ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-1667

А.М. Хапаев, М.И. Широков

РАДИУС ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЧАСТИЦ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1964

А.М. Хапаев, М.И. Широков

Р-1667

РАДИУС ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЧАСТИЦ

Дубна 1964

В в е д е н и е

Рарита и Швед [1], Огиевецкий и Гришин [2] указали способ оценки радиуса взаимодействия частиц, использующий уже первые скудные сведения, которые получают экспериментаторы о какой-либо новой реакции. Способ состоит в следующем. Пусть известны экспериментальные значения поперечного сечения канала σ и дифференциального сечения $\sigma(\theta)$. Ясно, что эти данные согласуются с предположением о том, что в реакции играет роль только s -волна лишь в том случае, если $\sigma(\theta)=\sigma/4\pi$. Если это равенство не выполняется, то должны играть роль высшие парциальные волны (фазы) с орбитальным моментом $\ell > 0$. Оказывается, см. [2], что при заданном $\sigma(\theta)$ и предположенном наибольшем существенном орбитальном моменте ℓ_0, величина σ не может быть меньше, чем $4\pi\sigma(\theta)/\Sigma(\ell_0,\theta)$, где $\Sigma(\ell_0,\theta)$ - известная положительная функция, растущая с ростом ℓ_0, причем $\Sigma(0,\theta)=1$. Если $\sigma(\theta) >> \sigma/4\pi$, то потребуется довольно большое ℓ_0, чтобы согласовать такие значения $\sigma(\theta)$ и σ, т.е. чтобы σ равнялось или было бы несколько больше, чем $4\pi\sigma(\theta)/\Sigma(\ell_0,\theta)$. Под радиусом взаимодействия r_0 мы понимаем величину, связанную с ℓ_0 известным соотношением $r_0 p = \hbar\ \ell_0$. Изложенный способ имеет смысл применять только, если $\sigma(\theta) > \sigma/4\pi$.

В настоящей работе находится наименьшее возможное σ при заданных значениях $\sigma(\theta)$ и поляризации $P(\theta)$ в зависимости от предположенного ℓ_0.

§ 1. Исходные формулы и обозначения

Для представления σ, $\sigma(\theta)$ и $P(\theta)$ как функций конечного числа парциальных волн (или обобщенных фаз) мы будем пользоваться формулами общей (феноменологической) теории реакций в представлении проекций спинов на импульсы (helicity) [x]. Для реакции типа $a+b \to c+d$ (спины частиц j_a, j_b, j_c, j_d произвольны) имеем:

$$\sigma = \frac{\pi\hbar^2}{p_a^2}[(2j_a+1)(2j_b+1)]^{-1}\sum\sum_J (2J+1)|\langle m_c m_d|R^J|m_a m_b\rangle|^2 = \qquad (1.1)$$
$$= [(2j_a+1)(2j_b+1)]^{-1}\sum|\langle m_c m_d|\vec{f}|m_a m_b\rangle|^2$$

x) Это представление получило известность после работы Жакоба и Вика [4]. Однако оно вводилось и использовалось уже в работах Заставенко Л.Г. [5] и Чжоу Гуан-чжао [6].

$$\sigma(\theta) = \frac{h^2}{4p_a^2}\left[(2j_a+1)(2j_b+1)\right]^{-1}\Sigma\left|\sum_J (2J+1)\, d^J_{m_c+m_d,\, m_a+m_b}(\theta)\langle m_c m_d | R^J | m_a m_b\rangle\right|^2 = \tag{A}$$

$$= \left[(2j_a+1)(2j_b+1)\right]^{-1}\Sigma\left(\vec{q}_{m_c+m_d,\, m_a+m_b}\cdot\langle m_c m_d|\vec{f}|\, m_a m_b\rangle\right).$$

Здесь знак Σ обозначает сумму по проекциям m_a, m_b, m_c, m_d. J есть полный момент количества движения. Сумма по J берется до некоторого J_o (подлежащего определению). В рассматриваемых нами далее случаях значение J_o отличается от максимального орбитального момента ℓ_o на 1/2 или на 1, т.е. при больших J_o можно считать, что $J_o \cong \ell_o$. Остальные обозначения см. в работах /4/ и /7/. В правых частях формул (1) и (A) введены следующие обозначения: $\langle m_c\, m_d|\vec{f}|m_a m_b\rangle$ есть вектор с компонентами

$$\langle m_c\, m_d | f^J | m_a m_b\rangle = \sqrt{\pi}\, h/p_a \sqrt{2J+1}\langle m_c\, m_d | R^J | m_a m_b\rangle \tag{1.2}$$

$$J = 0,1,2 \ldots J_o \quad \text{или} \quad J = 1/2,\ 3/2\ \ldots J_o,$$

а $\vec{q}$ – вектор с компонентами

$$q^J_{m_c+m_d,\, m_a+m_b} = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}\; d^J_{m_c+m_d,\, m_a+m_b}(\theta). \tag{1.3}$$

