ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М.К. Волков, Г.В. Ефимов

Р-1638

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУД ВО ВТОРОМ ПОРЯДКЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

ЖЭТФ, 1964, т47, в5, с1800-1805

Дубна 1964

М.К. Волков, Г.В. Ефимов

Р-1638

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУД ВО ВТОРОМ ПОРЯДКЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Направлено в ЖЭТФ

Дубна 1964

1. Недавно[1,2,3] была сделана попытка построить конечную локальную теорию скалярного поля путем введения существенно нелинейного лагранжиана взаимодействия, удовлетворяющего определенным требованиям. Исследуется класс лагранжианов взаимодействия $\mathcal{L}_I(\phi(x)) = -g\,U(\phi(x))$, где $U(a)$, рассматриваемая как функция комплексного переменного a, обладает следующими свойствами:

1) $U(a)$ является аналитической функцией в комплексной плоскости a с конечным числом разрезов, причем особенности таковы, что интеграл от $|U(a)|^2$ существует по любой ограниченной области.

2) $U(a)$ действительна, не имеет особенностей на действительной оси и разлагается в ряд Тейлора в точке $a=0$

$$U(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} a^n .$$

3) $U(a)$ на бесконечности удовлетворяет условию

$$\lim_{|a|\to\infty} \frac{U(a)}{a^2} = 0 .$$

В работе[1] были получены амплитуды процессов во втором порядке теории возмущений по степеням лагранжиана взаимодействия в эвклидовой области импульсных переменных, т.е. в той области, где они вещественны. В настоящей статье будут исследованы амплитуды в этом порядке теории возмущений в физической области импульсов. Нас будет интересовать выполнение унитарности и асимптотическое поведение мнимых частей амплитуд при больших значениях импульсов.

2. Покажем, что процедура аналитического продолжения в область физических значений импульса, указанная в[1], согласуется с условием унитарности. Амплитуды физических процессов во втором порядке определяются суммой интегралов вида[1]

$$K_{m_1 m_2}(p^2) = 4\pi^2 \int_0^{\infty} d\beta\beta^2 \frac{J_1(\beta\sqrt{-p^2})}{\sqrt{-p^2}} F_{m_1 m_2}(\Delta_2(\beta)), \tag{1}$$

$$\Delta_2(\beta) = \frac{\mu K_1(\mu\beta)}{4\pi^2\beta} .$$

Представление (1) справедливо в пространственно-подобной области значений импульсов $(p^2<0)$. Напомним, что функции $F_{m_1 m_2}(\Delta)$ имеют существенно особую точку при $\Delta = 0$ и при вещественном положительном Δ разлагаются в асимптотический ряд

$$F_{m_1 m_2}(\Delta) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{u_{n+m_1}\, u_{n+m_2}}{n!}\, \Delta^n , \tag{2}$$

где u_n — коэффициенты разложения $U(a)$ в ряд Тейлора.

Интеграл (1) является вещественным. Он без труда продолжается в область $0 < p^2 < (n_0\mu)^2$

$$\mathcal{K}_{m_1 m_2}(p^2) = 4\pi^2 \int_0^{\infty} d\beta\beta^2 \frac{I_1(\beta p)}{p} F_{m_1 m_2}(\Delta_2(\beta)) \quad (p = \sqrt{p^2}) \tag{3}$$

и остается вещественным в этой области.

В физической области (при $p^2 > (n_0\mu)^2$) интеграл (3) начинает расходиться при больших значениях β, т.е. $\mathcal{K}_{m_1 m_2}(p^2)$ как функция комплексного переменного p^2 имеет разрез с началом в точке $p^2 = (n_0\mu)^2$. Продолжение в область

$$(n_0\mu)^2 < p^2 < (N+1)^2\mu^2 \tag{4}$$

осуществим следующим образом. Произведем в (3) тождественное преобразование:

$$\mathcal{K}_{m_1 m_2}(p^2) = A_{m_1 m_2}(p^2) + B_{m_1 m_2}(p^2), \tag{5}$$

где

$$A_{m_1 m_2}(p^2) = \frac{4\pi^2}{p} \Big\{ \int_0^a d\beta\beta^2 I_1(p\beta) F_{m_1 m_2}(\Delta_2(\beta)) + \tag{6}$$

