

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

С323.3

В-23

1/VI - 64

P - 1662



И.Ш. Вашакидзе, Р.М. Мурадян, А.Н. Тавхелидзе,  
Г.А. Чилашвили, В.П. Шелест

ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ  
АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ  
В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ  
I

ДАН ССР, 1964, т. 158, кн. 6,  
стр. 1302-1305

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

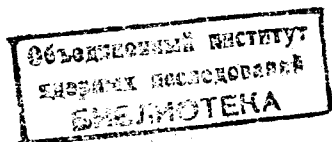
1964

И.Ш. Вашакидзе, Р.М. Мурадян, А.Н. Тавхелидзе,  
Г.А. Чилашвили, В.П. Шелест

P - 1662

ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ  
АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ  
В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

I



Дубна 1964

2455/2 48

## §1. Введение

Исследование аналитических свойств релятивистских амплитуд рассеяния указывает на то, что амплитуды рассеяния в комплексной плоскости углового момента могут, кроме полюсов, обладать другими особенностями, в частности, движущимися точками ветвления<sup>/1,1a/</sup>, которые могут оказать решающее влияние на асимптотическое поведение при высоких энергиях. Основной причиной такого поведения является влияние многочастичных промежуточных состояний в релятивистской теории. Поэтому значительный интерес представляет изучение нерелятивистских задач с многочастичными промежуточными состояниями, когда имеются точные уравнения для амплитуды рассеяния, в частности, квантово-механической задачи трех тел.

Попытка изучения аналитических свойств амплитуды рассеяния для задачи трех тел в плоскости комплексного углового момента была предпринята в работе Ньютона<sup>/2/</sup>, где он приходит к заключению о существовании бесконечного множества движущихся разрезов в плоскости комплексного углового момента<sup>x/</sup>. Однако этот результат может быть не вполне корректным вследствие неоднозначности продолжения момента количества движения в комплексную плоскость<sup>/2,3/</sup> и неоднозначности, имеющейся в уравнении Липпмана-Швингера для проблемы трех тел.

Чтобы избежать этих трудностей, Омнес<sup>/3/</sup> исходит из уравнений Фаддеева,<sup>/4/</sup> записанных для парциальных волн, вводя лишь полный момент всей системы. Позитивное заключение этой работы состоит в том, что амплитуда рассеяния на связанном состоянии является мероморфной в плоскости комплексного углового момента, если является мероморфным решением расширенных уравнений Фаддеева<sup>/3/</sup>, что само по себе представляет довольно трудную математическую проблему. Следовательно, вопрос о мероморфности амплитуды рассеяния остается открытым.

Целью настоящей работы является изучение аналитических свойств амплитуды рассеяния для задачи трех тел, когда происходит рассеяние свободной частицы на связанном состоянии двух других частиц.

В §2 приводятся уравнения Фаддеева, записанные в импульсном представлении для задачи рассеяния на связанном состоянии двух частиц, одна из которых имеет бесконечную массу.

В §3 произведено разложение уравнений Фаддеева для этой задачи по парциальным волнам.

---

x/ См. также<sup>/2a/</sup>.

В §4 развита теория возмущений для уравнений Фаддеева, и разработана соответствующая диаграммная техника. Изучены аналитические свойства простейших диаграмм в плоскости комплексного углового момента. Обсуждается такой класс диаграмм, когда разрезы, имеющиеся в каждом члене ряда, исчезают при суммировании.

## §2. Уравнения Фаддеева

Рассмотрим задачу рассеяния частицы с массой  $m_1$  на связанном состоянии частиц с массами  $m_2$  и  $m_3$ . Будем считать третью частицу бесконечно тяжелой, т.е. примем ее за неподвижный силовой центр. Пусть взаимодействие между частицами осуществляется двухчастичными потенциалами, так что гамильтониан системы имеет вид

$$H = K_1 + K_2 + V_{13}(\vec{r}_1) + V_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + V_{23}(\vec{r}_2), \quad /2.1/$$

где  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  - радиус-вектора соответствующих частиц относительно силового центра, а  $K_1$  и  $K_2$  - их кинетические энергии<sup>х/</sup>:

$$K_i = -\nabla_i^2, \quad (i = 1, 2). \quad /2.2/$$

Матричный элемент, определяющий вероятность перехода из начального состояния в конечное, записывается в виде

$$R_{if} = (\Phi^f, [V_{13} + V_{12}] \Psi^i). \quad /2.3/$$

Здесь  $\Phi^f$  - волновая функция конечного состояния, имеющая вид

$$\Phi^f = (2\pi)^{-3/2} e^{ik'_0 \vec{r}_1} \phi_{n_0}(\vec{r}_2), \quad /2.4/$$

$k'_0$  - импульс падающей частицы после рассеяния, а  $\phi_{n_0}(\vec{r}_2)$  - волновая функция связанного состояния второй частицы, являющаяся решением уравнения Шредингера

$$[K_2 + V_{23}(\vec{r}_2)] \phi_n(\vec{r}_2) = -\epsilon_n \phi_n(\vec{r}_2), \quad /2.5/$$

где  $\epsilon_n$  - энергия связи.

Волновая функция  $\Psi^i$  естественным образом разлагается на сумму трех слагаемых:

$$\Psi^i = \Psi^{(1)i} + \Psi^{(2)i} + \Psi^{(3)i},$$

<sup>х/</sup> Мы будем считать  $\hbar = 2m_1 = 2m_2 = 1$ .

