ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-1652

В.Г. Маханьков, В.И. Шевченко

КВАЗИЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ АПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПУЧКА С ПЛАЗМОЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1964

В.Г. Маханьков, В.И. Шевченко

Р-1652

КВАЗИЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ АПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПУЧКА С ПЛАЗМОЙ

Направлено в Nuclear Fusion

Дубна 1964

Резюме

В работах[1,2] было указано, что дисперсионное уравнение для волн, не удовлетворяющих черенковскому условию (т.е. $\vec{k}\vec{u} \ll \omega$, где $\vec{k}$ - волновой вектор, $\vec{u}$ - направленная скорость пучка, ω - частота), в системе пучок-плазма может иметь нарастающие во времени решения. При этом, как оказалось, действительная часть частоты равна нулю (с точностью до учитываемых членов в разложении тензора диэлектрической проницаемости), поэтому в дальнейшем неустойчивости подобного типа мы будем называть апериодическими.

В работе[2] в линейном приближении были исследованы апериодические неустойчивости для самых различных значений величин, входящих в задачу (как-то: скорости пучка $\vec{u}$, температур и плотностей ионов и электронов в пучке и плазме $T_{e,i;1,2}, N_1, N_2$, частоты ω и волнового вектора $\vec{k}$). Однако для того, чтобы подчеркнуть характер рассматриваемых неустойчивостей, связанных только с анизотропией функции распределения частиц по скоростям, параметры выбирались таким образом, чтобы антиэрмитовой частью тензора диэлектрической проницаемости можно было пренебречь. При этом утверждалось, что рассматриваемые неустойчивости носят чисто гидродинамический характер и целиком определяются эрмитовой частью тензора диэлектрической проницаемости. В связи с этим, естественно, что рассмотренный тип апериодических неустойчивостей имеет место в том случае, когда направленная скорость пучка превышает тепловую скорость хотя бы одной из компонент системы пучок-плазма. Цель настоящей работы - исследовать влияние антиэрмитовой части тензора диэлектрической проницаемости в той области частот, волновых векторов и макроскопических параметров задачи, где существенна пространственная дисперсия. Оказывается, что учет мнимой части тензора диэлектрической проницаемости приводит к тому, что неустойчивости апериодического типа появляются и в том случае, когда скорость пучка меньше тепловых скоростей всех компонент системы. При этом, однако, изменение знака у мнимой части тензора определяется целиком эрмитовой частью.

Во второй части работы определяется изменение температуры и направленной энергии пучка и плазмы при исследуемых неустойчивостях. Обычный "квазилинейный" метод (см.[3-5]) в данном случае не применим, поскольку действительная часть частоты ω' обращается в нуль. В [6] развит метод, позволяющий определить изменение параметров "фона" в результате развития апериодических неустойчивостей и применимый в том случае, когда отклонение исходных параметров от критических, при которых возникает неустойчивость, невелико. В настоящей работе мы применим этот метод к апериодическим неустойчивостям, возникающим при взаимодействии пучка с плазмой.

1. При взаимодействии пучка заряженных частиц с плазмой в отсутствие внешнего магнитного поля, как было отмечено выше, кроме электростатических неустойчивостей возможно возникновение неустойчивости поперечных электромагнитных волн с волновым вектором, перпендикулярным направленной скорости пучка. Полагая $|\omega| \gg \vec{k}\,\vec{u}$, получим дисперсионное уравнение коллективных движений

$$\epsilon_{11}\left(\epsilon_{33} - \frac{k^2c^2}{\omega^2}\right) - \epsilon_{13}^2 = 0, \tag{1.1}$$

где

$$\epsilon_{11} = 1 + \sum_a \frac{4\pi e^2}{m_a}\frac{1}{k}\int \frac{1}{\omega_k - k v_x}\frac{\partial f_0^{(a)}}{\partial v_x}\, d\vec{v},$$

$$\epsilon_{33} = 1 + \sum_a \frac{4\pi e^2}{m_a}\frac{1}{\omega_k^2}\int \left(\frac{k v_z^2}{\omega_k - k v_x}\frac{\partial f_0^{(a)}}{\partial v_x} - f_0^{(a)}\right) d\vec{v},$$

$$\epsilon_{13} = \sum_a \frac{4\pi e^2}{m_a \omega_k}\int \frac{v_z}{\omega_k - k v_x}\frac{\partial f_0^{(a)}}{\partial v_x}\, d\vec{v},$$

$a = 1,2$ – относится соответственно к пучку и плазме; $\vec{k} = (k,0,0)$ – волновой вектор, характеризующий колебания, ω_k – частота, $\vec{u} = (0,0,u)$.

Будем искать решение дисперсионного уравнения (1.1) в предположении, что $k^2 v_T^{(1)2} \gg |\omega_k|^2$; $k^2 v_T^{(2)2} \ll |\omega_k|^2$. При этом оказывается, что

$$\frac{|\epsilon_{13}|^2}{|\epsilon_{11}\epsilon_{33}|} \approx \frac{N_1}{N_2}\,\frac{m u^2}{m u^2 + T_{\parallel}^{(1)} - T_{\perp}^{(1)}}\,\frac{|\omega_k|^2}{k^2 \frac{T_{\perp}^{(1)}}{m}} \ll 1, \tag{1.2}$$

если плотность пучка не слишком превосходит плотность плазмы. Поэтому в дальнейшем можно ограничиться исследованием дисперсионного уравнения коллективных движений, у которых вектор электрического поля параллелен $\vec{u}$, $(\vec{E} \parallel \vec{u})$

$$\frac{k^2c^2}{\omega_k^2} - \epsilon_{33} = 0. \tag{1.3}$$

Второе уравнение $\epsilon_{11} = 0$ неустойчивых решений не имеет, что вполне естественно, так как в этом случае $\vec{E} \perp \vec{u}$ и пучок на поле влияния не оказывает.

