

3
K-65

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

P-166

Г.И. КОПЫЛОВ

ОБ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА ВТОРИЧНЫХ ЧАСТИЦ БЛИЗ
ПРЕДЕЛЬНЫХ УГЛОВ

(отчет)

г. Дубна, 1958 год

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

P-I66

Г.И.Копылов

ОБ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА ВТОРИЧНЫХ ЧАСТИЦ БЛИЗ
ПРЕДЕЛЬНЫХ УГЛОВ

(отчет)

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
БИБЛИОТЕКА

1958 г.

В отчете рассматривается случай, когда число вторичных частиц в реакции равно двум. Дан обзор кинематических формул, уточнена методика оценки количества частиц, движущихся в наиболее вероятных направлениях.

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

При подготовке экспериментов с частицами, выведенными из ускорителя, возникает среди прочих и вопрос о направлении, в котором ожидается наибольшее количество вторичных частиц, и об оценке этой последней величины. Решение вопроса, когда число вторичных частиц равно двум, не встречает каких-либо принципиальных трудностей. Настоящий отчет посвящен поэтому лишь упрощению методики таких вычислений.

Формулы, приведенные в нем, могут, как нам кажется, облегчить экспериментатору расчеты. Другая цель этого отчета - дать сводку известных кинематических формул. Это делает выкладки более систематичными, а читателя избавит от необходимости пользоваться другими обзорами по кинематике (I,2).

Сводка кинематических соотношений дана в § Ia, в § Ib приводится упрощение формул для угла разлета двух частиц. В § 2 приводятся простейшие формулы статистики двухчастичного распада в лабораторной системе отсчета. § 3 посвящен графическому способу подсчета числа частиц в некотором интервале углов или энергий; там же вводится параметр, характеризующий число частиц в наивероятнейшем направлении.

В приложениях помещен ряд графиков и таблиц, иллюстрирующих расчеты.

§ Ia. Сводка основных формул по кинематике

Пусть взаимодействуют 2 частицы A и B с энергиями E_A , E_B импульсами \vec{P}_A , \vec{P}_B и массами m_A , m_B (соответственно) в лабораторной системе отсчета (L-системе). После взаимодействия возникают некоторые новые частицы γ и γ с характеристиками

$E_c, E_d, \vec{p}_c, \vec{p}_d, m_c, m_d$. Можно считать, что ψ и γ появились в результате распада некоторой компаунд-частицы C с энергией $E_c = E_A + E_B$, импульсом $\vec{p}_c = \vec{p}_A + \vec{p}_B$ и массой (ее можно назвать эффективной массой)

$$m_c = \sqrt{E_c^2 - p_c^2} \equiv \sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2(E_A E_B - \vec{p}_A \vec{p}_B)} . \quad (I.1)$$

Величина m_c - это энергия совокупности частиц $A + B$ в системе центра масс (где $\vec{p}_A + \vec{p}_B = 0$). Заметим, что, если частица B неподвижна, то формулы характеристик компаунд-частицы упрощаются

$$E_c = E_A + m_B, \quad p_c = p_A = \sqrt{E_A^2 - m_A^2}, \quad m_c^2 = m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B . \quad (I.2)$$

В дальнейшем мы будем говорить только о распаде $C \rightarrow \psi + \gamma$, помня, что реакции рождения могут в кинетическом отношении всегда быть сведены к реакциям распада.

Перейдем к характеристикам вторичных частиц ψ и γ . В системе центра масс с.ц.м. ^{х)}, где C покоится и $\vec{p}_c^* + \vec{p}_d^* = 0$, из закона сохранения энергии $E_c^* + E_d^* = m_c \equiv E_c^*$ легко получить выражения для энергии и импульса любой из частиц ψ и γ :

$$E_c^* = \frac{m_c^2 + m_\psi^2 - m_\gamma^2}{2m_c}, \quad E_d^* = \frac{m_c^2 + m_\gamma^2 - m_\psi^2}{2m_c} , \quad (I.3)$$

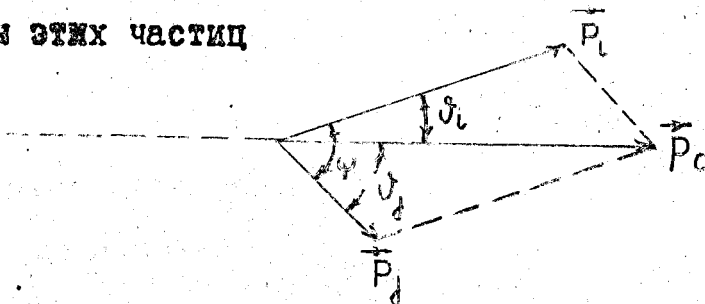
$$|\vec{p}_c^*| = |\vec{p}_d^*| = p^* = \frac{\sqrt{m_c^4 + m_\psi^4 + m_\gamma^4 - 2m_c^2 m_\psi^2 - 2m_c^2 m_\gamma^2 - 2m_\psi^2 m_\gamma^2}}{2m_c} \quad (I.4)$$

х) Величины, измеренные в этой системе, будем обозначать звездочкой.

или еще

$$P^* = \sqrt{E_L^{*2} - m_L^2} = \sqrt{E_J^{*2} - m_J^2} = \sqrt{\left(\frac{m_C^2 - m_L^2 - m_J^2}{2m_C}\right)^2 - \frac{m_L^2 m_J^2}{m_C^2}} \quad (I.4a)$$

В L-системе из законов сохранения энергии и импульса следуют формулы, выражающие углы вылета и разлета частиц через энергии и импульсы этих частиц



Черт. I

$$\cos \theta_L = \frac{E_L E_C - E_L^* m_C}{P_L P_C} \quad (I.5)$$

$$\cos \psi = \frac{E_L E_J - q_C^2}{P_L P_J} \quad (I.6)$$

где

$$q_C^2 = \frac{1}{2}(m_C^2 - m_L^2 - m_J^2) \equiv E_L^* m_C - m_L^2 \equiv E_J^* m_C - m_J^2 \quad (I.7)$$

а также формулы, выражающие импульс (или энергию) вторичных частиц через углы их вылета (или разлета). Возвышая (I.5), (I.6) в квадрат, получаем

$$E_i = \frac{E_c E_i^* m_c \pm p_c R_i^2 \cos \vartheta_i}{E_c^2 - p_c^2 \cos^2 \vartheta_i} = \frac{E_j q_c^2 \pm p_j p_i^2 \cos \psi}{E_j^2 - p_j^2 \cos^2 \psi} \quad (I.8_{1,2})$$

$$p_i = \frac{E_c^* m_c p_c \cos \vartheta_i \pm E_c R_i^2}{E_c^2 - p_c^2 \cos^2 \vartheta_i} = \frac{q_c^2 p_j \cos \psi \pm E_j p_i^2}{E_j^2 - p_j^2 \cos^2 \psi} \quad (I.9_{1,2})$$

где

$$R_i^4 = m_c^2 p^{*2} - m_i^2 p_c^2 \sin^2 \vartheta_i \quad (I.10)$$

$$p_i^4 = m_c^2 p^{*2} - m_i^2 p_j^2 \sin^2 \psi \quad (I.11)$$

Первый столбец дробей в (I.8), (I.9) выражает E_i и p_i через угол вылета ϑ_i при известной энергии первичной частицы, второй - через угол разлета ψ при известной энергии другой вторичной частицы. Знаки + и - в формулах для E и p находятся в соответствии.

Если известно, что энергия первичной частицы E_c меньше $\frac{m_c}{m_i} E_i^*$ (или $p < \frac{m_c}{m_i} p^*$), то ϑ_i может принимать значения в интервале $(0^\circ, 180^\circ)$, а зависимость p_i или E_i от ϑ_i однозначна (знак +). Если $E_c > \frac{m_c}{m_i} E_i^*$, то ϑ_i принимает значения от 0° до

$$\vartheta_{i, \max} = \arcsin \frac{m_c p^*}{m_i p_c} \equiv \arccos \frac{\sqrt{m_i^2 E_c^2 - m_c^2 E_i^{*2}}}{m_i p_c} \equiv \arctg \frac{\beta_i^*}{\gamma \sqrt{v^2 - \beta_i^{*2}}} \quad (I.12)$$

(здесь $\beta_i^* = \frac{p^*}{E_i^*}$, $v = \frac{p_c}{E_c}$, $\gamma = \frac{E_c}{m_c}$), а p_i (и E_i) принимает два значения (знаки + и -).