$$+ \int_a^{\infty} d\beta\beta^2 I_1(p\beta) \Big[F_{m_1 m_2}(\Delta_2(\beta)) - \sum_{n=n_0}^{N} \frac{u_{n+m_1}\, u_{n+m_2}}{n!}\, \Delta_2^n(\beta) \Big] \Big\}$$

$$B_{m_1 m_2}(p^1) = \frac{4\pi^2}{p} \int_a^{\infty} d\beta\beta\; I_1(p\beta) \sum_{n=n_0}^{N} \frac{u_{n+m_1}\, u_{n+m_2}}{n!}\, \Delta_2^n(\beta) . \tag{7}$$

Интеграл $A_{m_1 m_2}(p^2)$ легко продолжается в область (4) и остается вещественным в этой области.

Для продолжения интеграла $B_{m_1 m_2}(p^2)$ в область (4) повернем контур интегрирования вверх на угол $\frac{\pi}{2}$, так как необходимо помнить, что масса μ, входящая в $\Delta(\mu\beta)$, имеет малую мнимую отрицательную добавку $(\mu = \mu - i\epsilon)$. Имеем

$$B_{m_1 m_2}(p) = \frac{4\pi^2}{p} \int_a^{a+i\infty} d\beta \beta^2 I_1(p\beta) \sum_{n=n_0}^{N} \frac{u_{n+m_1} u_{n+m_2}}{n!} \Delta_2^n(\beta). \tag{8}$$

В этом выражении уже можно считать p произвольной положительной величиной.

Мнимая часть $B_{m_1 m_2}(p^2)$, как показано в приложении, равна

$$\Im m B_{m_1 m_2}(p^2) = 8\pi^4 \sum_{n=n_0}^{N} \frac{u_{n+m_1} u_{n+m_2}}{n!} \cdot \frac{\Omega_n(p^2)}{(16\pi^3)^n}, \tag{9}$$

где

$$\Omega_n(p^2) = \int \frac{d\vec{k}_1}{\omega_1} \ldots \int \frac{d\vec{k}_n}{\omega_n} \delta^{(4)}(p - k_1 - \ldots - k_n), \tag{10}$$

$\Omega_n(p^2)$ – фазовый объем n частиц при энергии p. Окончательно мнимая часть $K_{m_1 m_2}(p^2)$ при произвольных $p^2 > 0$ дается выражением

$$\Im m K_{m_1 m_2}(p^2) = 8\pi^4 \sum_{n=n_0}^{[p]} \frac{u_{n+m_1} u_{n+m_2}}{n!} \cdot \frac{\Omega_n(p^2)}{(16\pi^3)^n}, \tag{11}$$

где $[p]$ означает ближайшее целое число, меньшее p.

Доказательство унитарности проведем на примере амплитуды упругого рассеяния скалярных частиц.

Амплитуда упругого рассеяния скалярных частиц с точностью до второго порядка теории возмущений дается выражением

$$\langle 0 | a_{\vec{p}_3} a_{\vec{p}_4} S a^+_{\vec{p}_1} a^+_{\vec{p}_2} | 0 \rangle = [\delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_3)\delta(\vec{p}_2 - \vec{p}_4) + \tag{12}$$
$$+ \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_4)\delta(\vec{p}_2 - \vec{p}_3)] + i \frac{\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2\pi)^2 \sqrt{2\omega_1 2\omega_2 2\omega_3 2\omega_4}} T(s,t,u),$$

где

$$T(s,t,u) = -g u_4 + g^2 K_{40}(0) + 4g^2 K_{31}(\mu^2) + \tag{13}$$
$$+ g^2 [K_{22}(s) + K_{22}(t) + K_{22}(u)]$$

и $\quad s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2$, $u = (p_1 - p_4)^2$, $\omega_j = \sqrt{p_j^2 - \mu^2}$.

