ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-1658

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Г. Десимиров, Д. Стоянов

О ПОСТРОЕНИИ КВАЗИПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ СПИНОРНЫХ ПОЛЕЙ

1964

Г. Десимиров, Д. Стоянов

Р-1658

О ПОСТРОЕНИИ КВАЗИПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ СПИНОРНЫХ ПОЛЕЙ

Направлено в "Известия на физическия институт на БАН"

Дубна 1964

§ 1. В работах [1,5] разработан квазиоптический подход для описания поведения двух частиц в теории поля с помощью двухвременной функции Грина. Основное уравненне теории имеет вид

$$[\tilde{g}(\vec{p},\vec{p}\,';E)]^{-1}\,\Psi(\vec{p}\,')=0, \tag{1}$$

где $\tilde{g}(\vec{p},\vec{p}\,';E)$ – двухвременная функция Грина, $\Psi(\vec{p})$ – волновая функция, которая в случае двух спинорных частиц является шестнадцатикомпонентным спинором. Квазипотенциал строится по формуле

$$V(\vec{p},\vec{p}\,';E)=[\tilde{g}_0(\vec{p},\vec{p}\,';E)]^{-1}-[\tilde{g}(\vec{p},\vec{p}\,';E)]^{-1}, \tag{2}$$

где $\tilde{g}_0(\vec{p},\vec{p}\,';E)$ – двухвремеиная функция Грина для голых частиц. При этом вместо уравнения (1) получается

$$[\tilde{G}_0(\vec{p},E)]^{-1}\,\Psi(\vec{p})=\int V(\vec{p},\vec{p}\,';E)\,\Psi(\vec{p}\,')\,d\vec{p}\,';\ ([\tilde{g}(\vec{p},\vec{p}\,';E)]^{-1}=[\tilde{G}(\vec{p},E)]^{-1}\delta(\vec{p}-\vec{p}\,')). \tag{3}$$

Полная функция Грина получается с помощью итерирования уравнения Бете–Сальпетера, которое можно записать символически

$$g=g_0+g_0K\,g. \tag{4}$$

Если преобразование Фурье записать в виде

$$\phi(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\phi(p)\,e^{ipx}\,d^4p, \tag{5}$$

тогда уравнение Бете–Сальпетера записывается в импульсном представлении (в котором проделаны все выкладки) в системе центра масс (СЦМ).

$$g(\vec{p},\vec{p}\,';p_0,q_0,p_0',q_0')=(2\pi)^8\,g_0(p;p_0,q_0)\,\delta(\vec{p}-\vec{p}\,')\delta(p_0-p_0')\delta(q_0-q_0')+$$
$$+(2\pi)^{-8}\,(g_0Kg_0)(\vec{p},\vec{p}\,';p_0,q_0,p_0',q_0'). \tag{6}$$

После итерирования (4) и проведения двухвременной операции, получаем

$$\tilde{g}=\tilde{g}_0+\widetilde{g_0Kg_0}+\widetilde{g_0Kg_0Kg_0}+\dots \tag{7}$$

Из-за необходимости нахождения $[\tilde{g}]^{-1}$ в рамках теории возмущений полагаем, что оператор $\tilde{g}_0$ не является особым и тогда можно пользоваться функциональным разложением (2, 11) работы [1]

$$[\tilde{g}]^{-1}=[\tilde{g}_0]^{-1}-[\tilde{g}_0]^{-1}(\widetilde{g_0Kg_0})[\tilde{g}_0]^{-1}+\dots, \tag{8}$$

которое позволяет построить квазипотенциал в виде ряда теории возмущений.

Однако для спинорных полей получается, что оператор $\tilde{g}_0$ является особым.

Поскольку нет указаний, что оператор $[\tilde{g}]^{-1}$ не существует, то общее уравнение (1) в этом случае не теряет смысла. То же относится и к понятию квазипотенциала, однако, возникает вопрос, можно ли его найти методом теории возмущений в виде ряда по положительным степеням константы связи. Такое допущение формально приводит к противоречию. В дальнейшем мы стремимся рассмотреть преимущественно этот вопрос. На ба- На базе детального исследования особенности $\tilde{g}_0$ все же возможно продвинуться довольно далеко в вопросе построения квазипотенциала по теории возмущений, а также схемы квазиоптического подхода для задач, в которых запаздывающие эффекты малы в сравнении с мгновенным взаимодействием.