Для компоненты поляризации $P(\theta)$ частицы со спином 1/2, перпендикулярной к плоскости реакции, в случае неполяризованных пучка и мишени можно получить выражение (см. /4/ и /8/):

$$\sigma(\theta)\,P(\theta) = (-i\sqrt{2})\frac{h^2}{4p_a^2}\left[(2j_a+1)(2j_b+1)\right]^{-1}\sqrt{2}\;\Sigma\sum_{m_c'} (-1)^{1/2-m_c'} C^{1-1}_{1/2\, m_c 1/2 - m_c'}$$

$$\sum_{J_1,J_2}(2J_1+1)\; D^{J_1}_{m_c+m_d,\, m_a+m_b}(-\pi,\theta,\pi-\phi)\langle m_c m_d | R^J | m_a m_b\rangle \cdot$$

$$(2J_2+1)\; D^{J_2 *}_{m_c'+m_d\, m_a+m_b}(-\pi,\theta,\pi-\phi)\langle m_c'\, m_d | R^J | m_a\, m_b\rangle^* = \tag{B}$$

$$= 2i\left[(2j_a+1)(2j_b+1)\right]^{-1}\sum_{m_a m_b, m_d}\left(\vec{q}_{-1/2+m_d,\, m_a+m_b}\langle -1/2\, m_d|\vec{f}|m_a m_b\rangle\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\vec{q}_{1/2+m_d,\, m_a+m_b}\langle +1/2,\, m_d|\vec{f}\,|\, m_a\, m_b\rangle^*\right).$$

В формуле (B) и всюду в дальнейшем предполагается сохранение четности. Это уменьшает число "обобщенных фаз" /4/:

$$\langle -m_c - m_d | R^J | -m_a - m_b\rangle = \langle m_c\, m_d | R^J | m_a m_b\rangle (-1)^{j_c+j_d-j_a-j_b}\;\eta_c\,\eta_d\,/\,\eta_a\,\eta_b. \tag{1.4}$$

Здесь η обозначают внутренние четности частиц. Функции $d^J_{m,n}$ тоже не все независимы[4]:

$$d^J_{-m,-n}(\theta) = (-1)^{m-n}\, d^J_{m,n}(\theta) = d^J_{n,m}(\theta). \qquad (1.5)$$

Наша задача состоит в нахождении наименьшего возможного значения σ при заданных $\sigma(\theta)$, $P(\theta)$ и J_o. Она сильно упрощается, если учесть следующее обстоятельство. Как видно из (A) и (B), функции $\sigma(\theta)$ и $P(\theta)$ непосредственно зависят только от переменных

$$< m_c m_d | z | m_a m_b > = (\vec{q}_{m_c+m_d,\, m_a+m_b} < m_c m_d | \vec{f} | m_a m_b >).$$

В силу неравенства Коши-Буняковского $|(\vec{q}\vec{f})|^2 < (\vec{q}|^2 \vec{f}|^2$, откуда $|\vec{f}|^2 < |(\vec{q}\vec{f})|^2/|\vec{q}|^2 = |z|^2/|\vec{q}|^2$. Поэтому

$$\sigma \geq \sigma_m = [(2j_a+1)(2j_b+1)]^{-1} \Sigma |< m_c\, m_d | z | m_a m_b >|^2 / |\vec{q}_{m_c+m_d,\, m_a+m_b}|^2. \qquad (C)$$

где σ_m зависит тоже только от переменных z. Знак равенства в (C) может достигаться (а именно при $< m_c\, m_d |\vec{f}| m_a\, m_b > \parallel \vec{q}_{m_c+m_d,\, m_a+m_b}$) и поэтому наименьшее значение σ совпадает с наименьшим значением σ_m.

§ 2. Реакции типа $\frac{1}{2}+0 \to \frac{1}{2}+0$.

Примеры реакций с $j_a = j_c = \frac{1}{2}$, $j_b = j_d = 0$: $\pi + p \to \pi + p$, $\pi + p \to Y + K$, $p + He \to p + He$.

Для таких реакций ввиду (1.4) и (1.5) имеем

$$<-\tfrac{1}{2}\, 0 | z | -\tfrac{1}{2}\, 0 > = < \tfrac{1}{2}\, 0 | z | \tfrac{1}{2}\, 0 > = z_+$$

$$<-\tfrac{1}{2}\, 0 | z | \tfrac{1}{2} 0 > = < \tfrac{1}{2} 0 | z | -\tfrac{1}{2}\, 0 > = z_-.$$

Для удобства считаем равными произведения внутренних четностей частиц a, b и c, d. Вычисления в другом варианте четностей производятся аналогично и дают тот же результат. Задача сводится к нахождению наименьшего значения функции σ_m всего от двух комплексных переменных

$$\sigma_m = \frac{|z_+|^2}{|\vec{q}_+|^2} + \frac{|z_-|^2}{|\vec{q}_-|^2} \qquad (2.C)$$

при следующих условиях на эти переменные

$$|z_+|^2 + |z_-|^2 = \sigma(\theta) \qquad (2.A)$$

$$i(-z_+ z_-^* + z_- z_+^*) = 2\,\mathrm{Im}\; z_+ z_-^* = \sigma(\theta)\, P(\theta). \qquad (2.B)$$

Если не вводить функцию σ_m, то надо рассматривать задачу с большим числом переменных f^J, $J = 1/2, 3/2 \ldots J_o$.