являющихся решением известных интегральных уравнений Фаддеева

$$\begin{pmatrix} \Psi^{(1)l} \\ \Psi^{(2)l} \\ \Psi^{(3)l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - G_0(z) \begin{pmatrix} 0 & T_{23}(z) & T_{23}(z) \\ T_{13}(z) & 0 & T_{13}(z) \\ T_{12}(z) & T_{12}(z) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^{(1)l} \\ \Psi^{(2)l} \\ \Psi^{(3)l} \end{pmatrix}, \quad /2.7/$$

где  $\Phi^l$  - волновая функция, характеризующая начальное состояние системы

$$\Phi^l = (2\pi)^{-3/2} e^{ik_0^+ r_1} \phi_{n_0}(r_2), \quad /2.8/$$

$k_0^+$  - импульс падающей частицы до рассеяния.  $G_0(z)$  является свободной функцией Грина

$$G_0(z) = (H_0 - z)^{-1}, \quad /2.9/$$

$H_0$  - полная кинетическая энергия

$$H_0 = \sum_{l=1}^2 K_l, \quad /2.10/$$

а

$$z = E_n + i\eta, \quad \eta \rightarrow 0, \quad /2.11/$$

где  $E_n$  - полная энергия.

Матрицы  $T_{lk}(z)$  определяются уравнениями

$$T_{lk}(z) = V_{lk} - V_{lk} G_0(z) T_{lk}(z) \quad /2.12/$$

и являются матрицами рассеяния для задачи двух тел.

При вычислении матричного элемента /2.3/ необходимо проводить усреднение по функциям связанного состояния, которые считаются известными. Поэтому в дальнейшем будет удобным исходить из несколько видоизмененной системы уравнений Фаддеева. Именно, вместо свободной функции Грина  $G_0(z)$  мы введем функцию Грина  $G_{23}(z)$ , определяя ее следующим образом:

$$G_{23}(z) = (H_0 + V_{23}(r_2) - z)^{-1}. \quad /2.13/$$

С использованием /2.13/ уравнения Фаддеева можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Psi^{(2)l} &= -\Phi_l - G_{23}(z) \overset{\sim}{T}_{13}(z) \Psi^{(3)l}, \\ \Psi^{(3)l} &= -\Phi_l - G_{23}(z) \overset{\sim}{T}_{12}(z) \Psi^{(2)l}, \\ \Psi^{(1)l} &= \Phi_l. \end{aligned} \quad /2.14/$$

где  $\bar{T}_{13}(z)$  и  $\bar{T}_{23}(z)$  определяются из уравнений

$$\bar{T}_{13}(z) = V_{13} - V_{13} G_{23}(z) \bar{T}_{13}(z), \quad /2.15/$$

$$\bar{T}_{12}(z) = V_{12} - V_{12} G_{23}(z) \bar{T}_{12}(z).$$

На основе уравнения /2.14/ из матричного элемента /2.8/ можно исключить потенциалы, в результате чего для амплитуды рассеяния получим

$$R_{ii} = (\Phi^i, \bar{T}_{13} \Psi^{(3)i} + \bar{T}_{12} \Psi^{(2)i}). \quad /2.16/$$

Функции Грина  $G_{23}(z)$  диагональны в представлении базисных функций, являющихся собственными функциями уравнений Шредингера с гамильтонианом /2.1/, в котором потенциал  $V_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0$ . В этом базисе решения уравнений Фаддеева  $\Psi^{(2)}$  и  $\Psi^{(3)}$  запишутся в виде

$$\chi^{(j)}(n, \vec{p}_1) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \Psi^{(j)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) e^{-i\vec{p}_1 \vec{r}_1} \phi_n^*(\vec{r}_2) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \quad /2.17/$$

( $j = 2, 3$ ).

Учитывая /2.17/ и диагональность функции Грина  $G_{23}(z)$  в выбранном представлении, уравнения /2.14/ можно переписать в следующей форме:

$$\chi^{(2)}(n, \vec{p}_1) = -\delta(\vec{p}_1 - \vec{k}_0) \delta_{nn_0} - \frac{1}{\mathbb{D}(p_1, \epsilon_n, z)} \int d\vec{p}'_1 (\vec{p}_1 | t_{13}(z - \epsilon_n) / \vec{p}'_1) \times \chi^{(3)}(n, \vec{p}'_1), \quad /2.18/$$

$$\chi^{(3)}(n, \vec{p}_1) = -\delta(\vec{p}_1 - \vec{k}_0) \delta_{nn_0} - \frac{1}{\mathbb{D}(p_1, \epsilon_n, z)} (\int + \sum_n) \int d\vec{p}'_1 (n, \vec{p}'_1 | \bar{T}_{12}(z) | n', \vec{p}'_1) \chi^{(2)}(n', \vec{p}'_1).$$

Здесь символ  $(\int + \sum)$  означает интегрирование по непрерывному спектру и суммирование по дискретному, а  $\mathbb{D}(p_1, \epsilon_n, z)$  записывается в виде

$$\mathbb{D}(p_1, \epsilon_n, z) = p_1^2 + \epsilon_n - z. \quad /2.19/$$

Матрицы  $t_{13}(\zeta)$  и  $\bar{T}_{12}$  удовлетворяют уравнениям

$$(\vec{p}_1 | t_{13}(\zeta) | \vec{p}'_1) = (\vec{p}_1 | V_{13} | \vec{p}'_1) - \int \frac{(\vec{p}_1 | V_{13} | \vec{q})(\vec{q} | t_{13}(\zeta) | \vec{p}'_1) d\vec{q}}{q^2 - \zeta}, \quad /2.20/$$

$$(n, \vec{p}_1 | \bar{T}_{12} | n', \vec{p}'_1) = (n, \vec{p}_1 | V_{12} | n', \vec{p}'_1) - (\sum_{n''} + \int) \int \frac{(n, \vec{p}_1 | V_{12} | n'', \vec{p}''_1) \chi(n'', \vec{p}''_1 | \bar{T}_{12} | n', \vec{p}'_1) d\vec{p}''_1}{p_1''^2 - \epsilon_n - z}, \quad /2.21/$$

где для матричного элемента введено обозначение

$$(n\vec{p} | \hat{L} | n'\vec{p}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\vec{p}'\vec{r}_1} \phi_n(\vec{r}_2) \hat{L} e^{i\vec{p}\vec{r}_1} \phi_{n'}(\vec{r}_2) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 / 2.22/$$

Заметим, что  $t_{12}$  является двухчастичной амплитудой рассеяния вне энергетической поверхности, в то время как  $T_{12}$  не имеет такого ясного физического смысла, что приводит к специфическим для задачи трех тел трудностям.