Сохраняя в (1.3) только члены, линейные по $\omega_k / k v_T^{(1)}$, получим для ω следующее выражение:

$$\omega_k = i\,\frac{k}{\pi}\cdot\frac{\frac{4\pi e^2}{m}\int (v_z^2/v_x)(\partial f_0^{(1)}/\partial v_x)\, d\vec{v} + k^2c^2 + \Omega_1^2 + \Omega_2^2}{\frac{4\pi e^2}{m}\int v_z^2 (\partial^2 f_0^{(1)}/\partial v_x^2)_{v_x=0}\, dv_y\, dv_z}, \tag{1.4}$$

Ω_1 и Ω_2 – ленгмюровские частоты пучка и плазмы соответственно.

Неустойчивость возникает при

$$-\frac{4\pi e^2}{m}\int \frac{v_z^2}{v_x}\frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial v_x}\, d\vec{v} > k^2c^2 + \Omega_1^2 + \Omega_2^2.$$

Условие $k v_T \gg \gamma_k$ выполняется при

$$Y = \frac{\frac{4\pi e^2}{m}\int \frac{v_z^2}{v_x}\frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial v_x} d\vec{v} + k^2c^2 + \Omega_1^2 + \Omega_2^2}{\frac{4\pi e^2}{m}\int \frac{v_z^2}{v_x}\frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial v_x} d\vec{v}} \ll 1 .$$

Если функция распределения частиц пучка имеет вид

$$f_o^{(1)} = \frac{m}{2\pi T_\perp^o}\left(\frac{m}{2\pi T_{||}^o}\right)^{1/2} e^{-\frac{m(v_z-u)^2}{2T_{||}^o} - \frac{m(v_x^2+v_y^2)}{2T_\perp^o}} , \qquad (1.5)$$

то инкремент нарастания

$$\gamma_k = k\left(\frac{T_\perp^o}{m}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\frac{\Omega_1^2\frac{mu^2+T_{||}^o}{T_\perp^o} - k^2c^2 - \Omega_1^2 - \Omega_2^2}{\Omega_1^2\frac{mu^2+T_{||}^o}{T_\perp^o}} \qquad (1.6)$$

и условие возбуждения сводится к

$$\Omega_1^2\frac{mu^2+T_{||}^o}{T_\perp^o} - k^2c^2 - \Omega_1^2 - \Omega_2^2 > 0 .$$

Максимальное значение инкремента достигается при

$$k_0^2 = \frac{1}{3c^2}\left(\Omega_1^2\frac{mu^2+T_{||}^o}{T_\perp^o} - \Omega_1^2 - \Omega_2^2\right) \qquad (1.7)$$

и равно

$$\gamma_{k\,max} = k\left(\frac{T_\perp^o}{m}\right)^{1/2}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\frac{\Omega_1^2\frac{mu^2+T_{||}^o}{T_\perp^o} - \Omega_1^2 - \Omega_2^2}{\Omega_1^2\frac{mu^2+T_{||}^o}{T_\perp^o}} . \qquad (1.8)$$

Условие $k\left(\frac{T_\perp^o}{m}\right)^{1/2} >> \gamma_k$ выполняется при

$$Y^* = \frac{\Omega_1^2\left(\frac{mu^2+T_{||}^o}{T_\perp^o}\right) - \Omega_1^2 - \Omega_2^2}{\Omega_1^2(mu^2+T_{||}^o)/T_\perp^o} \ll 1 .$$

В случае, когда через горячую плазму движется горячий пучок заряженных частиц, условие (1.2) сводится (в области $|\omega_k| \ll k v_{T1,2}$) к

$$\frac{|\epsilon_{13}|^2}{|\epsilon_{11}\epsilon_{33}|} \approx \frac{N_1}{N_2}\;\frac{mu^2}{mu^2+T_{||}^{(1)}-T_\perp^{(1)}}\;\frac{T_\perp^{(2)}}{T_\perp^{(1)}} \ll 1 , \qquad (1.9)$$

а инкремент нарастания

$$\gamma_k = k\left(\frac{T_\perp^{(1)}}{m}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\Theta\, Y_1^* ,$$

$$\Theta = \frac{\frac{mu^2+T_{||}^{(1)}}{T_\perp^{(1)}} + \frac{N_2}{N_1}\;\frac{T_{||}^{(2)}}{T_\perp^{(2)}}}{\frac{mu^2+T_{||}^{(1)}}{T_\perp^{(1)}} + \frac{N_2}{N_1}\left(\frac{T_\perp^{(1)}}{T_\perp^{(2)}}\right)^{1/2}\frac{T_{||}^{(2)}}{T_\perp^{(2)}}} , \qquad (1.10)$$

$$Y_1^* = 1 - \frac{\frac{k^2c^2}{\Omega_1^2} + 1 + \frac{N_2}{N_1}}{\frac{mu^2+T_{||}^{(1)}}{T_\perp^{(1)}} + \frac{N_2}{N_1}\;\frac{T_{||}^{(2)}}{T_\perp^{(2)}}} .$$

Условие $k(T_\perp^{(1)}/m)^{1/2} >> \gamma_k$ выполняется при $\Theta Y_1^* \ll 1$, и $k(T_\perp^{(2)}/m)^{1/2} >> \gamma_k$ – при $(T_\perp^{(1)}/T_\perp^{(2)})^{1/2} Y_1^*\Theta \ll 1$.