Можно заметить, что аналогичная ситуация получается и в случае векторных полей. Как и в случае спинорных полей, двухвременная операция приводит к этой особенности из-за матричной структуры грииновых функций голых частиц, что не имеет места в случае скалярного поля.

§ 2. В дальнейшем мы будем иметь в виду только случай двух взаимодействующих спинорных полей с одинаковой массой. Для двухвременной функции Грина голых частиц в с.ц.м. вводится обозначение

$$\tilde{g}_0(\vec{p}\ \vec{p}' p_0 p_0') = \tilde{G}_0(\vec{p}, E)\,\delta(\vec{p}-\vec{p}')\,\delta(p_0-p_0'), \tag{9}$$

где $\tilde{G}_0(\vec{p}, E)$ обозначает матрицу.

$$\tilde{G}_0(\vec{p}, E) = \frac{i\pi}{2F(\vec{p})\,[E^2-F^2(\vec{p})]}\,\{[E^2-F^2(\vec{p})]-(E+\vec{\alpha}\vec{p}+\beta m)_1(E-\vec{\alpha}\vec{p}+\beta m)_2\}, \tag{10}$$

где $E=\frac{p_0}{2}$, $F(\vec{p})=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$, $\vec{\alpha}$ и β – дираковские матрицы в общепринятых обозначениях. Индексы 1 и 2 относятся к совокупности спинорных индексов, соответствующих первой и второй частицам. Вместо отсутствующих индексов всегда подразумевается наличие соответствующей единичной матрицы, которая явно не будет выписываться.

Для выяснения особенностей матрицы $\tilde{G}_0(\vec{p}, E)$ удобно ввести операторы проектирования Казимира

$$\Lambda^+(\vec{p}) = \frac{F(\vec{p})+H(\vec{p})}{2F(\vec{p})}\ ; \qquad \Lambda^-(\vec{p}) = \frac{F(\vec{p})-H(\vec{p})}{2F(\vec{p})}, \tag{11}$$

где $H(\vec{p})=\vec{\alpha}\,\vec{p}+\beta m$.

В таком случае $\tilde{G}_0(\vec{p}, E)$ представляется в виде

$$\tilde{G}_0(\vec{p}, E) = \frac{i\pi}{F^2(\vec{p})-E^2}\,\{[E+F(\vec{p})]\,\Lambda_1^+(\vec{p})\,\Lambda_2^+(-\vec{p})-[E-F(\vec{p})]\,\Lambda_1^-(\vec{p})\,\Lambda_2^-(-\vec{p})\}. \tag{12}$$

Отсюда видно, что будут выполняться следующие равенства

$$\tilde{G}_o(\vec{p},E)\,\Lambda_1^+(\vec{p})\,\Lambda_2^-(-\vec{p}) = \tilde{G}_o(\vec{p},E)\,\Lambda_1^-(\vec{p})\,\Lambda_2^+(-\vec{p}) = 0 \qquad (13)$$

$$\Lambda_1^+(\vec{p})\,\Lambda_2^-(-\vec{p})\,\tilde{G}_o(\vec{p},E) = \Lambda_1^-(\vec{p})\,\Lambda_2^+(-\vec{p})\,\tilde{G}_o(\vec{p},E) = 0. \qquad (14)$$

Из этих равенств следует, что $\tilde{G}_o(\vec{p},E)$ является матрицей особой, так как результат ее умножения на ненулевую матрицу (например, $\Lambda_1^+(\vec{p})\,\Lambda_2^-(-\vec{p})$) равняется нулю. Дальше введем известное представление шестнадцатикомпонентных спиноров

$$\phi(\vec{p}) = \phi^{++}(\vec{p}) + \phi^{+-}(\vec{p}) + \phi^{-+}(\vec{p}) + \phi^{--}(\vec{p}), \qquad (15)$$