Если известно, что энергия вторичной частицы E_j меньше q_c^2/m_i (или $p_j < m_c p^*/m_i$), то в формулах (I.8₂),

(I.9₂) для P_i и E_i надо брать верхний знак, а ψ находится в интервале $(0^\circ, 180^\circ)$. Если же $E_j > q_c^2/m_i$, то ψ меняется от 0° до

$$\psi_{\max} = \arcsin \frac{m_c P^*}{m_i P_j} = \arccos \frac{\sqrt{m_i^2 E_j^2 - q_c^4}}{m_i P_j}, \quad (I.13)$$

а P_i принимает 2 значения (знаки + и -).

Заметим еще, что, если частица γ имеет направление в предельный угол $\tilde{\psi}_{\max}$, то частица γ направлена под углом (отличным от предельного)

$$\tilde{\psi}_j = \arctg \frac{\beta_j^* \sqrt{v^2 - \beta_i^{*2}}}{\gamma (v^2 + \beta_i^* \beta_j^*)}, \quad (I.14)$$

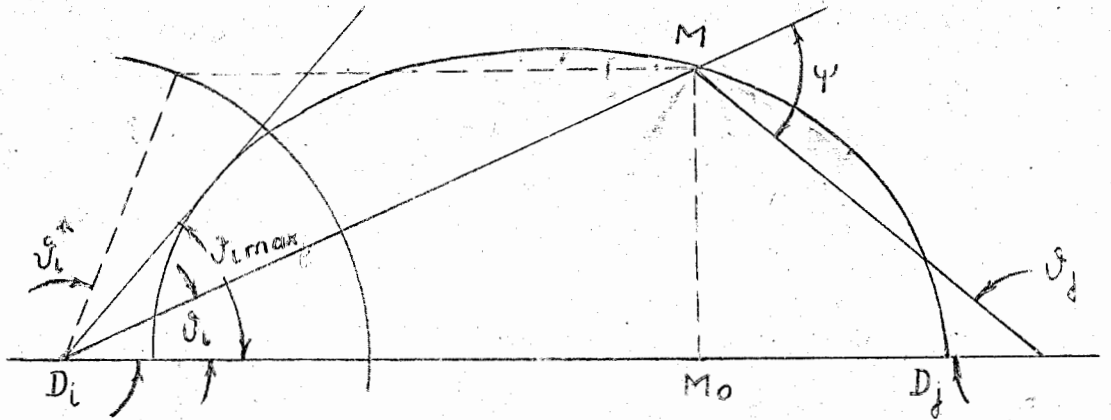
а угол ψ между частицами γ и γ в этом случае равен

$$\tilde{\psi} = \arctg \frac{\gamma (\beta_i^* + \beta_j^*)}{(1 + \beta_i^* \beta_j^*) \sqrt{v^2 - \beta_i^{*2}}} \equiv \arctg \frac{E_c P^*}{q_c^2 \sqrt{v^2 - \beta_i^{*2}}}. \quad (I.15)$$

Вместо вычисления $\tilde{\psi}_i$ и E_i можно получать их значения графически (2). Для этого строят полуэллипс с полуосями

$$b = p^*, \quad a = p^* E_c / m_c \quad (I.16)$$

и отмечают на большой оси 2 точки D_i , D_j на расстоянии $d_{i,j} = E_{i,j}^* P_c / m_c$ влево и вправо от центра эллипса (черт.2).



Черт. 2.

Тогда векторы $\overline{D_i M}$ и $\overline{D_f M}$ по величине и направлению представляют импульсы \overline{p}_i и \overline{p}_f , а энергия любой из частиц (скажем, ψ) E_i связана с величиной проекции $\overline{D_i M_0}$ вектора \overline{p}_i на ось $D_i D_f$:

или

$$E_i = (E_i^* / \gamma) + p_i v \cos \theta_i$$

$$E_i = \overline{D_i M_0} \cdot \frac{p_i}{E_c} + E_i^* \frac{m_c}{E_c} \quad (I.17)$$

Остальные величины, которые можно получить из того же эллипса, показаны на чертеже.

§ 1в. Угол разлета двух частиц как функция энергии

В дальнейшем нас будет интересовать зависимость $E_i = E_i(\psi)$ при $E_c = const$, т.е. зависимость энергии одной из вторичных частиц от угла разлета при фиксированной энергии первичной частицы. Эта зависимость имеет сложный вид. Из (I.6) следует либо уравнение для ψ

$$\cos \psi = \frac{E_i(E_c - E_i) - q_c^2}{\sqrt{E_i^2 - m_i^2} \sqrt{(E_c - E_i)^2 - m_f^2}} \quad (I.18)$$

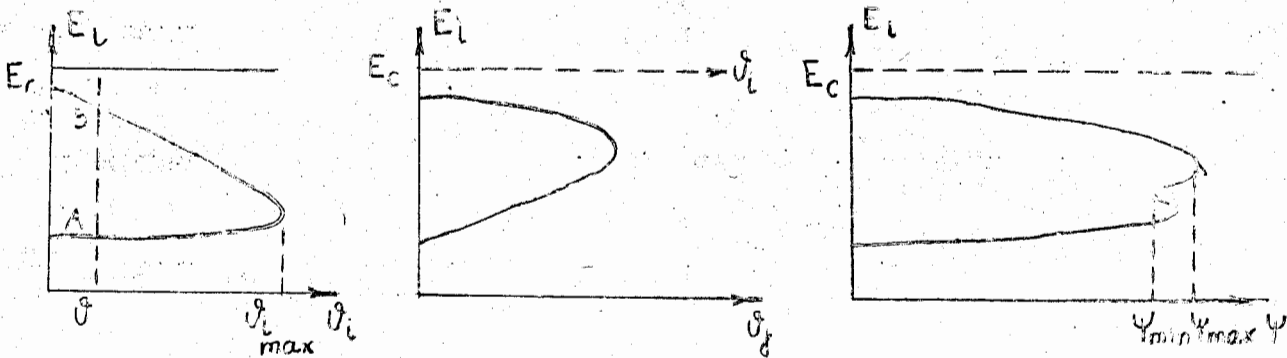
либо уравнение для E :

$$E_L^4 \sin^2 \psi - 2E_C E_L^3 \sin^2 \psi + E_L^2 [(E_C^2 - m_L^2 - m_Y^2) \sin^2 \psi + m_C^2] - 2E_C E_L (m_C E_L^* - m_L^2 \sin^2 \psi) + m_C^2 p^{*2} - m_L^2 m_Y^2 \sin^2 \psi = 0.$$

(I.19)

Качественно зависимость можно представить графически, снимая с чертежа 2 зависимость $\psi(E_L)$; или лучше, сняв зависимости

$\vartheta_L = \vartheta_L(E_L)$ и $\vartheta_Y = \vartheta_Y(E_Y) = \vartheta_Y(E_C - E_L)$, сложением получить кривую $\psi = \vartheta_L(E_L) + \vartheta_Y(E_L)$ (черт.3). На чертеже 3



Черт. 3

изображен случай, когда $m_L \approx m_Y$ и предельные углы $\vartheta_{L, \max}$ существуют. Тогда $\psi = \psi(E_L)$ есть кривая с двумя максимумами и одним минимумом ("двугорбая" кривая). При большой разнице масс кривая становится "одногорбой" (см. приложение I). Там же изображен случай отсутствия предельного угла у одной из частиц и наличия его у другой. Наконец, если обе вторичные частицы настолько энергичны, что предельного направления их движения быть не может, то для угла разлета невозможны значения меньше некоторого наименьшего ψ_{\min} (черт.4). Все эти случаи встречаются на практике.

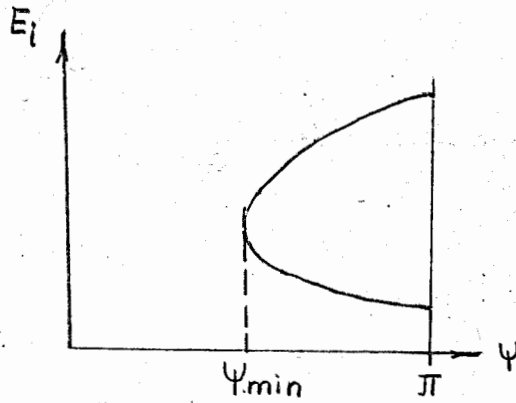


Рис. 4.

А. Случай $m_l = m_j$.