### 83. Разложение уравнений Фаддеева по парциальным волнам

Для изучения аналитических свойств амплитуды рассеяния в плоскости комплексного углового момента разложим уравнения /2.18/ по парциальным волнам. Такое разложение удобнее всего провести с помощью  $\mathbb{F}^J$ -функций Вигнера. Один из способов разложения с помощью функций Вигнера был реализован в работе Омьеса. Другой способ, более пригодный для рассмотрения рассеяния на связанном состоянии, основан на использовании координат Якоби.

В данной же работе с целью обсуждения результатов работ /2/ мы используем разложение, предложенное Ньютоном.

Пусть  $\ell_2$  - угловой момент связанного состояния второй частицы относительно центра, а  $\ell_1$  - угловой момент первой частицы относительно того же центра. Полный момент  $J$  определяется как

$$\vec{J} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2. \quad /3.1/$$

Введем полную систему функций /2/

$$X_{\ell_1 \ell_2 \ell_1' \ell_2'}^{JM m_1 m_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{k}_0) = Y_{\ell_1 \ell_2}^{JM}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) Y_{\ell_1' \ell_2'}^{JM m_1' m_2'}(\vec{k}_0), \quad /3.2/$$

где

$$Y_{\ell_1 \ell_2}^{JM}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{m_1 m_2} (\ell_1 \ell_2 m_1 m_2 | JM) Y_{\ell_1 m_1}(\vec{r}_1) Y_{\ell_2 m_2}(\vec{r}_2), \quad /3.3/$$

$$Y_{\ell_1' \ell_2'}^{JM m_1' m_2'}(\vec{k}_0) = \sum_{m_1' m_2'} (\ell_1' \ell_2' m_1' m_2' | JM) i^{-\ell_1'} Y_{\ell_1' m_1'}(\vec{k}_0). \quad /3.4/$$

Здесь  $(\ell_1 \ell_2 m_1 m_2 | JM)$  - коэффициент Клебша-Гордана.

Функции /3.2/ нормированы следующим образом:

$$(X_{\ell_1 \ell_2 \ell_1' \ell_2'}^{JM m_1 m_2} \cdot X_{\nu_1 \nu_2 \nu_1' \nu_2'}^{J' M' m_1' m_2'}) = \frac{2J+1}{2\ell_2'+1} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{\ell_1 \ell_1'} \delta_{\ell_2 \ell_2'} \delta_{\nu_1 \nu_1'} \delta_{\nu_2 \nu_2'} \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}. \quad /3.5/$$

Разложим волновую функцию по функциям /3.2/. Получим

$$\Psi^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{k}_0) = \sum_{JM} \sum_{\ell_1 \ell_2 \ell'_1 \ell'_2} \Psi_{\ell_1 \ell_2 \ell'_1 \ell'_2}^{(1)J}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{k}_0) X_{\ell_1 \ell_2 \ell'_1 \ell'_2}^{JMm_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{k}_0), \quad /3.6/$$

где  $\Psi^{(1)J}$  - радиальная функция, зависящая только от модулей  $r_1, r_2, k_0$ .

Разлагая функцию  $\Psi^{(1)J}$  по полной системе радиальных функций

$$R_{\ell_1 \ell_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, p_1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} j_{\ell_1}(p_1 r_1) \phi_{n \ell_2}(r_2), \quad /3.7/$$

где  $j_{\ell_1}(p_1 r_1)$  - сферические функции Бесселя, нормированные условием

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} j_{\ell_1}(ar) j_{\ell_1}(br) r^2 dr = \frac{\delta(a-b)}{ab}, \quad /3.8/$$

получим

$$\Psi_{\ell_1 \ell_2 \ell'_1 \ell'_2}^{(1)J}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{k}_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sum_n + f) \int X_{\ell_1 \ell_2 \ell'_1 \ell'_2}^{(1)J}(np'_1 k_0) j_{\ell_1}(p'_1 r_1) \phi_{n \ell_2}(r_2) p_1'^2 \Phi_1^{3.9/},$$

где  $\Phi_1^{3.10/}$

$$X_{\ell_1 \ell_2 \ell'_1 \ell'_2}^{(1)J}(np'_1 k_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int j_{\ell_1}(p'_1 r_1) \phi_{n \ell_2}(r_2) \Psi_{\ell_1 \ell_2 \ell'_1 \ell'_2}^{(1)J}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, k_0) r_1^2 r_2^2 dr_1 dr_2.$$

Подставляя /3.9/ в /3.6/, имеем

$$\Psi^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{k}_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sum_n + f) \sum_{JM} \int X_{\ell_1 \ell_2 \ell'_1 \ell'_2}^{(1)J}(np'_1 k_0) \times \quad /3.11/ \\ \times j_{\ell_1}(p'_1 r_1) \phi_{n \ell_2}(r_2) p_1'^2 \Phi_1^{JMm_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{k}_0).$$

Для радиальной части  $\Phi$  - функции /2.8/ получаем

$$\Omega_{\ell_1 \ell_2 \ell'_1 \ell'_2}^J(np_1; k_0, p_0) = \frac{\delta(p_1 - k_0)}{k_0^2} \delta_{n_0} \delta_{\ell_2 \ell_2'} \delta_{\ell_1 \ell_1'} \delta_{\ell_2 \ell_2'}, \quad /3.12/$$

где  $\ell_2^0$  - момент количества движения связанной системы в начальном состоянии, а  $p_0$  - квантовое число энергии. Здесь мы опустим несущественный в дальнейшем численный коэффициент.