Рассмотрим канал $s > 4\mu^2$, $t < 0$, $u < 0$. Мнимая часть амплитуды $T(s,t,u)$ равна согласно (11)

$$\mathrm{Im}\, T(s,t,u) = g^2 \mathrm{Im}\, K_{22}(s) = g^2 8\pi^4 \sum_{n=1}^{[\sqrt{s}]} \frac{u^2_{n+2}}{n!} \cdot \frac{\Omega_n(s)}{(16\pi^3)^n} . \tag{14}$$

Из условия унитарности $SS^+ = 1$ легко получить, считая $S = 1 + iT$,

$$\frac{\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_3-p_4)}{(2\pi)^2\sqrt{2\omega_1 2\omega_2 2\omega_3 2\omega_4}} 2\mathrm{Im}\, T(s,t,u) = \sum_n \langle 0|a_{\vec p_3} a_{\vec p_4} T|n\rangle\langle n|T^+ a^+_{\vec p_1} a^+_{\vec p_2}|0\rangle . \tag{15}$$

Так как мы проверяем унитарность во втором порядке теории возмущений, то в правой части (15) необходимо оставить только матричные элементы первого порядка, т.е.

$$\langle 0|a_{\vec p_3} a_{\vec p_4} T|n\rangle = -\frac{(2\pi)^4}{\sqrt{n!}} g \frac{u_{n+2}}{(2\pi)^{\frac{3(n+2)}{2}}} \cdot \frac{\delta^{(4)}(p_3+p_4-k_1-\ldots-k_n)}{\sqrt{2\omega_3 2\omega_4 2\omega_{k_1} \ldots 2\omega_{k_n}}} . \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), легко получить равенство (14). Таким образом унитарность доказана во втором порядке теории возмущений.

Аналогично можно проверить унитарность и для амплитуд других физических процессов.

3. Обратимся теперь к асимптотике мнимой части функции $K_{m_1 m_2}(p^2)$ при $p^2 \to +\infty$. Заменим в (11) сумму интегралом:

$$\mathrm{Im}\, K_{m_1 m_2}(p^2) \approx 8\pi^4 \int_{n_0}^{p} dn \frac{u_{n+m_1} u_{n+m_2}}{\Gamma(n+1)} \frac{\Omega_n(p^2)}{(16\pi^3)^n} . \tag{17}$$

При этом основной характер асимптотики не нарушится.

При $p^2 \to \infty$ в интеграле (17) основную роль будут играть коэффициенты u_{n+m} при больших значениях $(n+m)$. Найдем явное выражение для них. Если предположим, что функция взаимодействия $U(a)$, входящая в рассматриваемый класс лагранжианов, имеет в комплексной плоскости a ν разрезов с началами в точках $a_1, \ldots, a_\nu$, то можно показать, что

$$u_n \approx Const \frac{\Gamma(n)}{|a_0|^n} \left(1 + O\left(\left|\frac{a_j}{a_0}\right|^n\right)\right) \quad (n \gg 1), \tag{18}$$

где

$$|a_0| = \min\{|a_j|\}; \quad 1 \le j \le \nu .$$

Итак,

$$\mathrm{Im}\, K_{m_1 m_2}(p^2) \approx Const \int_0^p dn\, \Gamma(n)\, \frac{\Omega_n(p^2)}{a^n}, \tag{19}$$

где

$$a = 16\pi^3 |a_0|^2.$$

Фазовый объем $\Omega_n(p^2)$ как функция n при фиксированном p^2 имеет примерно в середине интервала максимум и спадает к концам интервала интегрирования. Так как $\Gamma(n)$ очень быстро растет к концу интервала, а $\Omega_n(p^2)$ плавно изменяется, то вся подинтегральная функция имеет резкий максимум вблизи конца интервала. Вычислим интеграл (19) по методу перевала, воспользовавшись асимптотическим представлением фазового объема при $n \lesssim p$ (см., например,[4])

$$\Omega_n(p^2) = \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}(n-1)}}{\Gamma(\frac{3}{2}(n-1))\, n^{3/2}}\,(p-n)^{\frac{3n-5}{2}} \quad (p-n \ll n). \tag{20}$$

Точка перевала может быть найдена обычным способом

$$\bar{n} = \frac{p}{\mu}\left[1 - \frac{3}{2\ln\frac{p}{\mu}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln\frac{p}{\mu}}\right)\right)\right] \quad \left(\ln\frac{p}{\mu} \gg 1\right), \tag{21}$$

и окончательно

$$\mathrm{Im}\, K_{m_1 m_2}(p^2) \approx \exp\left\{\frac{p}{\mu}\ln\frac{p}{\mu}\right\} f(p), \tag{22}$$

где $f(p)$ — некоторая функция более слабого роста, чем $\exp\{\frac{p}{\mu}\ln\frac{p}{\mu}\}$.