В области частот $|\omega_k| \ll k\, v_{T1,2e,i}$ для изотермических плазмы и пучка можно пользоваться формулой (1.10), заменив в ней Y_1^* на

$$Y_1^* = 1 - \frac{\dfrac{k^2c^2}{\Omega_1^2} + 1 + \dfrac{N_2}{N_1}}{\dfrac{2mu^2 + T_\parallel^{(1)}}{T_\perp^{(1)}} + \dfrac{N_2}{N_1}\,\dfrac{T_\parallel^{(2)}}{T_\perp^{(2)}}} \tag{1.11а}$$

и соответственно Θ – на

$$\Theta = \frac{\dfrac{2mu^2 + T_\parallel^{(1)}}{T_\perp^{(1)}} + \dfrac{N_2}{N_1}\,\dfrac{T_\parallel^{(2)}}{T_\perp^{(2)}}}{\dfrac{(mM)^{1/2}u^2 + T_\parallel^{(1)}}{T_\perp^{(1)}} + \dfrac{N_2}{N_1}\,\dfrac{T_\parallel^{(2)}}{T_\perp^{(2)}}\left(\dfrac{T_\perp^{(1)}}{T_\perp^{(2)}}\right)^{1/2}} \tag{1.11б}$$

В том случае, когда $T_\perp^{(\alpha)} = T_\parallel^{(\alpha)}$, возбуждение имеет место для сколь угодно малой направленной скорости пучка, в том числе и при $u < v_{Te,i1,2}$.

2. Выведем уравнения квазилинейного приближения. Представим функцию распределения частиц по скоростям в виде

$f^{(\alpha)} = f_0^{(\alpha)}(t,\vec v) + f_1^{(\alpha)}(\vec r,\vec v,t)$, где $f_0^{(\alpha)}(t,\vec v)$ – функция характеризующая "фон", на котором происходят коллективные движения; $f_1^{(\alpha)}(\vec r,\vec v,t)$ – осциллирующая в пространстве функция, характеризующая эти коллективные движения.

Представим все величины, характеризующие коллективные движения в виде:

$$f_1^{(\alpha)} = \tfrac{1}{2}\{\sum_k f_k^{(\alpha)} e^{ikx} + \text{k.c.}\}, \qquad \vec E = \tfrac{1}{2}\{\sum_k \vec E_k e^{ikx} + \text{k.c.}\}.$$

Усредним кинетическое уравнение по расстояниям, большим по сравнению с длиной волны колебаний, учитывая, что $\langle f^{(\alpha)}\rangle = f_0^{(\alpha)}$ и $\langle f_1^{(\alpha)}\rangle = 0$ (где знак $\langle\,\rangle$ означает усреднение), тогда для $f_0^{(\alpha)}(t,\vec v)$ получим уравнение,

$$\frac{\partial f_0^{(\alpha)}}{\partial t} - \frac{e}{m}\left\langle\left(\vec E + \frac{1}{c}[\vec v\vec H]\right)\frac{\partial f_1^{(\alpha)}}{\partial \vec v}\right\rangle = 0. \tag{2.1}$$

Функцию $f_1^{(\alpha)}$ найдем, решая линеаризованное кинетическое уравнение

$$f_1^{(\alpha)} = i\frac{e}{m}\sum_k \frac{\vec E_k + \frac{1}{c}[\vec v\vec H_k]}{\omega_k - \vec k\vec v}\,\frac{\partial f_0^{(\alpha)}}{\partial \vec v}\, e^{i(\vec k\vec r - \omega_k t)}.$$

Подставляя это выражение в (2.1), найдем

$$\frac{\partial f_0^{(\alpha)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_i}\left(D_{ij}\,\frac{\partial f_0^{(\alpha)}}{\partial v_j}\right), \tag{2.2}$$

где

$$D_{11} = \frac{e^2}{m^2} \sum_k \frac{|H_k|^2}{k^2 c^2} \gamma_k \frac{k^2 v_z^2}{\gamma_k^2 + k^2 v_x^2},$$

$$D_{31} = -2 \frac{e^2}{m^2} \sum_k \frac{|H_k|^2}{k^2 c^2} \gamma_k \frac{k^2 v_x v_z}{\gamma_k^2 + k^2 v_x^2}, \tag{2.3}$$

$$D_{33} = \frac{e^2}{m^2} \sum \frac{|H_k|^2}{k^2 c^2} \gamma_k$$

остальные коэффициенты D_{ij} равны нулю. В выражениях (2.3) $\gamma_k = -i\omega_k$ есть инкремент, полученный из решения дисперсионного уравнения (1.3).

С помощью (2.2) легко установить соотношения

$$\int \frac{\partial f_0}{\partial t} d\vec{v} = 0, \qquad \int v_x \frac{\partial f_0}{\partial t} d\vec{v} = 0$$

(число частиц со временем не меняется и функция f_0 остается четной относительно v_x с течением времени).

Для изменения поперечной температуры частиц из (2.2) имеем

$$N^{(\alpha)} \frac{d T_\perp^{(\alpha)}}{dt} = \int \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2) \frac{\partial f_0^{(\alpha)}}{\partial t} d\vec{v} = -\frac{e^2}{m} \sum_k \frac{|H_k|^2}{k^2 c^2} \gamma_k \int \frac{k^2 v_x v_z^2}{k^2 v_x^2 + \gamma_k^2} \frac{\partial f_0^{(\alpha)}}{\partial v_x} d\vec{v}. \tag{2.4}$$

Аналогично, для изменения продольной температуры получим:

$$N^{(\alpha)} \frac{d T_\parallel^{(\alpha)}}{dt} = \int m (v_z - u^{(\alpha)})^2 \frac{\partial f_0^{(\alpha)}}{\partial t} d\vec{v} = 2 \frac{e^2}{m} \sum_k \frac{|H_k|^2}{k^2 c^2} \gamma_k \int [f_0^{(\alpha)} + \tag{2.5}$$

$$+ 2 \frac{k^2 v_x v_z (v_z - u^{(\alpha)})}{k^2 v_x^2 + \gamma_k^2} \frac{\partial f_0^{(\alpha)}}{\partial v_x}] d\vec{v}.$$