Имея разложения /3.11/ и /3.12/, мы можем написать уравнения Фаддеева для парциальных волн:

$$X_{\ell_1 \ell_2 \ell'_1 \ell'_2}^{(2)}(np_1; p_0, k_0) = - \frac{\delta(p_1 - k_0)}{k_0^2} \delta_{n_0} \delta_{\ell_2 \ell_2'} \delta_{\ell_1 \ell_1'} \delta_{\ell_2 \ell_2'} -$$



$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{\mathfrak{D}(p'_1 E_{n_1 l_1} z)} \int_0^{\infty} p_1'^2 dp_1' (p_1 | t_{13}^{l_1} (z - E_{n_1 l_2}) | p_1') \chi_{l_1 l_2 l_1' l_2'}^{(3)} (np_1'; n_0 k_0); \\
 & \chi_{l_1 l_2 l_1' l_2'}^{(3)} (np_1'; n_0 k_0) = - \frac{\delta(p_1 - k_0)}{k_0^2} \delta_{n n_0} \delta_{l_2 l_2'} \delta_{l_1 l_1'} \delta_{l_2 l_2'}^{-}
 \end{aligned} \quad /3.13/$$

$$\frac{1}{\mathfrak{D}(p_1' E_{n_1 l_2} z)} \sum_{\nu_1 \nu_2} (\sum_n + f) \int_0^{\infty} p_1'^2 dp_1' (np_1 | W_{l_1 l_2 \nu_1 \nu_2}^{JM} | n' p_1') \chi_{\nu_1 \nu_2 l_1 l_2}^{(2)} (n' p_1'),$$

где

$$(p_1 | t_{13}^{l_1}(\zeta) | p_1') = \int_0^{\infty} j_{l_1}(p_1 r_1) t_{13} j_{l_1}(p_1' r_1) r_1^2 dr_1, \quad /3.14/$$

$$W_{l_1 l_2 \nu_1 \nu_2}^{JM}(r_1 r_2) = \int Y_{l_1 l_2}^{JM}(\vec{r}_1 \vec{r}_2) T_{12} Y_{\nu_1 \nu_2}^{JM}(\vec{r}_1 \vec{r}_2) d\Omega_1 d\Omega_2, \quad /3.15/$$

$$\begin{aligned}
 (np_1 | W_{l_1 l_2 \nu_1 \nu_2}^{JM} | n' p_1') & = \int j_{l_1}(p_1 r_1) \phi_{n l_2}(r_2) W_{l_1 l_2 \nu_1 \nu_2}^{JM}(r_1 r_2) j_{\nu_1}(p_1' r_1) \times \\
 & \times \phi_{n' \nu_2}(r_2) r_1^2 r_2^2 dr_1 dr_2.
 \end{aligned} \quad /3.16/$$

Произведем аналогичное разложение в матричном элементе. Применяя формулу /2.16/ и разложение функций  $\Phi^I$ ,  $\Psi^{(2)}$  и  $\Psi^{(3)}$  по парциальным волнам, легко получить

$$\begin{aligned}
 (\Phi^I, T_{13} \Psi^{(3)}) & = \sum_{JM} \sum_{l_1' l_2'} \int p_1'^2 \Phi_1(k_0' | t_{13}^{l_1} (z - E_{n_1 l_2}) | p_1') \times \\
 & \times \chi_{l_1 l_2 l_1' l_2'}^{(3)} (n_0' p_1' n_0 k_0) \mathfrak{Y}_{l_1 l_2}^{JM}(k_0') \mathfrak{Y}_{l_1 l_2}^{JM}(k_0),
 \end{aligned} \quad /3.17/$$

$$\begin{aligned}
 (\Phi^I, T_{12} \Psi^{(2)}) & = \sum_{JM} \sum_{l_1 l_2 l_1' l_2' \nu_1} (\sum_n + f) \int p_1'^2 dp_1' \times \\
 & \times (k_0' n_0 | W_{l_1 l_2 l_1' l_2'}^{JM} | p_1 n_1) \chi_{l_1 l_2 l_1' l_2'}^{(2)} (n_1 p_1 n_0 k_0) \mathfrak{Y}_{\nu_1 l_2}^{JM}(k_0') \mathfrak{Y}_{l_1 l_2}^{JM}(k_0),
 \end{aligned}$$

где  $l_2^{o'}$  - момент количества движения связанной системы после рассеяния.

Выбирая направление импульса падающей частицы за ось  $z$ , получим для амплитуды рассеяния

$$R_n = \sum_{JM} \sum_{\ell_1' \ell_2'} \sum_{\ell_1} \sqrt{\frac{2\ell_1'+1}{4\pi}} (\ell_1' \ell_2' 0 M | JM) Y_{\ell_1' \ell_2'}^{JM} (k_0') \times$$

/3.18/

$$\times [\int p^2 dp (k_0' | t_{13}(z - E_n \ell_2) | p) \chi_{\ell_1' \ell_2' \ell_1' \ell_2'}^{(3)J} (n_0' p n_0 k_0) +$$

$$+ \sum_{\ell_1' \ell_2'} (\sum_n + f) \int p^2 dp (k_0' n_0' | W_{\ell_1' \ell_2' \ell_1' \ell_2'}^{JM} | p n) \chi_{\ell_1' \ell_2' \ell_1' \ell_2'}^{(2)J} (p n p n_0 k_0)].$$