где положено

$$\phi^{++}(\vec{p}) = \Lambda_1^+(\vec{p})\,\Lambda_2^+(-\vec{p})\,\phi(\vec{p}); \quad \phi^{+-}(\vec{p}) = \Lambda_1^+(\vec{p})\,\Lambda_2^-(-\vec{p})\,\phi(\vec{p}) \quad \text{и т.д.} \qquad (16)$$

Еще введем обозначение

$$\phi(\vec{p}) = \phi^{(+)}(\vec{p}) + \phi^{(-)}(\vec{p}), \qquad (17)$$

где

$$\phi^{(+)}(\vec{p}) = \phi^{++}(\vec{p}) + \phi^{--}(\vec{p}); \qquad \phi^{(-)}(\vec{p}) = \phi^{+-}(\vec{p}) + \phi^{-+}(\vec{p}).$$

Пусть в дальнейшем Φ означает пространство всех шестнадцатикомпонентных функций ϕ, $\Phi^{(+)}$ и $\Phi^{(-)}$ – пространства функций, для которых $\phi^{(-)}=0$ и $\phi^{(+)}=0$, соответственно. Тогда равенства (12) и (13) означают, что

$$\tilde{G}_o(\vec{p},E)\,\phi(\vec{p}) = 0, \quad \text{если} \quad \phi(\vec{p}) \in \Phi^{(-)}$$

и для всех $\phi \in \Phi$, $\tilde{G}_o(\vec{p},E)\,\phi(\vec{r}) = \Psi(\vec{p}) \in \Phi^{(+)}$. Эти свойства означают, что операцией $\tilde{G}_o(\vec{p},E)$ пространство Φ отображается на пространство $\Phi^{(+)}$, т.е. оператор $\tilde{G}_o(\vec{p},E)$ является проекционным оператором. Также видно, что пространство $\Phi^{(+)}$ инварнантно относительно оператора $\tilde{G}_o$, и в этом пространстве он не является уже особым. Действительно, для всех спиноров $\phi \in \Phi^{(+)}$ выполняется условие

$$[\Lambda_1^+(\vec{p})\,\Lambda_2^+(-\vec{p}) + \Lambda_1^-(\vec{p})\,\Lambda_2^-(-\vec{p})]\,\phi(\vec{p}) = \phi(\vec{p}). \qquad (18)$$

Если обозначить через $\overline{G}_o(\vec{p},E)$ операцию, эквивалентную $\tilde{G}_o(\vec{p},E)$ и индуцированную ею в $\Phi^{(+)}$, можно написать

$$\overline{G}_o(\vec{p},E)\,\Phi(\vec{p}) = \tilde{G}_o(\vec{p},E)\,\phi(\vec{p}) \quad \text{для всех} \quad \phi(\vec{p}) \in \Phi^{(+)}. \qquad (19)$$

Тогда из (12) и (18) легко получить

$$\overline{G}_o(\vec{p},E) = \frac{i\pi}{F^2(\vec{p}) - E^2}\,\{\, E[\Lambda_1^+(\vec{p})\,\Lambda_2^+(-\vec{p}) - \Lambda_1^-(\vec{p})\,\Lambda_2^-(-\vec{p})] + F(\vec{p})\,\}. \qquad (20)$$

Теперь можно заметить, что эта матрица уже не особая, следовательно, оператор $\tilde{G}_o(\vec{p},E)$ в пространстве $\Phi^{(+)}$ не является особым, и обратный ему дается с помощью матрицы

$$[\overline{G}_0(\vec{p},E)]^{-1}=\frac{i}{\pi\; F(\vec{p})}\{[E^2-F^2(\vec{p})]-E[E-F(\vec{p})]\Lambda_1^+(\vec{p})\Lambda_2^+(-\vec{p})-E[E+F(\vec{p})]\Lambda_1^-(\vec{p})\Lambda_2^-(-\vec{p})\} \tag{21}$$