Вернемся к аналитическим способам определения зависимости $E_l(\psi)$. Единственный (нетривиальный) случай, когда (I.19) решается в общем виде, это - распад на частицы одной массы $m_l = m_j = m$. Ввиду симметрии задачи удобно ввести величину e : $E_l = \frac{1}{2} E_c + e$;

$E_j = \frac{1}{2} E_c - e$, тогда (I.18) примет вид

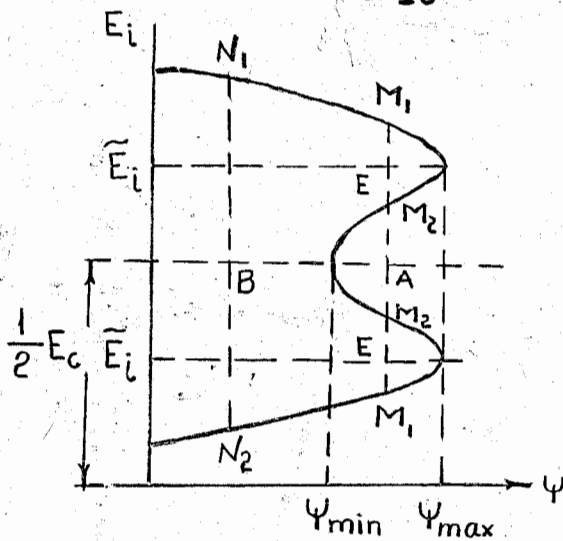
$$\cos \psi = \frac{\frac{1}{4} E_c^2 - e^2 + m^2 - \frac{1}{2} m_c^2}{\sqrt{(\frac{1}{4} E_c^2 - e^2 + m^2)^2 - E_c^2 m^2}}$$

откуда для e получается биквадратное уравнение. Его решение приводит к

$$E_l = \frac{1}{2} E_c \pm \sqrt{\frac{1}{4} E_c^2 + m^2 - \frac{m_c^2}{2 \sin^2 \psi} \pm \frac{\cos \psi}{\sin^2 \psi} \sqrt{\frac{m_c^4}{4} - E_c^2 m^2 \sin^2 \psi}} \quad (I.20)$$

Здесь знаки \pm перед и под корнем между собой не связаны.

График $E_l = E_l(\psi)$ примерно изображен на черт.5 для случая, когда имеется ψ_{\max} , т.е., когда $E_c < m_c^2 / 2m$.



Черт. 5

Из графика видно, что при этом существует ψ_{max} и ψ_{min} , причем ψ_{min} - относительный. Величина ψ_{max} получается из (I.20)

$$\sin \psi_{max} = m_c^2 / 2mE_c. \quad (I.21)$$

Если $\psi_{max} > \psi > \psi_{min}$, то (I.20) можно записать в виде

$$E_i = \frac{1}{2} E_c \pm \left\{ \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} E_c^2 + m^2 - \frac{m_c^2}{2 \sin^2 \psi} + \left(\frac{E_c^2}{4} - m^2 \right) \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \psi_{min}}{\sin^2 \psi}} \right]} \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{E_c^2}{4} + m^2 - \frac{m_c^2}{2 \sin^2 \psi} - \left(\frac{E_c^2}{4} - m^2 \right) \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \psi_{min}}{\sin^2 \psi}} \right]} \right\} \quad (I.22)$$

Здесь первое слагаемое в фигурных скобках дает отрезок AE, второе - EM₁, или EM₂. Через ψ_{min} было при преобразованиях обозначено такое значение ψ , при котором выражение под внутренним корнем обращается в нуль

$$\sin \psi_{min} = \frac{2P_c \sqrt{m_c^2 - 4m^2}}{E_c^2 - 4m^2}, \quad (I.23)$$

что можно также преобразовать к виду

$$\psi_{\min} = \arcsin \frac{P_c P^*}{\frac{1}{4} P_c^2 + P^{*2}} = \arccos \frac{\frac{1}{4} P_c^2 - P^{*2}}{\frac{1}{4} P_c^2 + P^{*2}} = 2 \arctg (2P^*/P_c)^2 \quad (I.24)$$

Выпишем еще формулу, дающую E_i при $\psi = \psi_{\max}$

$$\tilde{E}_i = \frac{E_c}{2} \pm \frac{\sqrt{(m_c^2 - 8m^2)E_c^2 + 4m^2 m_c^2}}{2m_c} \quad (I.25)$$

Случай $E_c > m_c^2/2m$ примерно изображен на черт.4, а уравнение кривой $\psi = \psi(E_i)$ при этом имеет вид (I.20), где под радикалом нужно из двух знаков брать лишь +.

В. Случай $m_i \approx m_j$.

Приближенные аналитические выражения для ψ удается получить и при приближенном равенстве масс вторичных частиц - точнее, при

$$|m_i^2 - m_j^2| \ll m_c^2 \quad (I.26)$$

Это возможно, например, в реакциях, где получаются пары π^\pm и π^0 , p и n , нуклон и гиперон, два гиперона. Так как под m_c можно понимать эффективную массу первичных частиц, возрастающую с ростом энергии падающей частицы (см. /I.2/), то при больших энергиях неравенство (I.26) выполняется даже при значительном отличии масс вторичных частиц. Ниже написанные формулы получают-ся обычным разложением (I.18) в ряд Тейлора по степеням

$$\delta = (m_j^2 - m_i^2) / 2m_c^2 \quad (I.27)$$

Введем обозначения

$$\sigma = (m_i^2 + m_j^2) / 2m_c^2; \quad (I.28)$$

$$\tau_i^2 = (1 - 8\sigma)E_c^2 + 4\sigma m_c^2; \quad (I.29)$$

$$\tau_2^2 = E_c^2 + 2m_c^2(2\sigma - 1); \quad (I.30)$$

$$\tau_3^2 = 4E_c^2\sigma - m_c^2; \quad (I.31)$$

$$\tau_4^2 = 2(1 - 6\sigma)E_c^2 - (1 - 8\sigma)m_c^2; \quad (I.32)$$

Тогда получаем выражение для наибольшего угла разлета

$$\cos \psi_{max} = \frac{\tau_3}{2E_c\sqrt{\sigma}} + \frac{m_c^4\sqrt{\sigma}\tau_4^2}{E_c^2\tau_3^3\tau_1} \delta + \dots; \quad (I.33)$$

для наименьшего угла разлета

$$\cos \psi_{min} = \frac{\tau_2}{E_c^2 - 4\sigma m_c^2} \left[1 - \frac{16m_c^2 E_c^2 \tau_2^2}{(E_c^2 - 4\sigma m_c^2)^2 \tau_1^2} \delta^2 + \dots \right]; \quad (I.34)$$

для энергии, соответствующей максимальному углу

$$\tilde{E}_l = \frac{1}{2} E_c \pm \frac{1}{2} \tau_1 - E_c \frac{\tau_4^2}{\tau_1^2} \delta + \dots; \quad (I.35)$$

минимальному (3 или I значение)

$$\tilde{E}_l = \frac{1}{2} E_c + E_c \frac{\tau_2^2}{\tau_1^2} \delta + \dots \quad (I.36)$$

$$\tilde{E}_l = \frac{1}{2} E_c \pm \frac{\tau_1 \tau_2}{2p_c \sqrt{4\sigma - 1}} + \frac{E_c \tau_2^2 \delta}{2\tau_1^2} \quad (\text{только при } E_c < m_c/2\sqrt{\sigma});$$

Эnergie в функции угла разлета (знаки \pm связаны)

$$E_l = \frac{1}{2} E_c \pm \sqrt{\frac{E_c^2}{4} + \sigma m_c^2 - \frac{m_c^2}{2\sin^2\psi} \pm \frac{m_c \cos\psi}{\sin^2\psi} \sqrt{\frac{m_c^2}{4} - E_c^2 \sigma \sin^2\psi} \pm \left(\frac{1}{4} E_c m_c \cos\psi / \sqrt{\frac{m_c^2}{4} - E_c^2 \sigma \sin^2\psi} \right) \delta} \quad (I.37)$$

Из (I.33) следует, что различие в массах первичных частиц в первом (по δ) приближении не приводит к разной высоте "горбов" функции $\psi(E_l)$; из (I.34), - что в первом приближении

ψ_{min} не меняется ; из (I.35), - что оба "горба" просто сдвигаются на одно и то же расстояние $-E_c \frac{\tau_4^2}{\tau_1^2} \delta$; из (I.37), -

что интервал энергий, при которых углы разлета заключены между ψ_{\max} и ψ_{\min} в I приближении по сравнению со случаем равных масс не меняется.