Можно найти экстремум σ_m при условиях (2.A) и (2.B) с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа. Следует, однако, иметь в виду, что наименьший экстремум σ_m может и не быть наименьшим значением (оно может достигаться на границе). Здесь мы изложим другой способ, который дает именно наименьшее значение σ_m (совпадающее с минимумом, как оказывается) и к тому же проще.

Пусть $z_+ = \rho_+ \exp i\eta_+$ и $z_- = \rho_- \exp i\eta_-$. Далее вместо ρ_+ и ρ_- введем переменные r и a : $\rho_+ = r \sin a$; $\rho_- = r \cos a$. Тогда (2.A) и (2.B) приобретают вид:

$$|z_+|^2 + |z_-|^2 = r^2 = \sigma(\theta) \tag{2.1}$$

$$r^2 \sin 2a \, \sin(\eta_+ - \eta_-) = \sigma(\theta)\, P(\theta). \tag{2.2}$$

После этого σ_m можно записать в виде

$$\sigma_m = 4\pi\, \sigma(\theta) \left(\frac{\sin^2 a}{\Sigma_+} + \frac{\cos^2 a}{\Sigma_-} \right) \tag{2.3}$$

$$\Sigma_+ = 4\pi\, |\vec{q}_+|^2 = \sum_{J=1/2}^{J_o} (2J+1)\,[d^J_{1/2,1/2}(\theta)]^2$$

$$\Sigma_- = 4\pi\, |\vec{q}_-|^2 = \sum_{J=1/2}^{J_o} (2J+1)\,[d^J_{-1/2,1/2}(\theta)]^2.$$

Из (2.1) и (2.2) следует, что $\sin 2a \, \sin(\eta_+ - \eta_-) = P(\theta)$, откуда $|P(\theta)| \le |\sin 2a| \le 1$. Теперь остается найти наименьшее значение (2.3), если $|\sin 2a|$ меняется в этих пределах.

С помощью формул

$$\sin^2 a = \tfrac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-\sin^2 2a}\right), \quad \cos^2 a = \tfrac{1}{2}\left(1 \mp \sqrt{1-\sin^2 2a}\right)$$

(при заданном $\sin 2a$ возможны два значения $\sin^2 a$ и соответственно $\cos^2 a$) выражаем σ_m через $\sin^2 2a$:

$$\sigma_m = 4\pi\, \sigma(\theta) \left\{ \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\Sigma_+} + \frac{1}{\Sigma_-}\right) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin^2 2a}\left(\frac{1}{\Sigma_+} - \frac{1}{\Sigma_-}\right) \right\}.$$

Наименьшее значение σ_m получается при знаке +, если квадратная скобка отрицательная и при знаке −, если она положительна. Далее, выражение

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\Sigma_+} + \frac{1}{\Sigma_-}\right) - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin^2 2a}\, \left| \frac{1}{\Sigma_+} - \frac{1}{\Sigma_-} \right|$$

является наименьшим при наибольшем возможном значении корня, что достигается при наименьшем $\sin^2 2a$, т.е. при $\sin^2 2a = P^2(\theta)$. Итак,

$$\sigma \geq \sigma_m \geq 2\pi\sigma(\theta)\left[\left(\frac{1}{\Sigma_+}+\frac{1}{\Sigma_-}\right)-\sqrt{1-P^2(\theta)}\left|\frac{1}{\Sigma_+}-\frac{1}{\Sigma_-}\right|\right]. \qquad (2.4)$$

Если нет условия (2.2), то наименьшее значение $\sin^2 2a$ равно нулю и получится уже известная формула $\sigma \geq 4\pi\sigma(\theta)/\Sigma_б$, где $\Sigma_б$ – большее из Σ_+ и Σ_-, см. /3/. Нетрудно проверить, что левая часть (2.4) больше $4\pi\sigma(\theta)/\Sigma_б$ при $P \neq 0$ и $\Sigma_+ \neq \Sigma_-$. В частности, при $P(\theta)=1$ и $\Sigma_б \gg \Sigma_м$ получаем для наименьшего значения σ величину $2\pi\sigma(\theta)/\Sigma_м$, что гораздо больше $4\pi\sigma(\theta)/\Sigma_б$. Чтобы значения σ и $\sigma(\theta)$ стали совместимыми теперь (когда известно, что $P(\theta)=1$) потребуется гораздо большее J_o. Таким образом, в этом случае оценка J_o или r_o значительно улучшается. Дополнительная информация о поляризации не улучшает оценку, если эта поляризация равна нулю (или если $\Sigma_+(\theta) \approx \Sigma_-(\theta)$, см. рис. 1 и 2).