Изменение направленной скорости частиц определяется соотношением

$$\frac{du^{(\alpha)}}{dt} = \int (v_z - u^{(\alpha)}) \frac{\partial f_0^{(\alpha)}}{\partial t} d\vec{v} = 2 \frac{e^2}{m^2} \sum_k \frac{|H_k|^2}{k^2 c^2} \gamma_k \int \frac{k^2 v_x v_z}{k^2 v_x^2 + \gamma_k^2} \frac{\partial f_0^{(\alpha)}}{\partial v_x} d\vec{v}. \tag{2.6}$$

Энергия генерируемого при этом электромагнитного поля меняется по закону

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{8\pi} \sum_k |H_k|^2 = \frac{1}{4\pi} \sum_k \gamma_k |H_k|^2. \tag{2.7}$$

Здесь и в дальнейшем мы будем пренебрегать энергией переменного электрического поля, так как

$$|E_k|^2 = \frac{\gamma_k^2}{k^2 c^2} |H_k|^2.$$

С помощью соотношений (2.4) - (2.7) получим закон сохранения энергии - энергия направленного движения, теряемая пучком, идет на увеличение тепловой энергии частиц и энергии магнитного поля, генерируемого при неустойчивости.

$$\sum_{\alpha=1,2}\left[N^{(\alpha)}\left(\frac{dT_\perp^{(\alpha)}}{dt}+\tfrac{1}{2}\frac{dT_\parallel^{(\alpha)}}{dt}\right)+N^{(\alpha)}\frac{d}{dt}\left(\frac{m\,u^{(\alpha)2}}{2}\right)\right]+\frac{d}{dt}\,\frac{1}{8\pi}\sum_k|H_k|^2=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\sum_k\frac{|H_k|^2}{k^2c^2}\left[\Omega_1^2+\Omega_2^2+k^2c^2+\sum_{\alpha=1,2}\frac{4\pi e^2}{m}\int\frac{k^2v_xv_z^2}{k^2v_x^2+\gamma_k^2}\frac{\partial f_0^{(\alpha)}}{\partial v_x}d\vec{v}\right]. \qquad (2.8)$$

Легко показать, что $\int\frac{k^2v_xv_z^2}{k^2v_x^2+\gamma_k^2}\frac{\partial f_0^{(\alpha)}}{\partial v_x}d\vec{v}=\int\frac{v_z^2}{v_x}\frac{\partial f_0^{(\alpha)}}{\partial v_x}d\vec{v}-$
$-\frac{\gamma_k}{k}\pi\int v_z^2\left(\frac{\partial^2 f_0^{(\alpha)}}{\partial v_x^2}\right)_{v_x=0}dv_y\,dv_z$,

а поэтому выражение в квадратных скобках в правой части равенства (2.8) тождественно равно нулю (см. (1,4).

3. В предыдущем пункте мы получили общие соотнотношения квазилинейного приближения для апериодических неустойчивостей пучкового типа. Вернемся теперь к случаю, когда через холодную плазму движется горячий пучок (т.е. $kv_{T1}\gg\gamma_k\gg kv_{T2}$)

Решение уравнения (2.2) для функции распределения частиц по скоростям в пучке будем искать способом, аналогичным предположенному в работе /4/. При $v_x\approx v_T$ решаем уравнение (2.2) методом последовательных приближений, представляя $f_0^{(\alpha)}$ в виде $f_0^{(\alpha)}=f_0^{(\alpha)}(0,\vec{v})+\delta f_0^{(\alpha)}(t,\vec{v})$, где $f_0^{(1)}(0,\vec{v})$ определяется соотношением (1.5).

Предполагая $\left|\frac{\partial f_0}{f_0}\right|\ll 1$, получим для $\delta f_0^{(\alpha)}$

$$\delta f_0^{(\alpha)}=\frac{e^2}{2m}\sum_k\frac{|H_k|^2}{k^2c^2}\left\{\frac{\partial}{\partial v_z}\left[\frac{2v_z}{T_\perp^0}-\frac{v_z-u}{T_\parallel^0}\right]-\frac{\partial}{\partial v_x}\left(\frac{v_x^2}{T_\perp^0\,v_x}\right)\right\}f_0^{(\alpha)}(0,\vec{v}). \qquad (3.1)$$

При $v_x\to 0$ последнее слагаемое в (3.1) становится очень большим, и уравнение уже нельзя решать методом последовательным приближений. В области малых v_x уравнение (3.2) нужно решать точно, сохраняя лишь старший член.

При $t\to\infty$ имеем следующее уравнение для функции δf_0^∞.

$$\frac{v_z^2}{v_x}\frac{d^2\delta f_0^\infty}{dv_x^2}-2\frac{v_z^2}{v_x^3}\frac{d\,\delta f_0^\infty}{dv_x}-\left(\frac{e^2}{2m^2}\sum_k\frac{|H_k|^2}{k^2c^2}\right)^{-1}\delta f_0^\infty=-\frac{v_z^2}{v_x^2}\frac{f_0^{(\alpha)}(0,\vec{v})}{v_\perp^2} \qquad (3.2)$$

решение этого уравнения есть

$$\delta f_0^\infty=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\frac{m\,v_x^{3/2}}{T_\perp^0}f_0^{(\alpha)}(0,\vec{v})\Big|_{v_x=0}\left\{I_{-3/4}(a v_x^2)\,\Phi_+-I_{3/4}(a v_x^2)\,\Phi_-\right\}, \qquad (3.3)$$

где

$$\Phi_\pm=\int_{v^*}^{v_x}I_{\pm 3/4}(a v_x^2)\frac{dv_x}{v_x^{1/2}}+\tfrac{1}{2}\frac{1}{a^{1/4}}\Psi_\pm(a v^{*2}),\quad a^2=\left(2\frac{e^2}{m^2}\sum_k\frac{|H_k|^2}{k^2c^2}v_z^2\right)^{-1}.$$

$I_{\pm 3/4}(x)$ – модифицированные функции Бесселя, v^* – некоторая постоянная.