C. Общий случай

В общем случае $m_l \neq m_j$ не удается дать достаточно простых расчетных формул для зависимости энергии вторичной частицы от угла разлета. Однако можно найти приближенное выражение для той энергии вторичной частицы \tilde{E}_l , при которой осуществляется максимальный угол разлета между частицами. Знание этой величины позволит легко определить ψ_{\max} . С этой целью в условии максимума

$$\frac{d\psi}{dE_l} = \frac{\left(\frac{E_l P_j}{P_l} - \frac{E_j P_l}{P_j}\right) \cos \psi + E_l - E_j}{P_l P_j \sin \psi} = 0$$

надо подставить значение $\cos \psi$ из (I.16) и исключить E_j . Получится кубическое относительно E_l уравнение, которое введением безразмерных величин

$$\varepsilon_{l,j} = E_{l,j}^*/m_c, \quad \varepsilon_c = q_c^2/m_c^2, \quad \mu_{l,j} = m_{l,j}^2/m_c^2 \quad (I.38)$$

и подстановкой $y = E_l - \varepsilon_l \varepsilon_c$ приводится к виду $(I.38')$

$$y^3 + \tau y + S = 0, \quad (I.39)$$

где

$$\tau = \left[\frac{3}{2} (\mu_l \varepsilon_j + \mu_j \varepsilon_l) - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \right] E_c^2 - (\mu_l \varepsilon_j + \mu_j \varepsilon_l) m_c^2, \quad (I.40)$$

$$S = (\mu_j - \mu_l) (\varepsilon_c^2 - \mu_l \mu_j) E_c P_c^2. \quad (I.41)$$

Уравнения для частиц γ и $\bar{\gamma}$ отличаются только знаком β и имеют корни γ также противоположного знака. При $E_c \gg m_{i,j,c}$ имеет смысл разложить решение (I.39) по степеням E_c^{-1} (точнее, m_c/E_c). Взяв

$$\gamma_i = E_c (\alpha_i + \bar{\beta}_i E_c^{-2}), \quad (I.42)$$

получим для α_i приближенное уравнение

$$\alpha_i^3 + \left[\frac{3}{2} (\mu_i \varepsilon_j + \mu_j \varepsilon_i) - \frac{1}{2} \varepsilon_c \right] \alpha_i + (\mu_j - \mu_i) (\varepsilon_c^2 - \mu_i \mu_j) = 0, \quad (I.43)$$

корни которого определяются лишь массами частиц, участвующих в реакции, и не зависят от их энергии. Так, для реакции $\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$ $\alpha_\Lambda = 0,922$; для реакции $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$ $\alpha_p = 0,8894$ вне зависимости от значений E_Ξ или E_Λ .

Определив α_i , можно найти $\bar{\beta}_i$ по формуле

$$\bar{\beta}_i = \frac{(\mu_i \varepsilon_j + \mu_j \varepsilon_i) \alpha_i + (\mu_j - \mu_i) (\varepsilon_c^2 - \mu_i \mu_j)}{3\alpha_i^2 + 1,5(\mu_i \varepsilon_j + \mu_j \varepsilon_i) - 0,5\varepsilon_c} m_c^2 \quad (I.44)$$

Коэффициент $\bar{\beta}_i$ также не зависит от E_c и практически (как это показали расчеты для некоторых реакций) мал, поэтому формула

$$\bar{E}_i = (\alpha_i + \varepsilon_i) E_c \quad (I.44)$$

(см. (I.38')) удовлетворительно представляет величину энергии вторичной частицы под предельным углом всюду, где ψ_{\max} существует. Таким образом, энергия, которую имеет частица, двигаясь под предельным углом, примерно пропорциональна полной энергии первичной частицы.

В приложении 2 эта пропорциональность продемонстрирована на примере реакции $K^- \rightarrow \pi^- + \pi^0$, где (I.44) выполняется с большой точностью и для ψ'_{\max} , и для ψ'_{\min} .

Интересно, что для тех частиц, угол разлета которых в Л-системе наибольший, косинус угла вылета в с.ц.м. обратно пропорционален скорости $V = P_c/E_c$ первичной частицы. Действительно, подставив в преобразования Лоренца

$$E_i = \frac{E_c}{m_c} E_i^* + \frac{P_c}{m_c} P^* \cos \vartheta_i^*$$

значение \bar{E}_i из (I.44) и ε_i из (I.38) получим

$$\cos \tilde{\vartheta}_i^* = -\cos \tilde{\vartheta}_i^* = \frac{m_c \alpha_i}{P^*} \cdot \frac{E_c}{P_c} \quad (I.45)$$

§ 2. Сводка формул, дающих распределение частиц по углам

Для оценки распределения частиц по углам в лабораторной системе отсчета должна быть известна плотность углового распределения в системе центра масс $f(\mu_i^*)$

$$\frac{dn}{d\mu_i^*} = f(\mu_i^*), \quad (\mu_i^* = \cos \vartheta_i^*), \quad (2.1)$$

Обычно $f(\mu_i^*)$ - многочлен по μ_i^* (или по E_i , так как из преобразований Лоренца следует линейная связь μ_i^* и E_i):

$$\mu_i^* = a + b E_i, \quad (2.2)$$

где

$$a = -E_c E_i^* / P_c P^* \equiv -(\beta_i^* v)^{-1}, \quad (2.3)$$

$$b = m_c / P_c P^*. \quad (2.4)$$

Угловое распределение в лабораторной системе получится из тождества

$$\frac{dn}{d\alpha} \equiv \frac{dn}{d\mu_i^*} \frac{d\mu_i^*}{dE_i} \left| \frac{dE_i}{d\alpha} \right| \equiv b f(\mu_i^*) \left| \frac{dE_i}{d\alpha} \right|. \quad (2.5)$$

Здесь под α можно понимать любой из углов ϑ_i , ϑ_j , ψ или их косинусы. Последний множитель в (2.5) можно определить графически как угловой коэффициент кривых $E_i = E_i(\alpha)$, рассмотренных в

предыдущем параграфе. Из (2.5) следует, что наиболее вероятные направления частиц (в которых плотность $dn/d\alpha$ бесконечна) совпадают с предельными или минимальными углами (если они существуют), так как в этих углах $d\alpha/dE_i = 0$.

Воспользовавшись (I.8), (I.5), (I.6), напомним аналитические выражения для $dn/d\alpha$:

$$\frac{dn}{d\mu_i} = \frac{m_c}{2P^*} \frac{P_i^3}{|-E_c m_i^2 + E_i m_c E_i^*|} f(a + bE_i); \quad (2.6)$$

$$\frac{dn}{d\cos\psi} = \frac{m_c}{2P_c P^*} \frac{P_i^3 P_j^3}{|m_j^2 E_i P_i^2 - m_i^2 E_j P_j^2 + (E_i P_j^2 - E_j P_i^2) q_c^2|} f(a + bE_i) = \quad (2.7)$$

$$= \frac{m_c}{2P_c P^*} \frac{P_i^2 P_j^2}{|P_i E_j (P_j + P_i \cos\psi) - P_j E_i (P_i + P_j \cos\psi)|} f(a + bE_i) = \quad (2.8)$$

$$= \frac{m_c}{2P_c P^*} \frac{P_i P_j}{|E_j - E_i + \cos\psi \left(\frac{P_i}{\beta_j} - \frac{P_j}{\beta_i} \right)|} f(a + bE_i); \quad (2.9)$$

$$\frac{dn}{d\psi} = \frac{m_c}{2P_c P^*} \left| \frac{\frac{E_j - E_i}{E_i E_j - q_c^2} + \frac{E_j}{P_j^2} - \frac{E_i}{P_i^2}}{\operatorname{tg}\psi} \right| f(a + bE_i) \quad (2.10)$$

В виде (2.10) формула приведена в (3), откуда взят и метод расчета

$dn/d\alpha$. Дальнейшие преобразования удастся сделать в формуле (2.6), воспользовавшись (I.8). Можно показать, что $-E_c m_i^2 + E_i m_c E_i^* = \pm P_c R_i^2$, поэтому

$$\frac{dn}{d\mu_i} = \frac{m_c}{2P_c P^*} \cdot \frac{P_i^3}{R_i^2} f(a + bE_i). \quad (2.11)$$

Если P_i есть однозначная функция β_i (при $E_c < \frac{m_c}{m_i} E_i^*$), то (2.11) с подставленными в нее P_i и R_i из (I.9), (I.10) даст $dn/d\mu_i$ как функцию μ_i . Если же каждому β_i соответствуют два P_i (при $E_c > \frac{m_c}{m_i} E_i^*$), то следует сложить два значения $dn/d\mu_i$, и формула принимает вид

$$\frac{dn}{d\mu_i} = \frac{m_c}{p^*} \cdot \frac{m_c^2 E_i^{*2} p_c^2 \mu_i^2 + E_c^2 R_i^4}{R_i^2 (E_c^2 - p_c^2 \mu_i^2)} f(a + bE_i) \quad (2.12)$$

В случае отсутствия предельного угла наиболее вероятное направление можно найти из условия максимума плотности частиц $dn/d\alpha$ под данным углом α :

$$d^2 n / d\alpha^2 = 0. \quad (2.13)$$

В частности, для угла μ_i (2.13), записанное в виде

$$d^2 n / dE_i d\mu_i = 0, \quad , \text{ приводит к уравнению}$$

$$(2E_i^2 m_c E_i^* - 3E_i E_c m_i^2 + m_i^2 m_c E_i^*) f(a + bE_i) + b(E_i^2 - m_i^2)(E_i m_c E_i^* - E_c m_i^2) f'(a + bE_i) = 0, \quad (2.14)$$

откуда можно определить E_i и затем, если оно действительно соответствует максимуму $dn/d\mu_i$ (в чем проще всего убедиться из графика), найти μ_i - наиболее вероятное направление. При изотропном распределении в с.ц.м. такие значения μ_i (и вообще α) соответствуют точкам перегиба кривой $E_i(\alpha)$.