Полученная формула может быть использована по-другому: если известно r_o или J_o (следовательно, известны $\Sigma_+(\theta)$ и $\Sigma_-(\theta)$), а также σ и $\sigma(\theta)$ (при этом, конечно, $\sigma/4\pi\sigma(\theta) > 1/\Sigma_б$), то имеем такое ограничение на величину поляризации $P(\theta)$:

$$\tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-P^2(\theta)}\right) < \left(\frac{\sigma}{4\pi\sigma(\theta)}-\frac{1}{\Sigma_б}\right)\frac{\Sigma_+\Sigma_-}{|\Sigma_+-\Sigma_-|}. \qquad (2.5)$$

Конечно, эта оценка для $P(\theta)$ полезна только в тех случаях, когда правая часть (2.5) меньше единицы.

С помощью (2.5) мы можем несколько уточнить известный факт обращения поляризации в нуль при $\theta = 0°$ или $180°$, а именно оценить поведение $P(\theta)$ вблизи этих углов. При малых углах $\Sigma_{-½½} \ll \Sigma_{½½}$ и подстановка формулы (П.6) приложения в (2.5) дает

$$P^2(\theta) < \left[\frac{\sigma}{\pi\sigma(\theta)} - \frac{4}{(L_0+1)(L_0+2)}\right]\frac{(L_0+1)^2(L_0+2)^2}{2}\sin^2\theta/2$$

$$0 < \sin^2\theta/2 \ll \frac{1}{(L_0+1)(L_0+3)}. \qquad (2.6)$$

Величина $L_o = J_o - ½$ зависит от принятого r_o и импульса в системе центра инерции: $\hbar L_o = r_o p$.

§ 3. Реакции типа $½ + ½ \to ½ + ½$

Примеры таких реакций: $n+p \to n+p$, $\Sigma^- + p \to \Sigma^0 + n$, $\tilde{p} + p \to \Lambda + \tilde{\Lambda}$ и т.п.

При сохранении четности в задаче фигурируют 8 переменных z. Нам не удалось решить задачу методом нахождения условного минимума. Способ, изложенный выше, позволяет достичь цели. Аналогично случаю $\frac{1}{2}+0\to\frac{1}{2}+0$ параметризуем переменные следующим образом (вместо проекций спинов $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$ пишем просто − и +):

$$
\begin{aligned}
&\langle --|z|--\rangle \equiv z_{--} = r\sin\alpha\,\sin\beta_1\sin\gamma_1\exp i\eta_{--}\\
&\langle --|z|++\rangle \equiv z_{-+} = r\sin\alpha\,\sin\beta_1\cos\gamma_1\exp i\eta_{-+}\\
&\langle -+|z|-+\rangle \equiv z_{22} = r\sin\alpha\,\cos\beta_1\sin\delta_1\exp i\eta_{22}\\
&\langle -+|z|+-\rangle \equiv z_{21} = r\sin\alpha\,\cos\beta_1\cos\delta_1\exp i\eta_{21}
\end{aligned}
\qquad (3.1)
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle +-|z|--\rangle \equiv z_{1-} = r\cos\alpha\,\sin\beta_2\sin\gamma_2\exp i\eta_{1-}\\
&\langle +-|z|++\rangle \equiv z_{1+} = r\cos\alpha\,\sin\beta_2\cos\gamma_2\exp i\eta_{1+}\\
&\langle ++|z|-+\rangle \equiv z_{+2} = r\cos\alpha\,\cos\beta_2\sin\delta_2\exp i\eta_{+2}\\
&\langle ++|z|+-\rangle \equiv z_{+1} = r\cos\alpha\,\cos\beta_2\cos\delta_2\exp i\eta_{+1}\,.
\end{aligned}
\qquad (3.2)
$$

Суммы $4\pi|\vec{q}_{m_c+m_d,\ m_a+m_b}|^2$ обозначим через Σ_{--}, Σ_{-+}, Σ_{oo} и Σ_{o-} соответственно значениям $(m_c+m_d,\ m_a+m_b)$. В силу (1.5) в задаче встречаются только эти четыре суммы.