Для $\Psi_+(\beta)$ и $\Psi_-(\beta)$ при $\beta \gg 1$ имеем асимптотические разложения:

$$\Psi_{\pm}(\beta) \simeq \frac{1}{\beta^{1/4}}\left[I_{\pm 1/4}(\beta)\sum_0^\infty \frac{(2n)!}{\beta^{2n}} + I_{\pm 1/4}(\beta)\sum_0^\infty \frac{(2n+1)!}{\beta^{2n+1}} \right].$$

Постоянные в (3.3) выбираются таким образом, что при достаточно больших v_x функция δf_0^∞ из (3.3) переходит в основной член в (3.1), равный

$$\frac{e^2}{2m}\sum_k \frac{|H_k|^2}{k^2c^2}\frac{v_z^2}{T_\perp^0 v_x^2} f_0^{(\alpha)}(0,\vec{v}).$$

Учитывая (3.1) и (3.3), получим для δf_0 соотношение, справедливое при любых v_x ($0 \lesssim v_x \lesssim v_{T1}$)

$$\delta f_0^{(\alpha)} = \frac{e^2}{2m}\sum_k \frac{|H_k|^2}{k^2c^2}\frac{\partial}{\partial v_z}\left\{\left[\frac{2v_z}{T_\perp^0} - \frac{v_z - u}{T_\parallel^0}\right] f_0^{(\alpha)}(0,\vec{v})\right\} +$$
$$+ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\frac{m v_x^{3/2}}{T_\perp^0} f_0^{(\alpha)}(0,\vec{v})\Big|_{v_x=0}\left\{ I_{-1/4}(\alpha v_x^2)\Phi_+ - I_{1/4}(\alpha v_x^2)\Phi_-\right\}. \qquad (3.4)$$

Имея решение уравнения (2.2), можем определить, как изменяются направленная скорость, температуры ($T_\perp$ и $T_\parallel$) частиц пучка и плазмы и энергия генерируемого магнитного поля.

При $t \to \infty$, когда $\gamma \to 0$ имеем равенство

$$\frac{4\pi e^2}{m}\int \frac{v_z^2}{v_x}\frac{\partial f_0}{\partial v_x} d\vec{v} + k^2c^2 + \Omega_1^2 + \Omega_2^2 = 0. \qquad (3.5)$$

Подставляя $f_0^{(\infty)} = f_0(0,v) + \delta f_0$, получим

$$\frac{4\pi e^2}{m}\int \frac{v_z^2}{v_x}\frac{\partial f_0(0,\vec{v})}{\partial v_x} d\vec{v} + k^2c^2 + \Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \frac{4\pi e^2}{m}\int \frac{v_z^2}{v_x}\frac{\partial \delta f_0}{\partial v_x} d\vec{v} = 0.$$

С помощью соотношений (1.7) и (3.4) получим следующее уравнение

$$-\frac{2}{3} Y \frac{mu^2 + T_\parallel^0}{T_\perp^0} + \frac{m}{T_\perp^0}\frac{e^2}{m^2}\sum_k \frac{|H_k|^2}{k^2c^2}\left[2\frac{mu^2 + T_\parallel^0}{T_\perp^0} - 1\right] +$$
$$+ \frac{2^{1/4}}{4}\frac{mu^2}{T_\perp^0}\frac{u^{1/2}}{(T_\perp^0/m)^{1/4}}\left(\frac{m}{T_\perp^0}\frac{e^2}{m^2}\sum_k \frac{|H_k|^2}{k^2c^2}\right)^{1/4} G = 0, \qquad (3.6)$$

где $T_\perp^0$ и $T_\parallel^0$ – начальные температуры пучка,

$$G = z_0^{-5/2}\int_{-\infty}^{\infty} |z|^{5/2} e^{-(z-z_0)^2} dz \int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x} x^{3/4}\cdot\left\{ I_{-1/4}(x)\Phi_+(x) - I_{1/4}(x)\Phi_-(x)\right\} \qquad (3.7)$$

$$\text{и} \quad z_0^2 = \frac{mu^2}{2T_\parallel^0}.$$

Используя выражение (1.7), можно показать, что

$$\frac{m}{T_\perp^0}\frac{e^2}{m^2}\sum_k \frac{|H_k|^2}{k^2c^2} = \frac{3}{Y}\frac{\frac{1}{8\pi}\sum_k |H_k|^2}{\frac{1}{2} N_1 (mu^2 + T_\parallel^0)}. \qquad (3.8)$$

Будем считать, что эта величина мала по сравнению с единицей (это предположение подтверждается результатом). Тогда в уравнении (3.5) можно пренебречь вторым слагаемым по сравнению с третьим. При этом для энергии электромагнитного поля, устанавливающегося к концу развития неустойчивости, получим

$$\frac{1}{8\pi}\sum_k |H_k|^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \frac{1}{6}\left(\frac{4}{G\,2^{1/4}}\right)^4 \left(\frac{m u^2 + T_\parallel^\circ}{T_\perp^\circ}\right)^5 N_1 T_\perp^\circ Y^5. \quad (3.9)$$

Условие малости (3.7) выполняется за счет малости Y . С помощью выражений (2.4)-(2.6) найдем, что увеличение поперечной тепловой энергии электронов пучка есть

$$N_1\,\delta\,T_\perp^{(1)} = W\,\frac{3}{Y}\,; \qquad W = \frac{1}{8\pi}\sum_k |H_k|^2 \quad (3.10)$$

продольной тепловой энергии

$$\tfrac{1}{2}\,N_1\,\delta\,T_\parallel^{(1)} = W\,\frac{3}{Y}\,\frac{T_\perp^\circ}{m u^2 + T_\parallel^\circ}\left(1 - \frac{2T_\parallel^\circ}{T_\perp^\circ}\right). \quad (3.11)$$