§ 3. Число частиц в наиболее вероятных направлениях

Практический интерес представляет для эксперимента не плотность числа частиц, а число частиц Δn в некотором интервале углов (α', α'') или энергий, им соответствующих (E_i', E_i'') :

$$\Delta n = \int_{\mu_i^{*'}}^{\mu_i^{*''}} f(\mu_i^*) d\mu_i^* = b \int_{E_i'}^{E_i''} f(a + bE_i) dE_i \quad (3.1)$$

Здесь $\mu_i^{*'}, \mu_i^{*''}$ - значения μ_i^* , соответствующие α', α'' .

Наибольшие трудности при расчете по (3.1) представляет выразить

пределы интегрирования в функции α . Проще и быстрее всего это сделать графически, из графиков $E_i = E_i(\alpha)$ или $\mu_i^* = \mu_i^*(\alpha)$, отличающихся лишь масштабом по оси E_i . В частности, при изотропном распределении $f(\mu_i^*) \approx 0,5$ из (3.1) следует очень удобное для графических расчетов соотношение

$$\Delta n = 0,5 \beta \cdot \Delta E_i, \quad (3.2)$$

т.е. количество частиц в некотором интервале углов пропорционально приращению энергии частиц в этом интервале. Так, число частиц в интервале (ψ_1, ψ_2) (см. черт. 5) равно разности отрезков $N_1 N_2 - 2 \cdot M_1 M_2$, если C_1, C_2 принять за единицу масштаба. Да и при неизотропном распределении, если только интервал углов (энергий) невелик, приближенно сохраняется указанная пропорциональность

$$\Delta n = \beta \cdot f(\alpha + \beta E_{\text{сред.}}) \Delta E_i. \quad (3.3)$$

Чтобы дать аналитическое выражение для числа частиц в наиболее вероятных направлениях, вспомним, что эти направления совпадают с максимумами и минимумами кривой $E_i = E_i(\alpha)$, и учтем, что близ этих точек кривая ~~ж~~ аппроксимируется параболой

$$\Delta \alpha = \frac{1}{2} \tilde{\alpha}'' \cdot (\Delta E_i)^2. \quad (3.4)$$

Здесь штрих и тильда означают дифференцирование по E_i в точке

$\alpha = \alpha_{\text{extr}}$. Отсюда следует

$$\Delta E_i = 2^{3/2} (\tilde{\alpha}'')^{-1/2} \sqrt{|\alpha - \alpha_{\text{extr}}|}. \quad (3.5)$$

Применение (3.5) к (3.3) и дает искомую оценку числа частиц под предельным углом. Мы введем новую величину $dn/\sqrt{|d\alpha|}$ - коэффициент, на который надо умножить $\sqrt{|\alpha - \alpha_{\text{extr}}|}$, чтобы получить число частиц в интервале от α до α_{extr} . Тогда из (3.5)

$$\frac{dn}{\sqrt{|\alpha|}} = 2^{3/2} b f(a + b \bar{E}_i) (\bar{\alpha}'')^{-1/2} \quad (3.6)$$

с ошибкой, меньшей, чем

$$\frac{1}{3} \frac{|\bar{\alpha}''''|}{|\bar{\alpha}''|^2} \sqrt{|\alpha - \alpha_{extz}|} \quad (3.6^9)$$

Напомним, что под α можно понимать любой из углов $\beta_i, \beta_\gamma, \psi$ или их косинус (или любую функцию одного из этих углов), а правая часть (3.6), (3.6⁹) берется при $\alpha = \alpha_{extz}$.

Формула (3.6) приближенная, и дает лишь оценку числа частиц в наиболее вероятных направлениях. В приложении 5 приведено сопоставление цифр, даваемых (3.6) с цифрами, полученными из точных формул. Из сопоставления видно, что интервал углов, в котором приближенные формулы дают приемлемую для практики точность, порою довольно велик. К сожалению, оценка точности по (3.6⁹) весьма громоздка из-за сложного вида $\bar{\alpha}''''$ и $\bar{\alpha}''$.

Перейдем к детализации (3.1) и (3.6) для конкретных случаев.

А. Угол вылета. Точная формула. Количество частиц в интервале от μ'_i до μ''_i вычисляется по (2.11) или (2.12) интегрированием от μ'_i до μ''_i . Проще пользоваться все же формулой (3.1), если есть готовый график зависимости энергии E_i (или μ_i^*) от μ_i , снимая значения E_i (или μ_i^*) с графика и интегрируя численно. Наконец, если распределение в с.ц.м. изотропно и если энергия первичной частицы E_c настолько велика, что существует предельный угол вылета, то количество частиц в интервале от μ_i до $\mu_{i \max}$ определяется по (3.1) (см. черт. 3) длиной $AB = \Delta E_i$, т.е. разностью двух корней $E_i^{(1)}$ и $E_i^{(2)}$ из (1.8). Получается

$$\Delta n_{\mu_i, \mu_{i \max}} = \frac{m_c P_i^2 \mu_i}{P^* (E_c^2 - P_c^2 \mu_i^2)} \quad (3.7)$$

Приближенная формула. Пусть в (3.6) $\alpha \equiv \mu_i$. Тогда

$$(a + b E_i)_{\alpha = \alpha_{\max}} = -(E_c P^* / E_i^* P_c) = -\beta_i^* / v, \quad (3.8)$$

$$\bar{\mu}'' = m_c E_i^* / P_c \bar{P}_i^3, \quad (3.9)$$

$$\bar{\mu}''' = -6 m_i^2 E_c / P_c \bar{P}_i^5, \quad (3.10)$$

поэтому

$$\frac{dn}{\sqrt{|d\mu_i|}} = \frac{2}{P^* m_c E_i^{*2}} \sqrt{\frac{2 m_i^3}{P_c}} (E_c^2 m_i^2 - E_i^{*2} m_c^2)^{3/4} f(-\beta_i^* / v) \quad (3.11)$$

с погрешностью не более чем

$$\frac{4 m_i^3 E_c (E_c^2 m_i^2 - E_i^{*2} m_c^2)^{1/2}}{m_c^2 P^* E_i^{*3}} f(-\beta_i^* / v) |\mu_i - \mu_{i \max}|^{1/2} \quad (3.11^0)$$

Заметим, что при $E_c \rightarrow \infty$, $dn / \sqrt{|d\mu_i|}$ также $\rightarrow \infty$ как E_c , а ошибка растет как E_c^2 :

$$\frac{dn}{\sqrt{|d\mu_i|}} \sim \frac{2 \sqrt{2 m_i^3 m_c}}{P^* E_i^{*2}} f(-\beta_i^*) E_c + \frac{4 m_i^3 E_c^2}{m_c^2 P^* E_i^{*3}} f(-\beta_i^*) |\Delta \mu_i|^{1/2} \quad (3.12)$$

В. Угол разлета. Точная формула. Снова для подсчета числа

частиц в некотором интервале углов удобно использовать график

$E_i(\cos \psi)$ (если такой имеется) и формулу (3.1). Но если $m_i = m_j = m$

то удается привести и аналитические выражения. Из черт.5 следует,

что, если $\psi = \psi_1$, то $a + b E_i = b v N_1$. При подстановке в (3.1)

результат следует удвоить ввиду четности функции $\psi(E_i - \frac{1}{2} E_c)$.

В частности, для числа частиц в интервале от ψ до ψ_{\max}

если ψ_{\max} существует и $\psi < \psi_{\max}$, а также для числа частиц

в интервале от ψ до ψ_{\min} , если ψ_{\max} не существует

(см. черт.4)

$$\Delta n = 2 \int_0^{b v N_1} f(\xi) d\xi, \quad (3.13)$$

где B_{N_1} = радикал в (I.20) со знаком + при внутреннем корне.