Формулы (A), (B) и (C) принимают вид:

$$
\sigma(\theta) = \tfrac{1}{2}\sum_i |z_i|^2 = r^2/2 \qquad (3A)
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma(\theta)\,P(\theta) &= -\mathrm{Im}\,(z_{--}z^*_{1-} + z_{-+}z^*_{1+} + z_{22}z^*_{+2} + z_{21}z^*_{+1}) =\\
&= -\frac{r^2}{2}\sin 2\alpha\,[\sin\beta_1\sin\gamma_1\sin\beta_2\sin\gamma_2\sin(\eta_{--}-\eta_{1-}) +\\
&\quad + \sin\beta_1\cos\gamma_1\sin\beta_2\cos\gamma_2\sin(\eta_{-+}-\eta_{1+}) +\\
&\quad + \cos\beta_1\sin\delta_1\cos\beta_2\sin\delta_2\sin(\eta_{22}-\eta_{+2}) +\\
&\quad + \cos\beta_1\cos\delta_1\cos\beta_2\cos\delta_2\sin(\eta_{21}-\eta_{+1})\,] \equiv -\sigma(\theta)\sin 2\alpha\,[P]\,.
\end{aligned}
\qquad (3.B)
$$

Заметим, что для симметрии этой формулы пришлось обозначить $q^J_{+1,-1} = -\sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}\, d^J_{+1,-1}(\theta)$ в отличие от (1.3)

$$\sigma_m = 4\pi \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{|z_i|^2}{\Sigma_i} = 4\pi \frac{r^2}{2} \left\{ \frac{\cos^2 a}{\Sigma_{0-}} + \sin^2 a \left[\sin^2 \beta_1 \left(\frac{\sin^2\gamma_1}{\Sigma_{--}} + \frac{\cos^2\gamma_1}{\Sigma_{-+}} \right) + \frac{\cos^2\beta_1}{\Sigma_{00}} \right] \right\} \cdot \quad (3.C)$$

Так же как и в § 2 для σ_m можно написать

$$\sigma_m \geqslant 4\pi\sigma(\theta) \left\{ \tfrac{1}{2} \left(\frac{1}{\Sigma_{0-}} + s \right) - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin^2 2a}\, \left| \frac{1}{\Sigma_{0-}} - s \right| \right\}$$

$$s = \frac{\sin^2\beta \sin^2\gamma}{\Sigma_{--}} + \frac{\sin^2\beta \cos^2\gamma}{\Sigma_{-+}} + \frac{\cos^2\beta}{\Sigma_{00}} . \quad (3.3)$$

Покажем, что $|[P]|$ из формулы (3.B) меньше или равно 1. Действительно, $[P]$ сводится к скалярному произведению двух единичных векторов $\vec{a}^{(1)}$ и $\vec{a}^{(2)}$ в восьмимерном пространстве, каждый из которых имеет компоненты:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sin\beta \ \sin\gamma \ \sin\epsilon & a_5 &= \cos\beta \ \sin\delta \ \sin\eta \\
a_2 &= \sin\beta \ \sin\gamma \ \cos\epsilon & a_6 &= \cos\beta \ \sin\delta \ \cos\eta \\
a_3 &= \sin\beta \ \cos\gamma \ \sin\zeta & a_7 &= \cos\beta \ \cos\delta \ \sin\theta \\
a_4 &= \sin\beta \ \cos\gamma \ \cos\zeta & a_8 &= \cos\beta \ \cos\delta \ \cos\theta .
\end{aligned} \quad (3.4)$$

При этом надо принять, что $\eta_{--} - \eta_{1-} = \pi/2 - (\epsilon_1 - \epsilon_2)$ и т.д. Поэтому из (3.B) аналогично предыдущему случаю следует, что $|P(\theta)| \leq |\sin 2a| \leq 1$, а также, что $|P(\theta)| \leq |[P]| \leq 1$. Далее, правая часть (3.3) есть линейная функция s и имеет наименьшее значение, когда s минимальное (как в случае $1/\Sigma_{0-} > s$, так и в обратном случае). Представим s в виде $x^2/\Sigma_{--} + y^2/\Sigma_{-+} + z^2/\Sigma_{00}$, где x, y, z –компоненты единичного вектора: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, а $\Sigma_б$ и Σ_M соответственно большее и меньшее из Σ_{--}, Σ_{-+}, Σ_{00}. После этого видим, что наименьшее значение s равно $1/\Sigma_б$:

$$s = 1/\Sigma_б + y^2(1/\Sigma_o - 1/\Sigma_б) + z^2(1/\Sigma_M - 1/\Sigma_б) .$$

Итак, наименьшее значение σ_m достигается, когда $\sin^2 2a$ и s имеют наименьшие значения. Если все восемь переменных z независимы, то $\sin^2 2a$ и s могут принимать свои наименьшие значения одновременно. Действительно, $s = 1/\Sigma_б$ когда фиксированы значения углов β_1 и γ_1 вектора $\vec{a}^{(1)}$, а именно когда либо $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$, либо $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = \pi/2$ либо $\beta_1 = \pi/2$, γ_1 – любое. А равенство $\sin^2 2a = P^2(\theta)$ имеет место, когда $[P] = (\vec{a}^{(1)}\, \vec{a}^{(2)}) = 1$, т.е. когда $\vec{a}^{(2)} \parallel \vec{a}^{(1)}$. Поскольку углы вектора $\vec{a}^{(2)}$ в s не входят, то всегда можно сделать $\vec{a}^{(2)}$ параллельным выбранному вектору $\vec{a}^{(1)}$.