Для решения уравнений /3.18/ удобно переписать их следующим образом:

$$\chi_{\ell_1' \ell_2' \ell_1' \ell_2'}^{(1)J} (p n; k_0 n_0) = f_{\ell_1' \ell_2'; \ell_1' \ell_2'}^{(1)J} (p n; k_0 n_0) + \frac{1}{\mathfrak{D}(p, E_{n \ell_2}, z)} \times \quad /3.19/$$

$$\times \sum_{\nu_1 \nu_2} (\sum_n + f) \int_0^\infty p''^2 dp'' K_{\ell_1' \ell_2' \nu_1 \nu_2} (p n p'' n'; n_0 k_0) \chi_{\nu_1 \nu_2 \ell_1' \ell_2'}^{(1)J} (p'' n'; k_0 n_0)$$

где

$$f_{\ell_1' \ell_2'; \ell_1' \ell_2'}^{(1)J} (p n; k_0 n_0) = \left\{ -\frac{\delta(p - k_0)}{k_0^2} + \frac{(p | t_{13}(z - E_{n \ell_2}) | k_0)}{\mathfrak{D}(p, E_{n \ell_2}, z)} \right\} \delta_{n n_0} \delta_{\ell_1' \ell_1'} \delta_{\ell_2' \ell_2'} \delta_{\ell_2' \ell_2'}^0 \quad /3.20/$$

$$f_{\ell_1' \ell_2'; \ell_1' \ell_2'}^{(2)J} (p n; k_0 n_0) = -\frac{\delta(p - k_0)}{k_0^2} \delta_{n n_0} \delta_{\ell_1' \ell_1'} \delta_{\ell_2' \ell_2'} \delta_{\ell_2' \ell_2'}^0 + \quad /3.21/$$

$$+ \frac{(p n | W_{\ell_1' \ell_2'; \ell_1' \ell_2'}^{JM} | k_0 n_0)}{\mathfrak{D}(p, E_{n \ell_2}, z)} \delta_{\ell_2' \ell_2'}^0,$$

$$K_{\ell_1' \ell_2' \nu_1 \nu_2}^{(2)J} (p n p'' n'; n_0 k_0) = \int_0^\infty p'^2 dp' \frac{1}{\mathfrak{D}(p', E_{n \ell_2}, z)} (p | t_{13}(z - E_{n \ell_2}) | p') \times \quad /3.22/$$

$$\times (p' n | W_{\ell_1' \ell_2' \nu_1 \nu_2} | p'' n')$$

$$\chi_{\ell_1' \ell_2' \nu_1 \nu_2}^{(3)J} (p n p'' n'; n_0 k_0) = \int p'^2 dp' \frac{1}{\mathfrak{D}(p', E_{n \ell_2}, z)} (p n | W_{\ell_1' \ell_2' \nu_1 \nu_2}^{JM} | p' n') (p' | t_{13}(z - E_{n \ell_2}) | p'') \quad /3.23/$$

Для потенциала юкавского типа

$$V_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = g \frac{-\mu |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad /3.24/$$

величина  $(p' n | W_{\ell_1' \ell_2' \nu_1 \nu_2}^{JM} | p'' n')$ , входящая в ядра  $K^{(2)}$  и  $K^{(3)}$ , имеет вид

$$(p n | W_{\ell_1' \ell_2' \ell_1' \ell_2'}^{JM} | p' n') = \sum_k (2k + 1) F_k(\ell_1' \ell_2' \ell_1' \ell_2'; J) W_{\ell_1' \ell_2' \ell_1' \ell_2'}^{(k)} (p n; p' n'), \quad /3.25/$$

где

$$F_k(\ell_1 \ell_2 \ell'_1 \ell'_2 J) = (-1)^{J+k} \sqrt{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell'_1+1)(2\ell'_2+1)} \times \quad /3.26/$$

$$\times W(\ell_1 \ell'_1 \ell_2 \ell'_2; kJ) \begin{pmatrix} k & \ell_1 & \ell'_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & \ell_2 & \ell'_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а

$$W_{\ell_1 \ell_2 \ell'_1 \ell'_2}^{(k)}(pn; p'n') = \int_0^\infty r_1^2 dr_1 \int_0^\infty r_2^2 dr_2 \frac{I_{k+\frac{1}{2}}(\mu r_1) K_{k+\frac{1}{2}}(\mu r_2)}{\sqrt{r_1 r_2}} \times \quad /3.27/$$

$$\times j_{\ell_1}(pr_1) j_{\ell'_1}(p'r_1) \phi_{\ell_2}^*(r_2) \phi_{\ell'_2}(r_2).$$

Здесь  $W(\ell_1 \ell'_1 \ell_2 \ell'_2; kJ)$  - коэффициенты Рака, скобки  $\begin{pmatrix} k & \ell & m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  - символы Вигнера,  $I_{k+\frac{1}{2}}$  и  $K_{k+\frac{1}{2}}$  - функции Бесселя от мнимого аргумента, а  $(r_1, r_2) = (\max, \min)_{r_1, r_2}$ .

Уравнения /3.19/ являются линейными интегральными уравнениями Фредгольмовского типа.

Чтобы изучить аналитические свойства решений уравнений /3.19/ в комплексной  $J$  - плоскости, в первую очередь необходимо найти корректное аналитическое продолжение ядер интегрального уравнения. Формальное же решение этих уравнений может привести к сомнительным результатам, аналогичным приведенным в работе /2/.

