epsilon)$ и $T = T(\epsilon)$.

Функция $\eta = \bar\eta(x)$ есть решение задачи (1.3)-(1.4), поэтому найдется такое T_1, что $|\bar\eta(x)| < 1$ при $x > T_1$. Положим $\delta = 1$. Функция $K(y_1, \bar\eta) = \dfrac{(y_1+\bar\eta(x))^n - \bar\eta^n(x)}{y_1}$

непрерывна в прямоугольнике $|y_1| \leq 1$, $|\bar\eta| \leq 1$ при $n > 1$, как легко видеть, и ограничена в нем: $|K(y_1, \bar\eta)| < M$. Мы имеем теперь $\dfrac{|f(x,\vec y)|}{|\vec y|} < \dfrac{M}{x^{n-1}}$ при $x \geq T_1$ и $\delta = 1$. Очевидно, $\dfrac{M}{x^{n-1}} < \epsilon$ для $x \geq T_2$, где $T_2 = \left(\frac{M}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{n-1}}$. При $\delta = 1$ и $T = \max(T_1, T_2)$ имеем $|f(x,\vec y)| < \epsilon|\vec y|$ для $|\vec y| \leq \delta$ и $x \geq T$ равномерно по x.

Мы покажем теперь, что величина показателя n нелинейности в уравнениях (1.1),(1.3) и (1.5) весьма существенно влияет на разрешимость соответствующих краевых задач. Имеет место

Теорема 3. Задачи (1.1)-(1.2),(1.3)-(1.4), (1.5)-(1.6) не имеют нетривиальных решений, если $n \geq 5$.

Достаточно доказать отсутствие решений у задачи (1.1)-(1.2) при $n \geq 5$. Для этого нам потребуются некоторые сведения об асимптотическом поведении решений задачи (1.1)-(1.2) при $x \to \infty$. Пусть $n > 1$ и $y = y(x)$ –решение задачи (1.1)(1.2). В таком случае $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = 0$. Полагая $f(x) = y'^2(x) - y^2(x) + \frac{2}{n+1}\cdot y^{n+1}(x)$, имеем $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ и $f'(x) = -\frac{4}{x}\cdot y'^2(x)$ в силу уравнения (1.1), т.ч. $f(x) \geq 0$ при $x < \infty$. С некоторого момента $x = x_0$, $|y(x_0)| = \epsilon < 1$ имеем $|y(x)| < \epsilon$ для $x > x_0$. Следовательно,

$$y'^2 \geq y^2\left(1 - \frac{2}{n+1}y^{n-1}\right) \geq y^2\left(1 - \frac{2}{n+1}\epsilon^{n-1}\right) = \sigma^2 y^2, \quad 0 < \sigma < 1,$$

при $x > x_0$ и $|y(x_0)| = \epsilon$. Отсюда $|y(x)| < \epsilon e^{-\sigma(x-x_0)}$ при $x > x_0$ (3.1).

Полагая $\frac{dy}{dx} = p$, имеем в силу уравнения (1.1)

$$p\frac{dp}{dy} = y - y^n - \frac{2}{x}p.$$

Для некоторого $x = x_1$ и всех $x > x_1$ имеем $|y(x) - y^n(x) - \frac{2}{x}p(x)| < \epsilon$, $\epsilon > 0$. Отсюда $|p\frac{dp}{dy}| < \epsilon$, $p(0) = p|_{y=0} = 0$, если $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} p = 0$.

Из последнего дифференциального неравенства для p, $p = p(y)$, и условия $p(0) = 0$ имеем $\frac{|p|^2}{2} < \epsilon\cdot|y|$ или, в силу оценки (3.1), $|y'(x)| < \epsilon\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{\sigma}{2}(x-x_0)}$ при $x > \max(x_0, x_1)$ (3.2).

Перейдем к доказательству теоремы 3. Это доказательство предложено Л.Г.Заставенко.