В результате получаем формулу такого же вида, что и в случае $\frac{1}{2}+0\to\frac{1}{2}+0$:

$$\sigma \geq 2\pi\sigma(\theta)\left[\frac{1}{\Sigma_{0-}}+\frac{1}{\Sigma_{б}}-\sqrt{1-P^2(\theta)}\left|\frac{1}{\Sigma_{0-}}-\frac{1}{\Sigma_{б}}\right|\right], \qquad (3.5)$$

где теперь $\Sigma_б$ обозначает большую из сумм Σ_{--}, Σ_{-+}, Σ_{00}.

Представляется, что изложенным способом можно решить задачу и в случае произвольных спинов. Однако для упругих реакций возникает следующая трудность. Тогда кроме сохранения четности имеет место еще инвариантность относительно обращения времени [4]

$$\langle m_c m_d | R^J | m_a m_b \rangle = \langle m_a m_b | R^J | m_c d_d \rangle \qquad (3.6)$$

или $z_{1-}=z_{-1}=z_{+2}$ и $z_{1+}=z_{+1}$ в случае $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ (пример $n+p\to n+p$). Другими словами, вектор $\vec{a}^{(2)}$ до некоторой степени фиксирован – $\gamma_2=\delta_2$ и $\beta_2=45°$ (см. (3.2)) и не может быть параллелен вектору $\vec{a}^{(1)}$, у которого $\beta_1=0$ или $\pi/2$. Задача нахождения минимума σ_m значительно усложнится.

Еще более она усложняется в случае реакции $p+p\to p+p$, когда к (1.2) и (3.6) добавляются еще соотношения

$$\langle m_c m_d | R^J | m_a m_b \rangle = \langle -m_d, -m_c | R^J | -m_b, -m_a \rangle, \qquad (3.7)$$

вытекающие из тождественности частиц. Это ведет к равенству всех z в (3.2) или к $\beta_2=\gamma_3=\delta_2=45°$. Однако формулой (3.5) можно пользоваться, примиряясь с некоторым ухудшением оценки, поскольку уточнение этой формулы сводится к увеличению наименьшего значения σ_m. Например, если $P(\theta)=1$, то $\sin^2 2a=1$ и $|[P]|=1$. Последнее означает, что $\vec{a}^{(1)}\|\vec{a}^{(2)}$ и должно быть $\beta_1=\gamma_1=45°$. В результате $s=\frac{1}{4}(1/\Sigma_{--}+1/\Sigma_{-+})+\frac{1}{2}\Sigma_{00}$, что конечно больше, чем $1/\Sigma_б=\frac{1}{4}(1/\Sigma_б+1/\Sigma_б)+1/2\Sigma_б$. Вместо оценки $\sigma\geq 2\pi\sigma(\theta)(1/\Sigma_{0-}+1/\Sigma_б)$ даваемой формулой (3.5) для этого случая, получаем

$$\sigma \geq 2\pi\sigma(\theta)\left[1/\Sigma_{0-}+1/2\Sigma_{00}+(1/\Sigma_{--}+1/\Sigma_{-+})/4\right].$$

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Функции $\Sigma_{mn}(\theta)$

В обсуждаемом способе оценки r_0 фундаментальную роль играют суммы

$$\Sigma_{mn}(\theta)=\sum_J^{J_0}(2J+1)\left[d^J_{mn}(\theta)\right]^2. \qquad (П.1)$$

1. Свойства симметрии. Из свойств симметрии функций $d^J_{mn}(\theta)$, приведенных в формулах (A.1) и (A.2) в [4], следуют соответствующие равенства для $\Sigma_{mn}(\theta)$ [2]:

$$\Sigma_{mn}(\theta)=\Sigma_{-m,-n}(\theta)=\Sigma_{n,m}(\theta)=\Sigma_{-n,-m}(\theta) \qquad (П.2)$$

$$\Sigma_{mn}(\theta) = \Sigma_{-m,n}(\pi-\theta)\ , \qquad \Sigma_{mn}(\pi/2) = \Sigma_{-m,n}(\pi/2)\ . \qquad (П.3)$$

2. Выражение через полиномы Якоби. Для вывода надо воспользоваться связью между $d^J_{mn}(\theta)$ и полиномами Якоби $P^{m-n,\,m+n}_{j-m}(\cos\theta)$ (см. /9/ формула (3.8)) и формулой Кристоффеля-Дарбу (см. /10/ § 3.2 и формулу (4.5.2)). В последней формуле надо сделать предельный переход $x \to y$; далее можно воспользоваться формулами (4.5.7)/10/, чтобы в конечной формуле фигурировали только многочлены Якоби, но не их производные. Здесь мы не будем приводить полученных громоздких общих формул, а приведем только формулу для $\Sigma_{-½,½}(\theta)$:

$$\Sigma_{-½,½}(\theta) = \frac{4\sin^2\theta/2}{\sin^2\theta}\,\frac{(L+1)^2(L+2)^2}{(2L+3)^2}\ \{[P^{(1,0)}_L]^2 + [P^{(1,0)}_{L+1}]^2 -$$

$$-[\,2\cos\theta + \frac{\cos^2\theta/2}{(L+1)(L+2)}\,]\ P^{(1,0)}_L P^{(1,0)}_{L+1}\} = \Sigma_{½½}\ (\pi-\theta)\ . \qquad (П.4)$$