Изменение энергии направленного движения определяется из соотношения

$$N_1\, m u\,\delta u = -W\,\frac{6}{Y}\,\frac{m u^2}{m u^2 + T_\parallel^\circ}. \quad (3.12)$$

С помощью (2.4) легко найти, что энергия, идущая на увеличение поперечного теплового движения электронов плазмы, равна

$$\delta\,T_\perp^{(2)} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{4}{G\,2^{1/4}}\right)^4\left(\frac{m u^2 + T_\parallel^\circ}{m u^2}\right)^4\frac{T_\perp^\circ}{m u^2}\,T_\perp^{(2)\circ}\,Y^2. \quad (3.13)$$

Отсюда видно, что нагрев плазмы будет незначительным, если начальная температура плазмы $T_\perp^{(2)\circ}$ мала. Поэтому в уравнении (3.5) можно пренебречь изменением функции распределения плазмы (что и было сделано). Фактически насыщение колебаний в рассматриваемой задаче происходит не при $\gamma_k = 0$, а при $\gamma_k \approx k v_{T2}$. Учет этого обстоятельства приведет к появлению в формулах (3.10)-(3.12) слагаемых, пропорциональных температуре плазмы. В настоящем рассмотрении мы ими пренебрегли.

4. В случае, когда через горячую плазму движется горячий пучок заряженных частиц, и инкремент $\gamma_k >> k v_{T1,2}$ (ионы считаем холодными), для изменения температуры электронов в пучке ($\alpha = 1$) и плазме ($\alpha = 2$) будем иметь следующие выражения

$$N^{(1)}\,\frac{\alpha\,T_\perp^{(1)}}{d\,W} = \frac{3}{Y^*}\,\frac{m u^2 + T_\parallel^{(1)\circ}}{T_\perp^{(1)\circ}}\,\kappa\,,$$

$$\tfrac{1}{2}\,N^{(1)}\,\frac{d\,T_\parallel^{(1)}}{d\,W} = \frac{3}{Y^*}\left(1 - 2\,\frac{T_\parallel^{(1)\circ}}{T_\perp^{(1)\circ}}\right)\kappa\,, \quad (4.1)$$

$$N^{(2)}\,\frac{d\,T_\perp^{(2)}}{d\,W} = \frac{3}{Y^*}\,\frac{N_2}{N_1}\,\frac{T_\parallel^{(2)\circ}}{T_\perp^{(2)\circ}}\,\kappa\,,$$

$$\tfrac{1}{2}\,N^{(2)}\,\frac{d\,T_\parallel^{(2)}}{d\,W} = \frac{3}{Y^*}\,\frac{N_2}{N_1}\left(1 - 2\,\frac{T_\parallel^{(2)\circ}}{T_\perp^{(2)\circ}}\right)\kappa\,.$$

Изменение импульса пучка определяется соотношением

$$N^{(1)} \frac{d P_z}{d W} = -\frac{6}{Y^*} \frac{P_0}{T_\perp^{(1)\circ}} \kappa , \tag{4.2}$$

где Y^* соответствует максимальному значению Y_1^* и равно

$$Y^* = \frac{3}{2} Y^*_{1\,max} = 1 - \left(1 + \frac{N_2}{N_1}\right)\left(\frac{m u^2 + T_\parallel^{(1)\circ}}{T_\perp^{(1)\circ}} + \frac{N_2}{N_1} \frac{T_\parallel^{(2)\circ}}{T_\perp^{(2)\circ}}\right)^{-1}, \tag{4.3}$$

Далее $p = m u$, $\kappa = \left(\frac{m u^2 + T_\parallel^{(1)\circ}}{T_\perp^{(1)\circ}} + \frac{N_2}{N_1} \frac{T_\parallel^{(2)\circ}}{T_\perp^{(2)\circ}}\right)^{-1}$,

W, как и раньше, есть энергия электромагнитного поля. Используя решение уравнения (2.2) в виде (3.3) и проводя операции, аналогичные проделанным для случая горячего пучка и холодной плазмы, получим вместо (3.6)

$$\frac{2}{3} \Omega_1^2 \left(\frac{m u^2 + T_\parallel^{(1)\circ}}{T_\perp^{(1)\circ}} + \frac{N_2}{N_1} \frac{T_\parallel^{(2)\circ}}{T_\perp^{(2)\circ}}\right) Y^* + 2m \left[\Omega_1^2 \frac{2 m u^2 + 2 T_\parallel^{(1)\circ} - T_\perp^{(1)\circ}}{(T_\perp^{(1)\circ})^2} + \right.$$

$$\left. + \Omega_2^2 \frac{2 T_\parallel^{(2)\circ} - T_\perp^{(2)\circ}}{(T_\perp^{(2)\circ})^{1/4}} \right] V^2 + \Omega_2^2 V^{1/4} \left(\frac{m}{T_\perp^{(2)\circ}}\right)^{1/4} \left(\frac{T_\parallel^{(2)\circ}}{T_\perp^{(2)\circ}}\right)^{5/4} \Gamma(3/4)\, 2^{-9/8} G_2 + \tag{4.4}$$

$$+ \Omega_1^2 V^{1/4} \left(\frac{m}{T_\perp^{(1)\circ}}\right)^{1/4} \left(\frac{T_\parallel^{(1)\circ}}{T_\perp^{(1)\circ}}\right)^{5/4} 2^{-1/4} G_1 = 0 .$$

Здесь введены обозначения

$$V^2 = \frac{e^2}{2 m^2} \sum \frac{|H_k|^2}{k^2 c^2}, \qquad \Gamma(x) \text{ — гамма-функция,}$$

$$G_2 = \int_0^\infty \frac{d x}{x^{1/4}} \frac{d}{d x} x^{1/4} \left[I_{-1/4}(x)\, \Phi_+(x) - I_{1/4}(x)\, \Phi_-(x) \right],$$

$G_1 = G z_0^{5/2}$, G определяется формулой (3.7), в которой $z_0 = \frac{m u^2}{2 T_\parallel^{(1)\circ}}$.