В самом деле, формальное решение уравнения /3.19/ может быть представлено в виде

$$\chi_{\ell_1 \ell_2 \ell'_1 \ell'_2}^{(1)J}(pn; k_0 n_0) = \frac{N_{\ell_1 \ell_2 \ell'_1 \ell'_2}^{(1)J}(pn; k_0 n_0)}{D^{(1)J}(z)}, \quad /3.28/$$

где  $N$  и  $D$  - первый и второй детерминанты Фредгольма. Выражения для них легко могут быть выписаны, однако мы ограничимся первым порядком в разложении  $D$

$$D^{(1)J}(z) = 1 - \sum_{\ell_1 \ell_2} (\sum_n + f) \int_0^\infty p^2 dp \frac{K_{\ell_1 \ell_2 \ell'_1 \ell'_2}(\rho n, \rho n; k_0 n_0)}{D(\rho, E_{n \ell_2}^{\lambda} z)} + \dots \quad /3.29/$$

Мы хотим исследовать свойства  $\chi^{(1)J}$  как функции комплексного углового момента  $J$ . Следуя Ньютону, положим  $J = \ell_2 + r$ , где  $r$  меняется от  $-\ell_2$  до  $\ell_2$ . Тогда, учитывая, что

$$\sum_{\ell_1 \ell_2} = \sum_{\ell_2=0}^{\infty} \sum_{r=-\ell_2}^{\ell_2}, \quad /3.30/$$

и считая  $\ell_1$  комплексным, а  $\ell_2$  действительным и целым, мы придем к результату, ранее полученному Ньютоном. Действительно, представляя  $t_1$  в полюсном виде,

получим для  $D^{(1)}$  выражение

$$\sum_{\ell_2=0}^{\infty} \sum_{\ell_2=-\infty}^{\ell_2} a(\ell_2) \int \frac{\Psi_{\ell_2}^{(1)}(\xi)}{J+r-\xi} d\xi, \quad /3.31/$$

где  $a(\ell_2)$  — положение полюса Редже для амплитуды  $t_{13}^{J+r}$ . Отсюда видно, что в плоскости  $J$  функции  $\chi^{(1)}$ , а вместе с ними и амплитуды рассеяния будут иметь бесконечно много движущихся разрезов.

Однако эти результаты могут оказаться некорректными по следующим причинам:

1. Выбранный Ньютоном "естественный" способ аналитического продолжения угловых моментов не является однозначным;
2. При продолжении в комплексную область по  $J$  усредненное взаимодействие является аналитической функцией  $J$  лишь при условии  $\text{Re} J > -3/2 + \ell_2 + \ell_2'$ . Так как  $0 \leq \ell_2 < \infty$ , то область аналитичности практически сводится к нулю.
3. Ограничение только первым членом разложения в ряд Фредгольма может оказаться недостаточным и, возможно, учет следующих членов разложения существенно изменит картину.

Так как в настоящее время общее исследование решения уравнений /3.19/ весьма затруднительно, в следующем параграфе мы сформулируем метод возмущения для уравнения Фаддеева и проведем анализ отдельных членов ряда теории возмущений.

#### 84. Теория возмущений для уравнения Фаддеева

Во втором параграфе мы приводили формулу /2.3/, которая дает амплитуду рассеяния на связанном состоянии. Чтобы сформулировать теорию возмущений для матрицы рассеяния, мы используем уравнения /2.7/ и запишем формулу /2.3/ в несколько видоизмененном виде:

$$R_{11} = (\Phi^{\dagger} | T_{12} | \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)}) + (\Phi^{\dagger} | T_{13} | \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)}). \quad /4.1/$$

Существенно, что в этой формуле все величины определены через свободную функцию Грина /2.8 - 2.12/.

Выражая функции  $\Psi^{(i)}$  через функции начального состояния  $\Phi^{\dagger}$  /2.8/, получим вместо /4.1/

$$R_{11} = \langle \Phi^{\dagger} | T | \Phi^{\dagger} \rangle, \quad /4.2/$$

где

$$\begin{aligned}
 T = & \{ T_{12}(1-G_0 T_{23} G_0 T_{13})^{-1} - T_{12} G_0 T_{13}(1-G_0 T_{12} G_0 T_{13})^{-1} (1-G_0 T_{12}) \times \\
 & \times (1-G_0 T_{23} G_0 T_{13})^{-1} + T_{13}(1-G_0 T_{12} G_0 T_{13})^{-1} (1-G_0 T_{12}) \times \quad /4.3/ \\
 & \times (1-G_0 T_{23} G_0 T_{13})^{-1} \} \times \{ 1-G_0 T_{23}(1-G_0 T_{13}) \times \\
 & \times (1-G_0 T_{12} G_0 T_{13})^{-1} G_0 T_{12}(1-G_0 T_{13}) (1-G_0 T_{23} G_0 T_{13})^{-1} \}^{-1}.
 \end{aligned}$$

На основе /4.3/ легко получить следующее разложение в ряд теории возмущений /см. также /6/ /:

$$R_{II} = \langle \Phi^I | T_{12} + T_{13} - T_{12} G_0 T_{13} - T_{13} G_0 T_{12} + T_{12} G_0 T_{13} G_0 T_{12} + \dots | \Phi^I \rangle. \quad /4.4/$$

Сформулируем диаграммную технику для разложения /4.4/. Введем фурье-образы функций  $\phi_{n_0}(\vec{r}_2)$  и  $\phi_{n_0}(\vec{r}_2)$ , описывающих связанное состояние второй частицы до и после рассеяния

$$\chi_n(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\vec{p}\vec{r}} \phi_n(\vec{r}) d\vec{r}. \quad /4.5/$$

Тогда, учитывая определения /2.4/ и /2.8/, формулу /4.2/ можно переписать в следующем виде:

$$R_{II} = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_1 \chi_{n_0}^*(\vec{p}_1) \chi_{n_0}(\vec{p}_1) \int e^{-i\vec{k}_0^1 \vec{r}_1 - i\vec{p}_1^1 \vec{r}_2} T e^{-i\vec{k}_0^1 \vec{r}_1 + i\vec{p}_1^1 \vec{r}_2} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2, \quad /4.6/$$