Здесь $L = J_0 - ½$. Полиномы Якоби $P^{(1,0)}_L$ могут быть выражены через полиномы Лагранжа:

$$d^J_{-½,½}(\theta) = \sin\ \theta/2\ P^{(1,0)}_L\ (\cos\theta) = \qquad (П.5)$$

$$= -\sin\ \theta/2\ [P_{L+1}(\cos\theta) - P_L\ (\cos\theta)]/\,1-\cos\theta,\ L=J-½\ .$$

3. Поведение $\Sigma_{-½,½}$ и $\Sigma_{½,½}$ под малыми углами. С помощью формул из 4.21/10/ или формулы (4.5.8), там же, можем получить

$$\Sigma_{-½,½}(\theta) = \sin^2\theta/2\ \frac{(L+1)^2(L+2)^2}{2}, \qquad 0 \le \sin^2\theta/2 \ll \frac{1}{(L+1)(L+3)}; \qquad (П.6)$$

$$\Sigma_{½,½}(\theta) = (L+1)(L+2)\,[\,1 - \sin^2\theta/2\ (L^2 + 3L\ + 1)\,]\ .$$

4. Вычисление Σ_{mn} (θ). Кроме непосредственного вычисления по формуле (П.1) или с помощью формулы Кристоффеля-Дарбу, для приближенного вычисления можно использовать разные асимптотические представления полиномов Якоби, см. /10/, гл. 8. Например, для вычисления (П.4) можно воспользоваться формулой (8.21.17) из /10/:

$$\sin\theta/2\ \ P^{(1,0)}_L = \sqrt{\frac{\theta}{\sin\ \theta}}\ \ J_1\ \ [(L+1)\theta]\,. \qquad (П.7)$$

J_1 - функция Бесселя, область применимости $0 \le \theta < \pi$ (уточнения см. /10/).

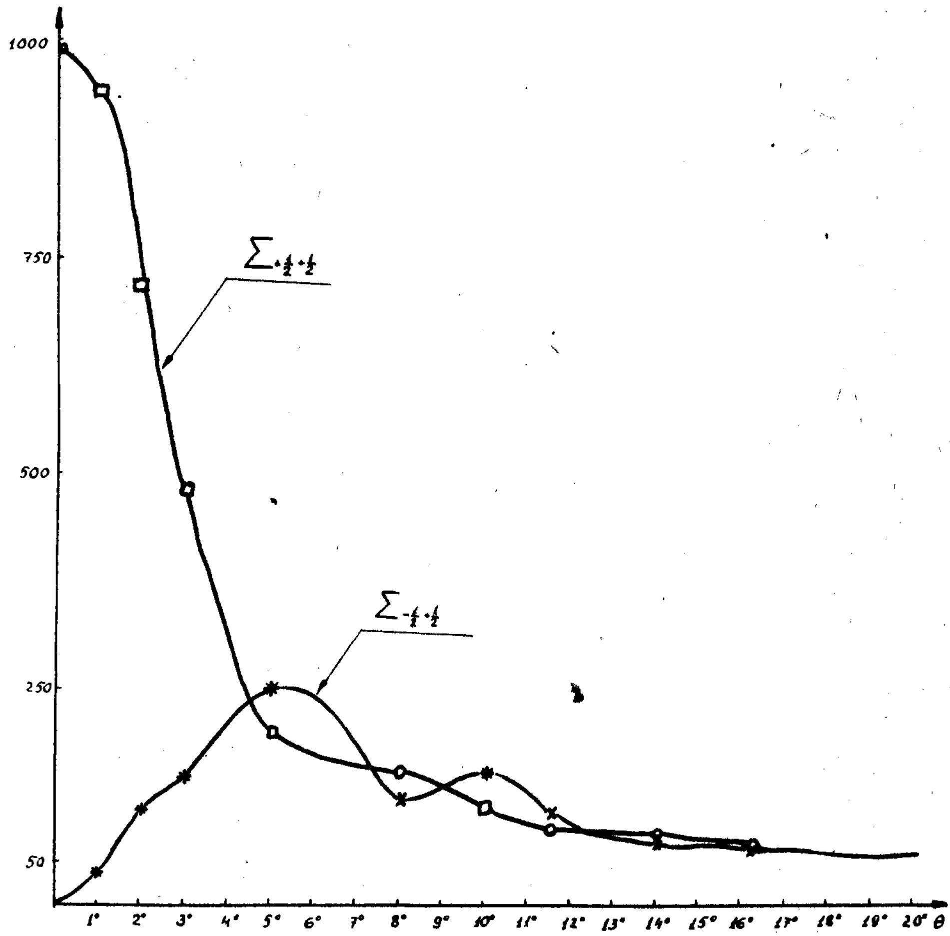
На рисунках 1 и 2 изображены функции $\Sigma_{-½,½}(30½,\ \theta)$ и $\Sigma_{½,½}(30½,\ \theta)$. На рис. 2 графики построены по значениям, вычисленным счетной машиной по формуле