Для $\psi_{\max} > \psi > \psi_{\min}$.

$$\Delta n = 2 \int_{B(AE-EM_1)}^{B(AE+EM_1)} f(\xi) d\xi, \quad (3.14)$$

где AE и EM_1 = радикалы в (I.22).

В частности, при изотропном распределении в с.ц.м. число частиц между данным и максимальным углом, если $\psi < \psi_{\min}$, равно

$$\Delta n_{\psi, \psi_{\max}} = \frac{m_c}{\rho_c \rho^*} \sqrt{\frac{E_c^2}{4} + m^2 - \frac{m_c^2}{2 \sin^2 \psi}} + \operatorname{ctg} \psi \sqrt{\frac{m_c^4}{4 \sin^2 \psi} - m^2 E_c^2}. \quad (3.15)$$

Эта же формула при малых энергиях ($E_c < m_c^2/2m$), когда существует лишь ψ_{\min} , дает число частиц между ψ и ψ_{\min} .

Если же $\psi_{\min} < \psi < \psi_{\max}$, то

$$\Delta n_{\psi, \psi_{\min}} = \frac{m_c \sqrt{2}}{\rho_c \rho^*} \sqrt{\frac{E_c^2}{4} + m^2 - \frac{m_c^2}{2 \sin^2 \psi} - \left(\frac{E_c^2}{4} - m^2\right) \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \psi_{\min}}{\sin^2 \psi}}}. \quad (3.16)$$

Число частиц между ψ_{\min} и ψ_{\max}

$$\Delta n_{\psi_{\min}, \psi_{\max}} = \frac{m_c}{4 \rho_c^2 \rho^{*2}} \sqrt{[(m_c^2 - 8m^2)E_c^2 + 4m_c^2 m^2][E_c^2 - 2(m_c^2 - 2m^2)]}. \quad (3.17)$$

В приложении 6 для реакции $\theta^0 \rightarrow 2\pi$ в предположении изотропии по (3.15)-(3.16) рассчитана зависимость от ψ числа частиц в промежутке от ψ до ψ_{\max} .

Приближенные оценки. Положим в (3.6) $\alpha \equiv \cos \psi$. Тогда (см. /I.45/) приближенно

$$a + b\bar{E}_i = b\alpha_i E_c, \quad (3.18)$$

$$\left(\frac{d^2 \cos \Psi}{dE_c^2} \right) = \frac{\cos \bar{\Psi} [m_c^2 + (E_c^2 - 6\bar{p}_i \bar{p}_j \cos \bar{\Psi} - 4q_c^2) \operatorname{tg}^2 \bar{\Psi}]}{\bar{p}_i^2 \bar{p}_j^2} \quad (3.19)$$

Отсюда следует

$$\frac{dn}{\sqrt{|d \cos \Psi|}} = \frac{2b\sqrt{2} \bar{p}_i \bar{p}_j f(b\alpha_i E_c)}{\sqrt{\cos \bar{\Psi} [m_c^2 + (E_c^2 - 6\bar{p}_i \bar{p}_j \cos \bar{\Psi} - 4q_c^2) \operatorname{tg}^2 \bar{\Psi}]}} \quad (3.20)$$

или еще иначе

$$\frac{dn}{\sqrt{|d\psi|}} = \frac{2b\sqrt{2} \bar{p}_i \bar{p}_j \sin \bar{\Psi} \cdot f(b\alpha_i E_c)}{\sqrt{\left(\frac{\bar{p}_j m_i^2}{\bar{p}_i^3} + \frac{\bar{p}_i m_j^2}{\bar{p}_j^3} + 2 \frac{\bar{E}_i \bar{E}_j}{\bar{p}_i \bar{p}_j} \right) \cos \bar{\Psi} - 2}} \quad (3.21)$$

Все величины в правой части берутся при $\Psi = \Psi_{\text{ext}\tau}$. В приложении 4 дан построенный по (3.21) график зависимости $\frac{dn}{\sqrt{|d\psi|}} \frac{1}{2f(b\alpha_i E_c)}$ от E_c в точках максимума Ψ . Из подобных графиков, зная вид функции f и задаваясь интервалом $d\psi$, можно легко определять процент частиц, идущих под предельным углом.

Если $E_c \gg m_i, m_j, m_c$ (энергия распадающейся частицы велика), то (3.20) можно привести к более простому виду, разложив переменные величины в правой части по степеням E_c^{-1} . Обозначив

$$\begin{aligned} k_i &= \varepsilon_i + \alpha_i = (E_i^*/m_c) + \alpha_i, \\ k_j &= \varepsilon_j + \alpha_j = (E_j^*/m_c) - \alpha_i, \end{aligned} \quad (3.22)$$

после преобразований получим

$$\left(\frac{dn}{E_c \sqrt{|d \cos \Psi|}} \right)_{\substack{\Psi = \Psi_{\text{ext}\tau} \\ E_c \rightarrow \infty}} \rightarrow \frac{2m_c \sqrt{2} k_i^2 k_j^2 f(b\alpha_i E_c)}{P^* \sqrt{k_i^2 k_j^2 m_c^2 + (1 - 6k_i k_j) [m_c^2 k_i k_j - (m_i^2 k_j + m_j^2 k_i)]}} \quad (3.23)$$

Из (3.20) или (3.13) можно получить для случая $m_i = m_j = m$ и приближенные формулы

$$\left(\frac{dn}{\sqrt{|d \cos \psi|}} \right)_{\psi = \psi_{\max}} = \frac{8(mE_c)^{3/2} (4m^2 E_c^2 - m^4)^{3/4}}{P_c P^* m_c^2 \sqrt{(m_c^2 - 8m^2) E_c^2 + 4m^2 m_c^2}} f\left(\frac{\sqrt{(m_c^2 - 8m^2) E_c^2 + 4m^2 m_c^2}}{2P_c P^*} \right) \quad (3.24)$$

$$\left(\frac{dn}{\sqrt{|d \cos \psi|}} \right)_{\psi = \psi_{\min}} = \frac{m_c \sqrt{2} (E_c^2 - 4m^2)^{3/2}}{2P_c P^* \sqrt{(m_c^2 - 8m^2) E_c^2 + 4m^2 m_c^2}} f(0), \quad (3.25)$$

откуда, между прочим, следует, что при $E_c \rightarrow \infty$ $dn/\sqrt{|d \cos \psi|}$ растет как E_c , причем число частиц в $(\psi_{\min}, \psi_{\max})$ стремится к постоянной величине $\sqrt{1 - (2m/P^*)^2}$.

Расчет статистики реакции, в которой регистрируются обе вторичные частицы и угол между ними, рекомендуется проводить следующим образом.

Найдя α_i по (I.43), вычисляют по (I.44) \tilde{E}_i -энергию вторичной частицы, соответствующую наиболее вероятному углу разлета, затем по (I.5), (I.6) угол разлета и положение счетчиков, и, наконец, по (3.20) $dn/\sqrt{|d \cos \psi|}$ вблизи наиболее вероятного угла. Затем, задавшись $d \cos \psi$, оценивают dn .

Следует отметить, что $\psi_{i \max} + \psi_{j \max} \neq \psi_{\max}$, т.е. при таком расположении счетчиков, когда количество регистрируемых пар частиц максимально, число частиц, проходящих через каждый из счетчиков, вовсе не максимально. И наоборот, если один из счетчиков поставить под предельным углом, чтобы в него попадало как можно больше частиц ψ , то другой счетчик, поставленный под углом ψ_j , определенным по (I.14), даст небольшое число отсчетов. Это объясняется тем, что $(d\mu_j/d\mu_i)_{\mu_{i \max}} = \infty$. При определении

наиболее выгодного расположения счетчиков следует это обстоятельство иметь в виду.

4. З а к л ю ч е н и е

В отчете дана сводка известных формул и графических методов, описывающих кинематику распада на две частицы в лабораторной системе. Выведены формулы, детально характеризующие распад на две частицы равной массы, и приближенные формулы для экстремальных углов при распаде на частицы неравной массы. Дан графический метод оценки количества частиц в данном интервале углов и энергий. Предлагается приближенная формула для оценки числа частиц, направленных под углами, близкими к наиболее вероятным. Следует подчеркнуть, что графический метод и пользование коэффициентом $dn/\sqrt{d\alpha}$ должны существенно облегчить прикидочные расчеты, неизбежные на первой стадии подготовки эксперимента. Заметим, что (I.44) может быть использовано для косвенных измерений энергии первичной частицы. Действительно при расположении счетчиков, дающем наибольшее число парных отсчетов вторичных частиц, энергия большинства вторичных частиц пропорциональна энергии первичных, с известным коэффициентом пропорциональности (см. по этому поводу также 4).