так что для /4.4/ получим:

$$R_{II} = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_1 \chi_{n_0}^*(\vec{p}_1) \chi_{n_0}(\vec{p}_1) \{ \langle \vec{k}_0^1 \vec{p}_1 | T_{12}(z) | \vec{k}_0^1 \vec{p}_1 \rangle + \dots \}. \quad /4.7/$$

Имеющиеся здесь под интегралом матричные элементы операторов  $T_{ik}(z)$ , определенные по формуле

$$\langle \vec{k}_i \vec{p}_i | T_{ik}(z) | \vec{k}_i \vec{p}_i \rangle = \frac{1}{(2\pi)^6} \int e^{-i\vec{k}_i \vec{r}_1 - i\vec{p}_i \vec{r}_2} T_{ik}(z) e^{i\vec{k}_i \vec{r}_1 - i\vec{p}_i \vec{r}_2} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2, \quad /4.8/$$

можно представить в следующем виде:

$$\langle \vec{k}_i \vec{p}_i | T_{12}(z) | \vec{k}_i \vec{p}_i \rangle = \delta(\vec{p}_i + \vec{k}_i - \vec{p}_i - \vec{k}_i) \langle \frac{\vec{p}_i - \vec{k}_i}{2} | t_{12}(z - (\vec{p}_i + \vec{k}_i)) | \frac{\vec{p}_i - \vec{k}_i}{2} \rangle \quad /4.9/$$

$$\langle \vec{k}_i \vec{p}_i | T_{23}(z) | \vec{k}_i \vec{p}_i \rangle = \delta(\vec{p}_i - \vec{p}_i) \langle \vec{k}_i | t_{23}(z - \vec{p}_i^2) | \vec{k}_i \rangle$$

$$\langle \vec{k}_i \vec{p}_i | T_{23}(z) | \vec{k}_i \vec{p}_i \rangle = \delta(\vec{k}_i - \vec{k}_i) \langle \vec{p}_i | t_{23}(z - \vec{k}_i^2) | \vec{p}_i \rangle,$$

где  $t_{1k}$  - двухчастичные амплитуды рассеяния вне энергетической поверхности, удовлетворяющие уравнениям типа /2.20/, причем  $t_{12}$  является амплитудой рассеяния первой частицы на второй, а  $t_{13}$  и  $t_{23}$  - амплитудами рассеяния на силовом центре.

Удобно сопоставить каждому члену разложения /4.7/ определенную диаграмму:

$$R_{if} = \underbrace{\bigcirc}_{\text{O}} + \underbrace{\times}_{\text{X}} + \underbrace{\bigcirc \times}_{\text{O X}} + \underbrace{\times \bigcirc}_{\text{X O}} + \underbrace{\bigcirc \times \bigcirc}_{\text{O X O}} /4.10/$$

$$+ \underbrace{\bigcirc \times \bigcirc}_{\text{O X O}} + \underbrace{\times \times}_{\text{X X}} + \underbrace{\times \bigcirc \times}_{\text{X O X}} + \underbrace{\times \times \bigcirc}_{\text{X X O}} + \underbrace{\times \times \times}_{\text{X X X}} + \dots$$

Верхняя горизонтальная линия соответствует первой частице, нижняя - второй; кружок соответствует матрице  $t_{12}$ , а крестик на верхней или нижней линии означает  $t_{13}$  или  $t_{23}$  соответственно. Вертикальному сечению двух промежуточных линий соответствует свободная функция Грина  $G_0$ . Из формул /4.9/ видны законы сохранения импульсов в промежуточном состоянии. В качестве примеров приведем явное выражение для двух диаграмм. Имеем:

$$\underbrace{\times}_{\text{X}} = \int d\vec{p} \chi_{n_1}^*(\vec{p}) \chi_{n_1}(\vec{p}) \langle \vec{k}_1 | t_{13}(z - p^2) | \vec{k}_1 \rangle, \quad /4.11/$$

а для более сложной диаграммы

$$\underbrace{\bigcirc \times \bigcirc}_{\text{O X O}} = \int \chi_{n_1}^*(\vec{p}_1) \chi_{n_1}(\vec{p}_1) d\vec{p}_1 d\vec{p}'_1 \int d\vec{q} \langle \frac{\vec{k}_1 - \vec{p}_1}{2} | t_{12}(z - (\vec{p}'_1 + \vec{k}_1)^2) | \frac{\vec{p}'_1 + \vec{k}_1}{2} - \vec{q} \rangle \times$$

$$\times \frac{1}{q^2 + (\vec{p}'_1 + \vec{k}_1 - \vec{q})^2 - z} \langle \vec{p}'_1 + \vec{k}_1 - \vec{q} | t_{12}(z - q^2) | \vec{p}'_1 + \vec{k}_1 - \vec{q} \rangle \frac{1}{q^2 + (\vec{p}'_1 + \vec{k}_1 - \vec{q})^2 - z} \langle \frac{\vec{p}'_1 + \vec{k}_1}{2} - \vec{q} | t_{12}(z - (\vec{p}'_1 + \vec{k}_1)^2) | \frac{\vec{k}_1 - \vec{p}_1}{2} \rangle.$$

Из вышесказанного и рассмотренных примеров ясны правила соответствия, при помощи которых легко выписать аналитическое выражение для любой диаграммы из разложения /4.10/. В дальнейшем, с целью изучения аналитических свойств в комплексной  $J$  - плоскости, мы займемся изучением каждого члена ряда теории возмущений.