Для полной двухвременной функции Грина сделаем следующие замечания. Через Φ^* обозначим пространство всех функций $\phi^*=\tilde{g}\phi\ /\phi\quad\Phi/$ Пространство Φ^*, очевидно, является инвариантным относительно операции $\tilde{g}$ и только в нем задача об отыскании $[\tilde{g}]^{-1}$ имеет смысл. При этом вполне естественно рассматривать и операцию $\tilde{g}$ только в Φ^*. Такой подход вполне соответствует смыслу функции Грина как функции распространения в теории поля и не является дополнительным требованием в теории. Если у $\tilde{g}$ нет проектирующих свойств, или пространство Φ^* шире, чем $\Phi^{(+)}$, тогда в Φ^* оператор $\tilde{g}_0$ будет особым, и потенциал невозможно построить в виде ряда только по неотрицательным степеням константы связи. В случае $\Phi^*\subseteq\Phi^{(+)}$ у оператора $\tilde{g}_0$ особенности не будет и квазипотенциал уже можно строить по теории возмущений. Этот вопрос необходимо предварительно выяснить в каждой рассматриваемой задаче, а потом строить основное уравнение теории.

§ 3. Рассмотрим случай мгновенного взаимодействи. Как хорошо известно из работ Бете и Сальпетера, Сальпетера /6,7/ и других, в задачах электродинамики оно дает само по себе довольно хорошее приближение и является основным. В рамках квазиоптического подхода оказывается, что этот случай можно рассмотреть точно. Как известно, ядро уравнения Бете-Сальпетера в случае мгновенного взаимодействия зависит только от пространственных импульсов и в системе центра масс имеет вид

$$K_{\text{с.ц.м.}}(p,q;p'q')=K(\vec{p},\vec{p}\,'). \tag{22}$$

В таком случае нетрудно проверить, что двухвременная операция в p -представлении является мультипликативной, т.е.

$$\widetilde{g_0 K\; g_0 K\; \dots\; K g_0}=\tilde{g}_0 K\;\tilde{g}_0 K\dots K\;\tilde{g}_0 \tag{23}$$

и полная функция Грина, построенная в виде итерированного уравнения Бете-Сальпетера, имеет ту же самую особенность, что и $\tilde{g}_0$, т.е. $\Phi^*\equiv\Phi^{(+)}$. У оператора $\tilde{g}_0$ особенности не будет, и, имея в виду формулу (18), полную двухвременную функцию Грина получим в виде

$$\tilde{g}=\overline{g}_0+\tilde{g}_0 K\overline{g}_0+\tilde{g}_0 K\tilde{g}_0 K\;\overline{g}_0+\dots \tag{24}$$

Дальше нетрудно найти, что квазипотенциал равняется

$$V=[\overline{g}_0]^{-1}-[\tilde{g}_0]^{-1}=[\overline{g}_0]^{-1}\tilde{g}_0 K, \tag{25}$$

а основное уравнение квазиоптического подхода получается в форме

$$\frac{1}{i\pi\; F(\vec{p})}\{E[E+F(\vec{p})]\Lambda_1^-(\vec{p})\Lambda_2^-(-\vec{p})-E[E+F(\vec{p})]\Lambda_1^+(\vec{p})\Lambda_2^+(-\vec{p})+F^2(\vec{p})-E^2\}\Psi(\vec{p})=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}[\Lambda_1^+(\vec{p})\Lambda_2^+(-\vec{p})+\Lambda_1^-(\vec{p})\Lambda_2^-(\vec{p})]\int K(\vec{p},\vec{p}\,')\Psi(\vec{p}\,')d\vec{p}\,'. \tag{26}$$

Наличие проекционных операторов в правой части этого уравнения позволяет показать, что действительно все решения этого уравнения $\Psi(\vec{p}) \in \Phi^{(+)}$, как и должно быть. Уравнение (26) тогда нетрудно привести к следующему виду

$$[2E - H_1(\vec{p}) - H_2(-\vec{p})]\,\Psi(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^7}\,[\Lambda_1^-(\vec{p})\,\Lambda_2^-(-\vec{p}) - \Lambda_1^+(\vec{p})\,\Lambda_2^+(-\vec{p})] \int K(\vec{p},\vec{p}\,')\;\Psi(\vec{p}\,')\,d\vec{p}\,'. \qquad (27)$$

Это уравнение выведено Сальпетером в /6/ для того же случая мгновенного взаимодействия и в этом приближении результаты квазиоптического и старого подхода совпадают, так как при выводе (26) не использовались упрощающие предположения.