Л и т е р а т у р а

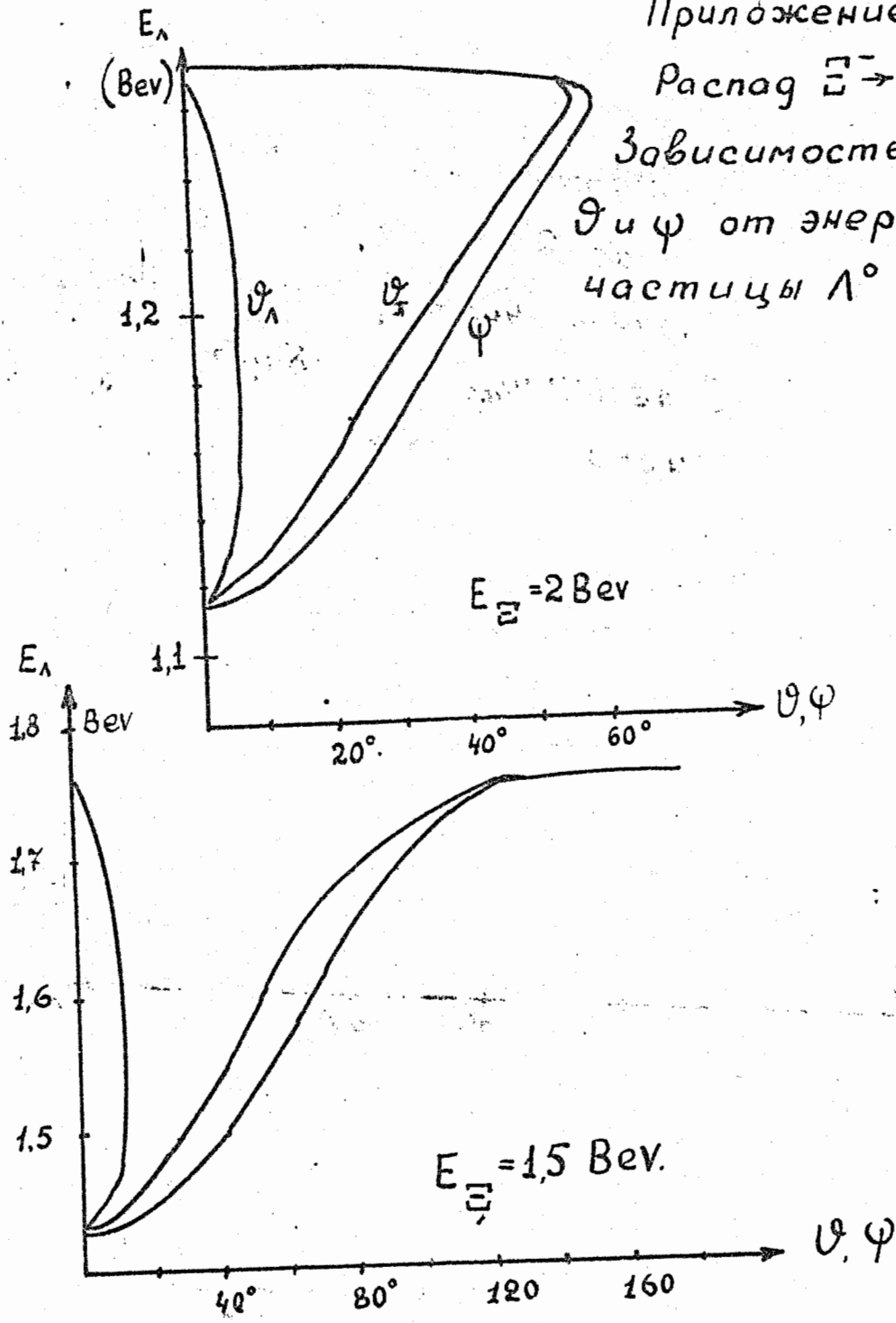
1. Розенталь И.Л., УФН, 54, в.3, 405 (1954).
2. Blaton J., Det Kgl. Vidensk. Selskab. Mat. - Fys. Medd., 24, n 20 (1950).
3. Sternheimer R.M., Phys. Rev., 93, 642 (1954).
4. Sternheimer R.M., Phys. Rev., 98, 205 (1955).

Приложение 1.