Аналогичные исследования в теории поля были предприняты в работах /1,1a5/. Сначала укажем на подкласс диаграмм из /4.10/, в которых разрезы, имеющиеся в каждом члене, исчезают при суммировании. В самом деле, рассмотрим диаграммы вида

$$\frac{\times}{\text{---}} + \frac{\times \times}{\text{---} \times} + \frac{\times \times \times}{\text{---} \times \times} + \dots \quad /4.13/$$

Ограничимся случаем, когда связанная система частиц 2 и 3 находится в  $s$ -состоянии, причем потенциал  $V_{23}$  допускает только одно связанное состояние. Тогда волновую функцию связанного состояния в импульсном представлении можно записать в спектральном виде /7/:

$$\chi(\vec{p}) = \frac{1}{p^2 + \epsilon_0} + \frac{1}{\pi} \int_{\sqrt{\epsilon_0 + p^2}}^{\infty} \frac{\rho(p'^2) \phi'^2}{p'^2 + p^2} dp' \quad /4.14/$$

В этом случае амплитуды рассеяния являются функцией только двух инвариантов - полной энергии и квадрата переданного импульса  $t = (\vec{k}_1 - \vec{k}_1')^2$ , а полный угловой момент совпадает с угловым моментом первой частицы.

Учитывая только полюсный член в /4.14/, найдем, что первой диаграмме ряда /4.13/ соответствует выражение

$$\int \frac{d\vec{p}}{(p^2 + \epsilon_0)^2} \langle \vec{k}_1' | t_{13}(z - p^2) | \vec{k}_1 \rangle \quad /4.15/$$

При больших  $t$  можно заменить двухчастичную амплитуду рассеяния  $t_{13}$  ее асимптотическим выражением

$$\langle \vec{k}_1' | t_{13}(z - p^2) | \vec{k}_1 \rangle \approx R \frac{2a(z - p^2) + 1}{\sin \pi a} \frac{P_{a(s-p^2)}(-\cos \theta)}{k^2} \quad /4.16/$$

где косинус угла рассеяния  $\cos \theta = 1 + \frac{t}{2k^2}$ . Подставляя /4.16/ в /4.15/ и учитывая асимптотическое поведение функции Лежандра при больших аргументах, получим выражение типа

$$\int t(p^2) t^{a(s-p^2)} dp \quad /4.17/$$

соответствующее разрезу в комплексной плоскости углового момента.

Исследование следующих графиков ряда /4.13/ также приводит к заключению о существовании разрезов в комплексной плоскости углового момента. Например, из выражения для следующей диаграммы разложения /4.13/

$$\int d\vec{p}' d\vec{q}' \chi_1(\vec{p}') \chi_1(\vec{p}) \langle \vec{k}_1' | t_{13}(z - p'^2) | \vec{q}' \rangle \times \quad /4.18/$$

$$\times (\vec{p}' | t_{23}(z - q'^2) | \vec{p}) \frac{1}{q'^2 + p'^2 - z} \langle \vec{q}' | t_{13}(z - p^2) | \vec{k}_1 \rangle$$

видно, что ее асимптотическое поведение при больших  $t$  также дается выражением /4.17/.

Однако ряд /4.13/ легко просуммировать. Он является разложением следующего выражения

$$(\Phi_{23}^i, T_{13}(1 - G_0 T_{23} G_0 T_{13})^{-1} \Phi_{23}^i). \quad /4.18/$$

С другой стороны, легко показать, что это выражение тождественно равно

$$(\Phi_{23}^i, \tilde{T}_{13} \Phi_{23}^i), \quad /4.20/$$

где  $\tilde{T}_{13}$  удовлетворяет уравнению /2.15/. Далее, ясно, что

$$(\Phi_{23}^i, \tilde{T}_{13} \Phi_{23}^i) = \langle k_i | t_{13}(z - \epsilon_0) | k_i \rangle. \quad /4.21/$$

Но  $\langle k_i | t_{13}(z - \epsilon_0) | k_i \rangle$  является точной амплитудой рассеяния первой частицы на силовом центре, которая, как известно, является мероморфной функцией углового момента.

Поэтому ряд /4.13/ также является мероморфной функцией углового момента. Полученный результат является естественным, так как при  $V_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0$  гамильтониан /2.1/ допускает разделение переменных.

Рассмотренный пример является поучительным в том смысле, что каждый член ряда теории возмущений может иметь разрез, в то время как ряд в целом является мероморфной функцией.

Анализ остальных диаграмм будет проведен в следующей работе.

В заключение выражаем глубокую благодарность Н.Н. Боголюбову и А.А. Логунову за стимулирующие обсуждения, а также Б.А. Арбузову, А.В. Ефремову, И.Т. Тодорову и О.А. Хрусталеву за плодотворные дискуссии.

#### Л и т е р а т у р а

1. S.Mandelstam, Nuovo Cimento, 30, 1148 (1963).
- 1а. В.Н. Грябов, И.Я. Померанчук, К.А. Тер-Мартirosян. Препринт ИТЭФ. №235, Москва, 1964.
2. R.G.Newton, Nuovo Cimento, 29, 400 (1963); Phys. Letters, 4, 11 (1963); Phys. Letters, 8, 210 (1964).
- 2а. M.Macmillan, Preprint, Cambridge, August (1963).
3. R.L.Omnes, Preprint, UCRL -11162 (1963); 11186 (1963); 11219 (1963).
4. Л.Д. Фаддеев, ЖЭТФ, 39, 1459 (1960).
5. C.Wilkin, Nuovo Cimento, 31, 377 (1964).
6. L.Rosenberg, Phys. Rev., 131, 874 (1963).
7. R.Blankenbecler, L.F.Cook, Phys. Rev., 119, 1745 (1964).
8. Р.М. Мурадян, А.Н. Тавхелидзе, Г.А. Чилашвили, В.П. Шелест. Препринт ОИЯИ Е-1659, Дубна, 1964.

Рукопись поступила в издательский отдел  
28 апреля 1964 г.