§ 4. Рассмотрим случаи, в которых не пренебрегается запаздывающими эффектами. Как известно из работ /6,7/ и других, в задачах электродинамики эти эффекты малы и в теории Сальпетера, исходя из уравнения (27), их учитывают в качестве возмущений к основному мгновенному взаимодействию, притом их учет имеет несколько искусственный характер. В рамках квазиоптического подхода можно проверить, что эти эффекты не позволяют точно рассматривать задачу для спиноров, принадлежащих только $\Phi^{(+)}$. В задачах, в которых эти эффекты малы в сравнении с мгновенным взаимодействием, неразумно полагать, что они приводят к необходимости учитывания особенности $\tilde{g}_0$, тем более известно, что для таких задач их можно учесть как возмущения в том же самом уравнении (27). Более естественно считать, что свойство $\tilde{g}$ проектировать Φ на $\Phi^{(+)}$ в случае мгновенного взаимодействия выполняется и в этом случае, однако, это уже будет приближением, которое для рассматриваемого класса задач должно быть достаточно хорошим. Это позволяет в рамках нашего подхода получить основное уравнение теории и построить квазипотенциал по теории возмущений, при этом запаздывающие эффекты учитываются и содержатся заранее в получаемом уравнении.

Рассмотрим проектирующие свойства $\tilde{g}$ в случае малых запаздывающих эффектов. Если положить снова $\Psi = g\,\phi$, с помощью (16), (17), для $\phi \in \Phi^{(+)}$ получаем равенства

$$\Psi^{(+)} = \bar{g}\,\phi^{(+)} \qquad\qquad \Psi^{(-)} = \bar{\bar{g}}\,\phi^{(+)}, \qquad (28)$$

где

$$\bar{g} = [\Lambda_1^+(\vec{p})\;\Lambda_2^+(-\vec{p}) + \Lambda_1^-(\vec{p})\;\Lambda_2^-(-\vec{p})]\,\tilde{g} \qquad (29)$$

$$\bar{\bar{g}} = [\Lambda_1^+(\vec{p})\;\Lambda_2^-(-\vec{p}) + \Lambda_1^-(\vec{p})\;\Lambda_2^+(-\vec{p})]\;\tilde{g}\,. \qquad (30)$$

При этом полагаем, что везде, где это возможно, использовалась формула (18). Теперь нетрудно проверить, что элементы $\bar{\bar{g}}$ малы по ряду причин. Во-первых, видно, что в $\overline{\overline{g}}$ уничтожаются все члены мгновенного взаимодействия, это устанавливается из формул (12), (14) и (23). Также уничтожаются некоторые из поправочных членов, например, если разложить ядро K уравнения Бете–Сальпетера на мгновенную и запаздывающие части

$$K = K_м + K_з ,$$

то общий член ряда (7) представляется в виде суммы членов вида

$$\overbrace{g_0 K_{\alpha_1} g_0 K_{\alpha_2} \dots K_{\alpha_n} g_0} ,$$

где K_{α_i} равняется $K_м$ или $K_з$. Все члены, в которых $K_{\alpha_i} = K_м$, заведомо уничтожаются. В связи с этим можно считать, что действительно в рассматриваемых задачах интересующее нас проектирующее свойство приблизительно выполняется

$$\overline{\overline{g}} = 0 ; \qquad \Psi^{(-)} = 0 \tag{31}$$

и в этом приближении мы будем работать в дальнейшем. В этом случае мы можем снова ограничить наши рассмотрения в пространстве $\Phi^{(+)}$. Основное уравнение теории будет

$$[\overline{g}]^{-1} \Psi = 0 , \tag{32}$$

где введено обозначение

$$\overline{g} = \overline{g_0} + \overline{g_0 K g_0} + \overline{g_0 K g_0 K g_0} + \dots \tag{33}$$