Распад $\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$

Зависимость углов

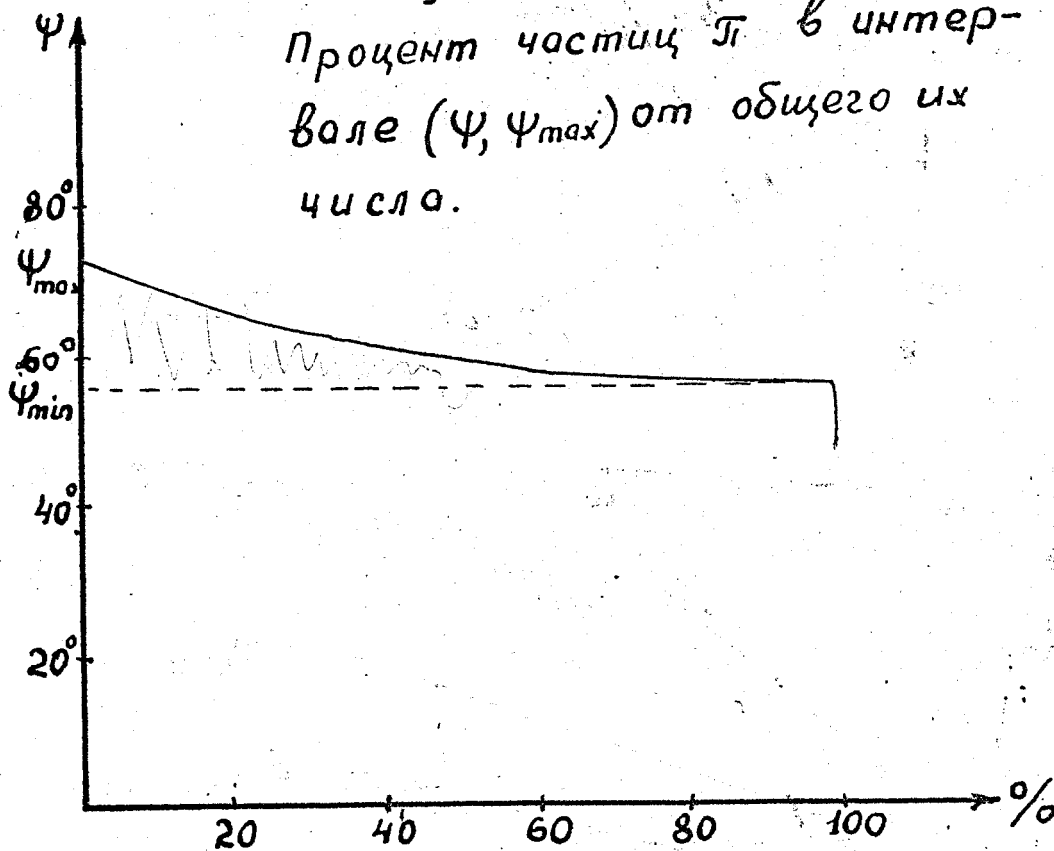
ϑ и φ от энергии частицы Λ^0



Приложение 2

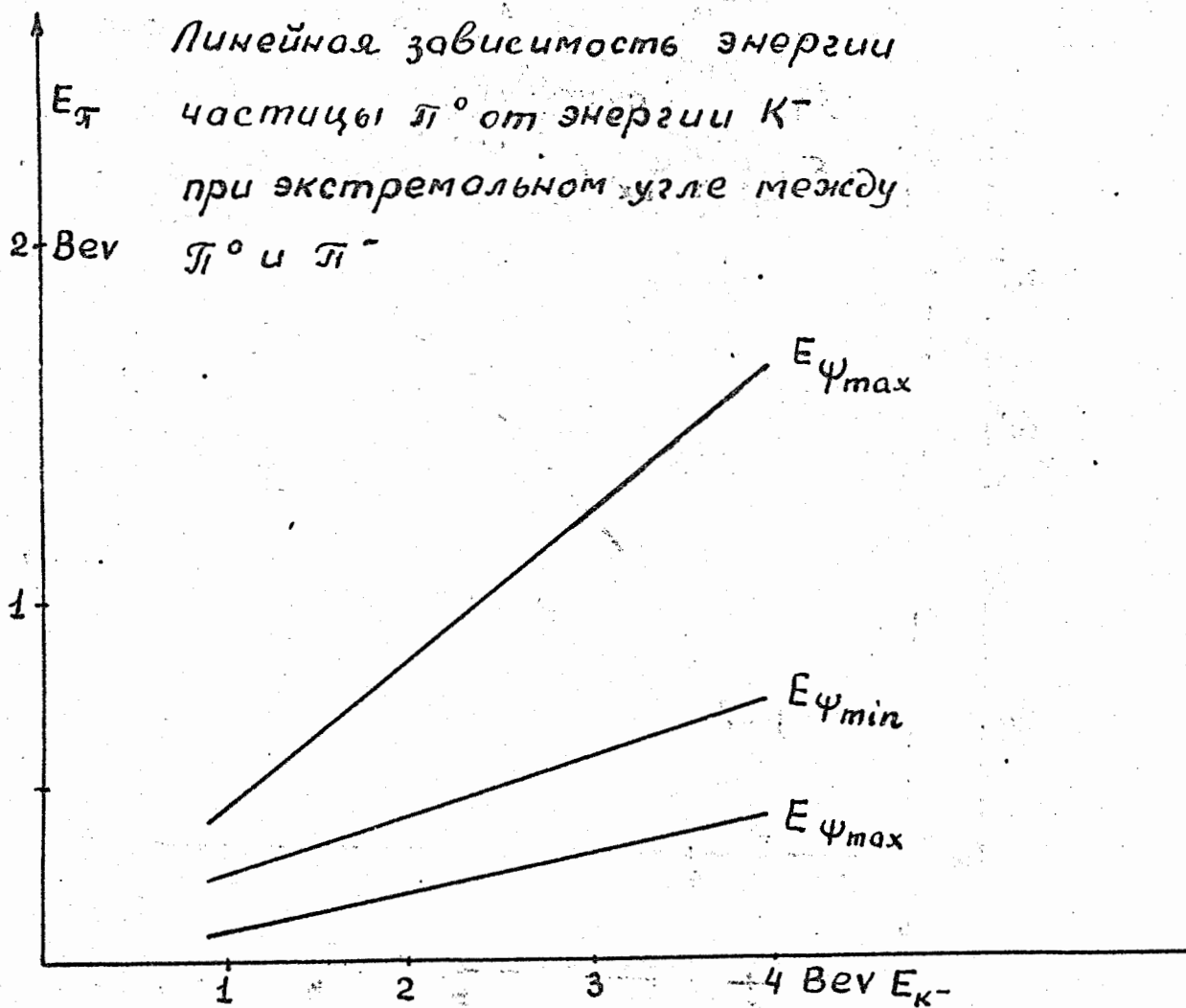
Распад $\theta^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$. $E_\theta = 0,9 \text{ BeV}$

Процент частиц π в интервале (ψ, ψ_{\max}) от общего их числа.

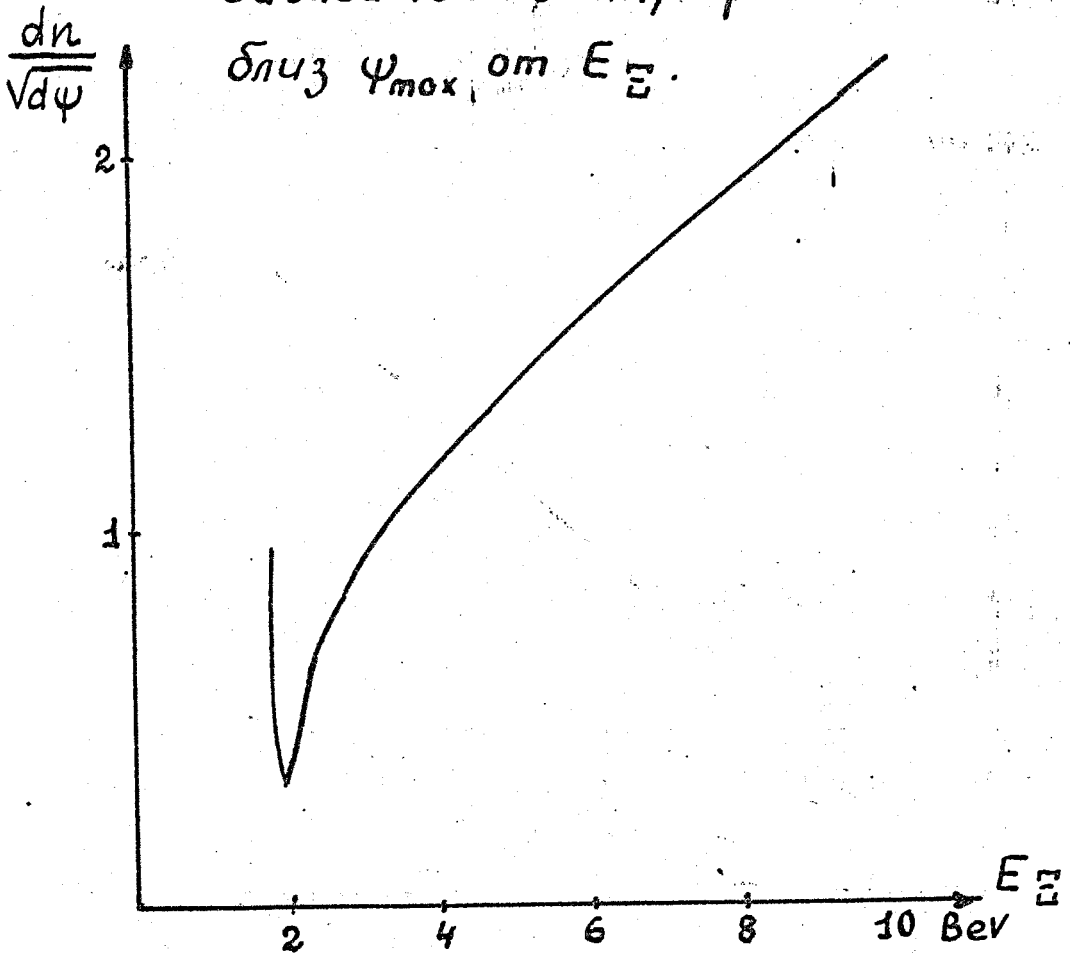


Приложение 3.

Распад $K^- \rightarrow \pi^- + \pi^0$



Приложение 4
Распад $\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$
Зависимость $\frac{dn}{\sqrt{d\psi}}$
близ ψ_{max} от E_{Ξ} .



ПРИЛОЖЕНИЕ 5.

Реакция $\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$; $E_{\Xi} = 2 \text{ Bev}$

Количество частиц в интервале от ϑ_{Λ} до $\vartheta_{\Lambda \max}$ или от ϑ_{π} до $\vartheta_{\pi \max}$

ϑ_{Λ}	$\Delta n_{\Lambda} = n_{\vartheta_{\Lambda \max}} - n_{\vartheta}$	Δn_{Λ} приблизж.
$6^{\circ}32'$	0	0
$6^{\circ}20'$	0,250	0,241
$6^{\circ}10'$	0,329	0,326
6°	0,388	0,394
$5^{\circ}40'$	0,492	0,502
5°	0,633	0,668
4°	0,783	0,858

ϑ_{π}	Δn_{π}	Δn_{π} приблизж.
$64^{\circ}30'$	0	0
64°	0,0197	0,019
63°	0,0358	0,033
62°	0,0486	0,043
60°	0,0715	0,057
55°	0,129	0,083
50°	0,193	0,103

Реакция $\theta^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$; $E_{\theta} = 0,9 \text{ Bev}$

Количество частиц в интервалах (ψ_{\max}, ψ) и (ψ, ψ_{\min})

$E_{\theta} = 0,9 \text{ Bev}$

ψ	$n_{\psi} - n_{\psi_{\min}}$	то же приблизж.
56°	0	0
57°	0,292	0,282
58°	0,414	0,382
59°	0,507	0,484
60°	0,586	0,551
65°	0,878	0,775

$E_{\theta} = 0,9 \text{ Bev}$

ψ	$n_{\psi_{\max}} - n_{\psi}$	то же приблизж.
$72^{\circ}19'$	0	0
70°	0,065	0,071
65°	0,219	0,126

$E_{\theta} = 3 \text{ Bev}$

$15^{\circ}28'$	0	0
$15^{\circ}30'$	0,094	0,102
$15^{\circ}40'$	0,273	0,270
$15^{\circ}50'$	0,383	0,366
$16^{\circ}0'$	0,468	0,441
$16^{\circ}06'$	0,520	0,482
$16^{\circ}16'$	0,600	0,541
$16^{\circ}26'$	0,697	0,594

$E_{\theta} = 3 \text{ Bev}$

$16^{\circ}36'$	0	0,00
$16^{\circ}26'$	0,192	0,181
$16^{\circ}16'$	0,290	0,256
$16^{\circ}06'$	0,369	0,314
16°	0,422	-

Приложение 6