Доказательство. Пусть $y = y(x)$ – некоторое решение задачи (1.1)-(1.2). В таком случае

$$y'' + \frac{2}{x}y' - y + y^n = 0, \quad y(\infty) = 0, \quad y'(\infty) = 0.$$

Умножая уравнение на $2y'$, интегрируя в пределах от x до ∞ и учитывая краевые условия для y и y' на бесконечности, получаем равенство:

$$-y'^2(x) + y^2(x) - \frac{2}{n+1}y^{n+1}(x) + 4\int_x^\infty \frac{y'^2 dx}{x} = 0.$$

В силу оценки (3.2) интеграл в этом равенстве сходится. Умножим последнее равенство на x^2 и проинтегрируем по всем x. Имеем

$$\int_0^\infty x^2\left(-y'^2(x) + y^2(x) - \frac{2}{n+1}y^{n+1}(x)\right)dx + 4\int_0^\infty x^2\,dx\int_x^\infty \frac{y'^2(\rho)\,d\rho}{\rho} = 0.$$

В силу оценок (3.1) и (3.2) справедливо следующее преобразование:

$$4\int_0^\infty x^2\,dx\int_x^\infty \frac{y'^2(\rho)\,d\rho}{\rho} = 4\int_0^\infty d\rho\int_0^\rho \frac{y'^2(\rho)}{\rho}x^2\,dx = \frac{4}{3}\int_0^\infty \rho^2 y'^2(\rho)\,d\rho = \frac{4}{3}\int_0^\infty x^2 y'^2(x)\,dx.$$

Предыдущее равенство приобретает вид

$$\int_0^\infty x^2\left(y'^2 + 3y^2 - \frac{6}{n+1}y^{n+1}\right)dx = 0. \qquad (3.3)$$

Умножим теперь исходное уравнение (1.1) для функции $y = y(x)$ на $x^2\cdot y(x)$ и проинтегрируем по всем x от 0 до ∞.

$$\int_0^\infty x^2 yy''\,dx + \int_0^\infty 2xyy'\,dx - \int_0^\infty x^2(y^2 - y^{n+1})\,dx = 0.$$

Отсюда

$$x^2yy'\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (2xyy' + x^2y'^2)\,dx + \int_0^\infty 2xyy'\,dx - \int_0^\infty x^2(y^2 - y^{n+1})\,dx = 0.$$

Учитывая оценки (3.1) и (3.2), окончательно имеем

$$\int_0^\infty x^2(-y'^2 - y^2 + y^{n+1})\,dx = 0. \tag{3.4}$$

Складывая левые и правые части равенств (3.3) и (3.4), получаем важное соотношение для решения задачи (1.1)-(1.2):

$$\int_0^\infty x^2 [\,2y^2(x) + (1 - \frac{6}{n+1})\,y^{n+1}(x)]\,dx = 0. \tag{3.5}$$

Нас интересуют значения n вида $n = \frac{2p+1}{2q+1}$ (p и q — натуральные числа). В таком случае $y^{n+1}(x) \geq 0$ для $x \geq 0$ и любого решения задачи (1.1). Равенство (3.5) противоречиво при $1 - \frac{6}{n+1} \geq 0$, т.е. при $n \geq 5$. Этим результатом завершается доказательство теоремы 3.

Автор глубоко признателен Е.П. Жидкову за руководство работой.

Литература

1. Z.Nehari. On a Nonlinear Differential Equation Arising in Nuclear Physics. Proc. Royal Irish. Acad. 1963, 62, Sect. A, Nr. 9.
2. Е.П. Жидков, В.П. Шириков. Об одной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Препринт ОИЯИ, Р-1319, Дубна, 1963.
3. С.Ф. Шушурин. Исследование частицеподобных решений нелинейных уравнений поля. Диссертация. М., МОПИ. 1961.
4. В.Б. Гласко, Ф. Лерюст, Я.П. Терлецкий, С.Ф. Шушурин. Исследование частицеподобных решений нелинейного уравнения скалярного поля. ЖЭТФ, 35, 2 (8), 452-457 (1958).
5. Z.Nehari. On a Class of Nonlinear Second-order Differential Equations. Trans. Amer. Math. Soc. 1960, 95, No. 1, 101-123.
6. Z.Nehari. Characteristic Values Associated with a Class of Nonlinear Second-order Differentail Equations. Acta Math. 1961, 105, 141-175.
7. Ф. Трикоми. Дифференциальные уравнения. ИЛ, М., 1962.
8. Э. Коддингтон, Н. Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. ИЛ, М., 1958.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 мая 1963 г.