Квазипотенциал сразу можно строить в виде ряда, вполне аналогичного (8), исходя сейчас из определения

$$V = [\overline{g_0}]^{-1} - [\overline{g}]^{-1} . \tag{34}$$

Как легко заметить, выполняются условия

$$\begin{gathered} \Lambda_1^{+}(\vec{p})\, \Lambda_2^{-}(-\vec{p})\, V(\vec{p}, \vec{p}\,'; E) = 0 \\ \Lambda_1^{-}(\vec{p})\, \Lambda_2^{+}(-\vec{p})\, V(\vec{p}, \vec{p}\,'; E) = 0 . \end{gathered} \tag{35}$$

Основное уравнение квазипотенциального подхода теперь получает вид

$$\begin{gathered} \frac{i}{\pi F(\vec{p})} \{E^2 - F^2(\vec{p}) - E[E - F(\vec{p})]\Lambda_1^{+}(\vec{p})\Lambda_2^{+}(-\vec{p}) - E[E + F(\vec{p})]\Lambda_1^{-}(\vec{p})\Lambda_2^{-}(-\vec{p})\}\Psi(\vec{p}) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \int V(\vec{p}, \vec{p}\,'; E)\, \Psi(\vec{p}\,')\, d\vec{p}\,' . \end{gathered} \tag{36}$$

Из (31), (35) следует, что решения $\Psi(\vec{p})$ этого уравнения принадлежат $\Phi^{(+)}$, как и должно быть, что позволяет привести это уравнение к виду

$$\begin{gathered} [2E - H_1(\vec{p}) - H_2(-\vec{p})]\, \Psi(\vec{p}) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} [\Lambda_1^{-}(\vec{p})\Lambda_2^{-}(-\vec{p}) - \Lambda_1^{+}(\vec{p})\Lambda_2^{+}(-\vec{p})] \int V(\vec{p}, \vec{p}\,'; E)\Psi(\vec{p}\,')\, d\vec{p}\,' . \end{gathered} \tag{37}$$

Вероятно, для практических целей также будет удобно ввести представление в виде суммы мгновенной части, не зависящей от энергии, и запаздывающей, зависящей от нее, т.е.

$$V(\vec{p},\vec{p}\,';E) = V(\vec{p},\vec{p}\,') + W(\vec{p},\vec{p}\,';E)$$

и рассматривать W как возмущение к V в этом уравнении.

Если запаздывающие эффекты не малы, то в таком случае сомнительно, что можно избежать особенности $\tilde{q}_0$. Тогда можно попытаться снова провести рассмотрение задачи только в спинорном пространстве $\Phi^{(+)}$, т.е. пользуясь уравнением (37). В этом случае у нас нет соображений, что это точное или приближенное уравнение квазиоптического подхода. Ввиду максимального характера пространства $\Phi^{(+)}$ относительно возможности построения квазипотенциала по теории возмущений оно будет выражать такое требование, дополнительно накладываемое на теорию.

Авторы выражают благодарность А.Хелашвили и В.Гургенидзе за полезные обсуждения и дискуссии, И.Петкову и А. Обретенову за многочисленные дискуссии по ходу работы, а также Р.Фаустову и участникам семинара ЛТФ за полезное обсуждение работы.

Литература

1. A.A.Logunov and A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, N2 (1963).
2. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze, et al. Nuovo Cim. 30, No.1 (1963).
3. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze and O.A.Khrustalev. Phys. Lett. 4, No.6 (1963).
4. Б.А.Арбузов, А.А.Логунов и др. Препринт ОИЯИ Р-1318, Дубна (1963).
5. Р.Н.Фаустов. Препринт ОИЯИ Р-1572, Дубна (1964).
6. E.E.Salpeter. Phys.Rev. 87, No.2 (1952).
7. E.E.Salpeter. and H.A.Bethe. Phys. Rev. 84, No. 6, 1232 (1951).

Рукопись поступила в издательский отдел
28 апреля 1964 г.