(П.1). Значками * нанесены значения $\Sigma_{-1/2,1/2}$, вычисленные с помощью формул (П.4) и (П.7). На рис. 1 значения $\Sigma_{-1/2,1/2}$, полученные по формуле (П.1), изображены значками x; значками O и □ изображены значения $\Sigma_{1/2,1/2}$, полученные соответственно по формуле (П.1) и с помощью формул, аналогичных формулам (П.4) и (П.7).

Литература

1. W.Rarita and P.Schwed. Phys. Rev., 112, 271 (1958).
2. В.Г.Гришин и В.И.Огиевецкий. ЖЭТФ. 38, 1008 (1960); Nucl. Phys. 18, 516 (1960).
3. М.И.Широков. ЖЭТФ, 42, 173, 1962. Препринт ОИЯИ Е-859, Дубна. (1962)
4. M.Jacob and G.C.Wick. Ann. of Phys., 7, 404 (1959).
5. Л.Г.Заставенко. ЖЭТФ, 35, 785 (1958).
6. Чжоу Гуан-чжао. ЖЭТФ, 36, 909 (1959).
7. М.И.Широков. ЖЭТФ, 39, 633 (1960).
8. М.И.Широков. ЖЭТФ, 36, 1524 (1959).
9. А. Эдмондс. Угловые моменты в квантовой механике. Сб. "Деформация атомных ядер", Москва, ИЛ, 1958.
10. Г.Сегё. Ортогональные многочлены. ГИФМЛ, Москва, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 мая 1964 года.



1000
750
500
250
50
$\sum_{+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$
$\sum_{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$
1° 2° 3° 4° 5° 6° 7° 8° 9° 10° 11° 12° 13° 14° 15° 16° 17° 18° 19° 20° θ

Рис. 1.

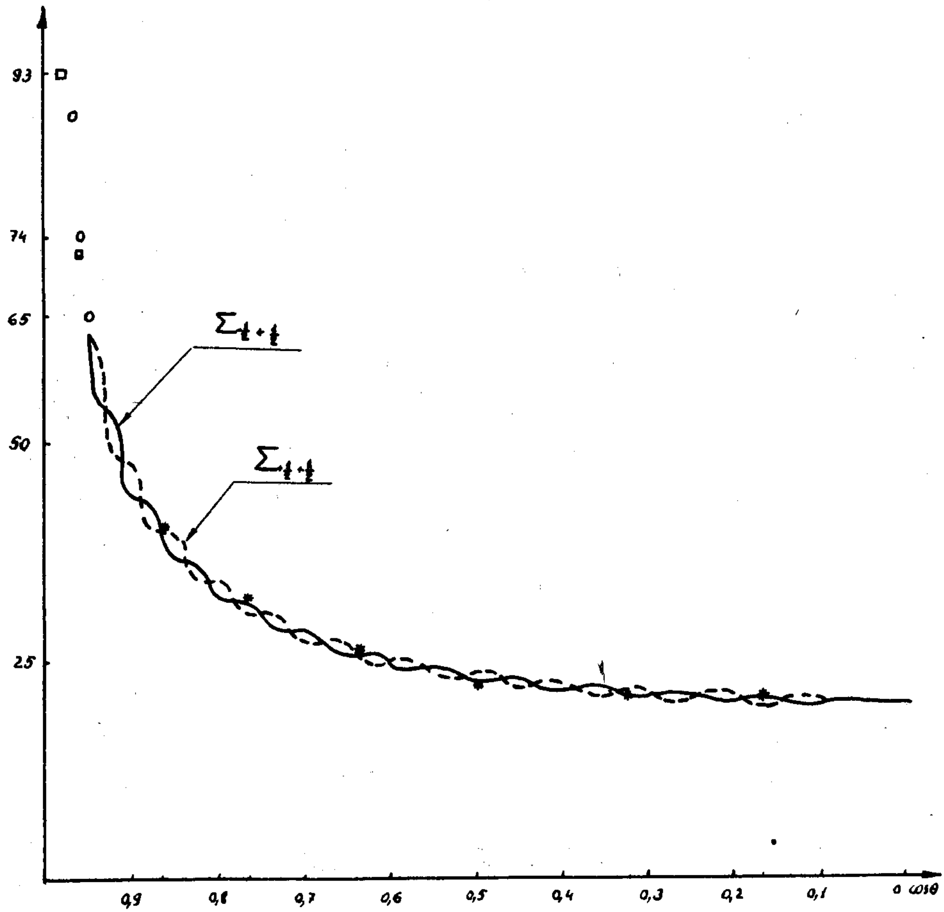


Рис. 2.