При решении дисперсионного уравнения мы пренебрегали членами $\frac{N_1}{N_2} \frac{T_\perp^{(2)}}{T_\perp^{(1)}}$, малыми по сравнению с единицей, поэтому, если $\left(\frac{m u^2}{T_\parallel^{(2)\circ}}\right)^{5/4} \left(\frac{T_\perp^{(2)\circ}}{T_\perp^{(1)\circ}}\right)^{1/4} \lesssim 1$

то в уравнении (4.4) членом $\Omega_1^2 V^{1/4} \left(\frac{m}{T_\perp^{(1)\circ}}\right)^{1/4} \left(\frac{T_\parallel^{(1)\circ}}{T_\perp^{(1)\circ}}\right)^{5/4} \frac{G_1}{2^{1/4}}$ можно пренебречь, поэтому, предполагая, как и раньше, $(m V^2 / T_\perp^{(2)\circ})^{1/4} \ll 1$, получим

$$V^2 = \frac{e^2}{2 m^2} \sum_k \frac{|H_k|^2}{k^2 c^2} = \frac{2^{18}}{3^8} \frac{T_\perp^{(2)\circ}}{T_\parallel^{(2)\circ}} (G_2 \Gamma(3/4))^{-4} \left(1 + \frac{N_1}{N_2} \frac{T_\perp^{(2)\circ}}{T_\parallel^{(2)\circ}} \frac{m u^2 + T_\parallel^{(1)\circ}}{T_\perp^{(1)\circ}}\right) \frac{T_\perp^{(2)\circ}}{m} Y^{*4} \tag{4.5}$$

или

$$\frac{\frac{1}{8\pi} \sum_k |H_k|^2}{N_1 (m u^2 + T_\parallel^{(1)\circ}) \frac{T_\perp^{(2)\circ}}{T_\perp^{(1)\circ}} + N_2 T_\parallel^{(2)\circ}} = \frac{2^{18}}{3^8} \frac{T_\perp^{(2)\circ}}{T_\parallel^{(2)\circ}} (G_2 \Gamma(3/4))^{-4} \left(1 + \frac{N_1}{N_2} \frac{T_\perp^{(2)\circ}}{T_\parallel^{(2)\circ}} \frac{m u^2 + T_\parallel^{(1)\circ}}{T_\perp^{(1)\circ}}\right) Y^{*5}.$$

При решении уравнения (4.4) мы пренебрегли членом $2 \frac{m}{T_\perp^{(2)\circ}} \Omega_2^2 \frac{2 T_\parallel^{(2)\circ} - T_\perp^{(2)\circ}}{T_\perp^{(2)\circ}} V^2$, что справедливо при

$$4 \frac{2 T_\parallel^{(2)\circ} - T_\perp^{(2)\circ}}{T_\perp^{(2)\circ}} \frac{\left(1 + \frac{N_1}{N_2} \frac{T_\perp^{(2)\circ}}{T_\parallel^{(2)\circ}} \frac{m u^2 + T_\parallel^{(1)\circ}}{T_\perp^{(1)\circ}}\right)^3}{(\Gamma(3/4) G_2)^4 (T_\parallel^{(2)\circ} / T_\perp^{(2)\circ})^{1/4}} Y^* \ll 1 . \tag{4.6}$$

и, так как Y^* мало, условие (4.6) легко выполняется.

Выражения (4.5) дают величину энергии электромагнитного поля к моменту насыщения, поэтому, используя соотношения (4.1) и (4.5), можно найти $\delta T^{(\alpha)}$ и δP_z к моменту насыщения.

5. Формулы, полученные выше (3.9–3.12, 4,1; 4.2; 4,5), несколько громоздки, поэтому представляет интерес рассмотреть ряд простых случаев.

При движении горячего пучка через холодную плазму максимальный инкремент определяется формулой (1.8), из которой следует, что если плотность пучка равна плотности плазмы, то для выполнения неравенства $\gamma_k << k\, v_{T1}$ нужно $m u^2 + T_\parallel \approx 2T_\perp$. Это означает, что направленная скорость пучка меньше или того же порядка, что и тепловая скорость электронов в пучке, $u < v_{T1}$. При $u \approx v_{T1}$ (т.е. $z_0 \approx 1$) интеграл в (3.7) взять не удается. Если $u_0 \ll v_{T1}$ (что практически соответствует случаю анизотропного распределения частиц по скоростям в пучке),

$$G = 0{,}29\left(2\frac{T_\parallel^\circ}{m\,u^2}\right)^{5/4}$$

и формула (3.9) принимает простой вид

$$\frac{1}{8\pi}\sum_k |H_k|^2 = 19{,}8\; Y^5 N_1 T_\perp^\circ\,. \tag{5.1}$$

Неравенство $\frac{m}{T_\perp^\circ}\,\frac{e^2}{m^2}\sum_k |H_k|^2/k^2c^2 \ll 1$ выполняется при $Y^4 \ll 10^{-2}$, что значительно перекрывается условием $Y \ll 1$. В случае разреженного пучка и плотной плазмы $N_1 \ll N_2$ (что часто имеет место) малость инкремента обеспечивается при

$$\frac{m u^2 + T_\parallel^\circ}{T_\perp^\circ} \approx \frac{N_2}{N_1}$$

или, если $T_\parallel^\circ \approx T_\perp^\circ$ при $m u^2/T_\perp^\circ \gg 1$. При этом интеграл в формуле (3.7) может быть разложен по отношению $\frac{T_\parallel^\circ}{m\,u^2}$, и величина энергии электромагнитного поля к моменту насыщения

$$\frac{1}{8\pi}\sum_k |H_k|^2 = 45{,}7\left(1 - \frac{5}{2}\,\frac{N_1}{N_2}\right) N_1 T_\perp^\circ\, Y^5\,. \tag{5.2}$$

Для значений величины $z_0 = \left(\frac{m\,u^2}{2\,T_\parallel^\circ}\right)^{1/2}$, лежащих в пределах 0,125–5, были проведены численные расчеты. Формула (5.1) имеет вид:

$$\frac{1}{8\pi}\sum_k |H_k|^2 = \mathrm{Const}\; N_1 T_\perp^\circ\, Y^5, \tag{5.3}$$

где Const, как видно из таблицы,

Const	19,68	21,03	8,81	22,88	15,18	39,41	36,94	40,52	45,38
z_0	1/8	1/4	1/2	3/4	1	3/2	2	3	5

лежит в пределах от 9 до 45. Это говорит о том, что полученное решение устойчиво относительно изменения начальной функции распределения.

При движении горячего пучка через горячую плазму в области, где $\gamma \ll k v_{T1,2}$, а плотности пучка и плазмы связаны соотношением

$$\frac{N_1}{N_2}\left|\frac{mu^2}{mu^2+T_{\parallel}^{(1)}-T_{\perp}^{(1)}}\right|\frac{T_{\perp}^{(2)}}{T_{\perp}^{(1)}} \ll 1.$$

вместо (4.3) имеем

$$\frac{1}{8\pi}\sum_k |H_k|^2 = 19,8\ N_2 T_{\perp}^{(1)^\circ}\left(1+\frac{N_1}{N_2}\left(1+\frac{mu^2}{T_{\perp}^{(1)}}\right)\right)^5 Y^5 \tag{5.4}$$

$$Y = \frac{mu^2}{T_{\perp}^{(1)^\circ}}\left(1+\frac{N_2}{N_1}+\frac{mu^2}{T_{\perp}^{(1)^\circ}}\right)^{-1}.$$

Соотношение (5.4) получено в предположении малости Y, поэтому оно справедливо либо при $\frac{mu^2}{T_{\perp}^{(1)^\circ}} \ll 1$, либо при $\frac{N_2}{N_1} \gg 1$. Для этих случаев получим соответственно

$$\frac{1}{8\pi}\sum_k |H_k|^2 = 19,8\left(1+\frac{N_1}{N_2}\right)^5\left(\frac{mu^2}{\left(1+\frac{N_2}{N_1}\right)T_{\perp}^{(1)^\circ}}\right)^5 N_2\ T_{\perp}^{(2)^\circ}$$

и

$$\frac{1}{8\pi}\sum_k |H_k|^2 = 19,8\left(\frac{N_1}{N_2}\ \frac{mu^2}{T_{\perp}^{(1)^\circ}}\right)^5 N_2\ T_{\perp}^{(2)^\circ}.$$

Аналогично можно исследовать случаи с разными продольными и поперечными температурами. Однако, если осуществляется соотношение

$$\frac{N_2}{N_1}\ \frac{T_{\perp}^{(2)}-T_{\parallel}^{(2)}}{T_{\perp}^{(2)}} \gg 1,$$

то из условия $Y^* \ll 1$ имеем

$$\frac{mu^2}{T_{\perp}^{(1)}} \approx \frac{N_2}{N_1}\ \frac{T_{\perp}^{(2)}-T_{\parallel}^{(2)}}{T_{\perp}^{(2)}} \gg 1,$$

но при решении уравнения (4.4) мы пренебрегли членом, малым по сравнению с оставшимся при

$$\left(\frac{mu^2}{T_{\perp}^{(1)}}\right)^{5/4}\left(\frac{T_{\perp}^{(2)}}{T_{\perp}^{(1)}}\right)^{3/2}\frac{N_1}{N_2} \ll 1.$$

Эти два неравенства могут находится в противоречии, например, когда

$$\frac{T_{\perp}^{(2)}-T_{\parallel}^{(2)}}{T_{\perp}^{(2)}}\left(\frac{T_{\perp}^{(2)}}{T_{\perp}^{(1)}}\right)^{1/4}\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{1/4} > 1,$$

следовательно формула (4.5) неверна, и при решении уравнения (4.4) нужно учитывать отброшенный член

$$\Omega_1^2\left(\frac{e^2}{4m^2}\sum_k \frac{|H_k|^2}{k^2c^2}\ \frac{m}{T_{\perp}^{(1)^\circ}}\right)^{1/4}\left(\frac{T_{\parallel}^{(1)^\circ}}{T_{\perp}^{(1)^\circ}}\right)^{5/4} G_1.$$

Получающиеся при этом выражения очень громоздки, поэтому приводит здесь мы их не будем.

В том случае, когда $\gamma_k \ll k v_{Te,i1,2}$, нужно учитывать движение ионов. Для изотермической плазмы и пучка можно пользоваться формулами (4.5) учитывая, что Y^* определяется соотношением (1.11а). Для неизотермических плазмы и пучка ($Te^{(\alpha)} \gg T_i^{(\alpha)}$)

движение ионов является существенным, и возможность применения формулы (4.5) нуждается в дополнительном исследовании.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность В.И.Векслеру за предложенную тему, В.Д.Шапиро за ценные советы, А.А.Рухадзе, В.П.Силину за обсуждение результатов работы.

Литература

1. J. Neufield, Doyle. Phys. Rev., 121, 645 (1961).
2. В.Г.Маханьков, А.А.Рухадзе. Ядерный синтез, 2, 177 (1962).
3. W.E.Drummond, D.Pines. Доклад на конференции по физике плазмы, Зальцбург (1961).
4. А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев. Доклад на конференции по физике плазмы, Зальцбург (1961).
5. В.Д.Шапиро. ЖЭТФ, 44, вып. 2 (1963).
6. В.Д.Шапиро, В.И.Шевченко. ЖЭТФ, 45, вып. 5 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
23 апреля 1964 г.