Обратим внимание на следующее:

а) Главный асимптотический член в (22) одинаков для любых лагранжианов в рассматриваемом классе функций взаимодействия $U(a)$.

б) Главный асимптотический член в (22) не зависит от рассматриваемого физического процесса.

в) Асимптотику мнимой части определяет масса частицы, а не новые параметры размерности длины, входящие в лагранжиан взаимодействия.

4. Асимптотику функции $K_{m_1 m_2}(p^2)$ при больших пространственно-подобных значениях импульса $p^2 \to -\infty$ легко можно получить из (1):

$$|K_{m_1 m_2}(p^2)| \leq \frac{Const}{|p^2|} \quad (-p^2 \gg \mu^2,\ Const > 0). \tag{23}$$

Таким образом, $K_{m_1 m_2}(p^2)$, рассматриваемая как функция комплексного переменного p^2, имеет существенно особую точку при $p^2 = \infty$.

5. В заключение обсудим поведение амплитуд при больших значениях импульса в физической области. Полученный рост (22) противоестественен. По всей видимости, он будет компенсироваться при учете высших приближений теории возмущений, если унитарность выполняется в каждом ее порядке. Так что только изучение высших приближений теории возмущений даст ответ на этот вопрос.

С другой стороны, в последнее время делаются попытки найти ограничения на рост амплитуд физических процессов, следующие из требования причинности. Так было получено /5/, что рост амплитуды упругого рассеяния мезона на нуклоне должен быть меньше экспоненциального по энергии в Брейтовской системе координат (напомним, что в этой системе $E \sim s$). Если этот вывод верен, то поведение амплитуд в рассматриваемой нелинейной теории согласуется с требованием причинности по крайней мере во втором порядке теории возмущений, так как из (22) следует

$$\Im m\, T(s,t,u) < e^{s}.$$

В заключение авторы выражают благодарность Л.Г. Заставенко за обсуждение.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Будем искать мнимую часть интеграла

$$B_n(p^2) = \frac{4\pi^2}{p}\int_{a}^{a+i\infty} d\beta\, \beta^2 I_1(\beta p)\left(\frac{\mu K_1(\mu\beta)}{4\pi^2\beta}\right)^n, \tag{A.1}$$

где $p > n\mu$.

Произведем замену $\beta = e^{i\frac{\pi}{2}}x$ и воспользуемся

$$K_1(e^{i\frac{\pi}{2}}\mu x) = -\frac{\pi}{2}H_1^{(2)}(\mu x); \quad I_1(e^{i\frac{\pi}{2}}px) = iJ_1(px),$$

тогда

$$B_n(p^2) = \frac{4\pi^2}{p}\int_{-ia}^{-ia+\infty} dx\, x^2 J_1(xp)\left(-\frac{\mu H_1^{(2)}(\mu x)}{8\pi i x}\right)^n. \tag{A.3}$$

Воспользовавшись равенством $J_1(x) = \frac{1}{2}[H_1^{(2)}(x) + H_1^{(1)}(x)]$, представим $B_n(p^2)$ в виде

$$B_n(p^2) = C_n(p^2) + D_n(p^2), \tag{A.3}$$

где

$$C_n(p^2) = \frac{2\pi^2}{p}\int_{-ia}^{-ia+\infty} dx\,x^2 H_1^{(2)}(xp)\left(-\frac{\mu H_1^{(2)}(\mu x)}{8\pi i x}\right)^n . \tag{A.4}$$

$$D_n(p^2) = \frac{2\pi^2}{p}\int_{-ia}^{-ia+\infty} dx\,x^2 H_1^{(1)}(xp)\left(-\frac{\mu H_1^{(2)}(\mu x)}{8\pi i x}\right)^n . \tag{A.5}$$

В (А.4) подинтегральная функция аналитична и экспоненциально убывает в нижней полуплоскости, поэтому контур интегрирования может быть повернут от луча $(-ia, -ia+\infty)$ к $(-ia, -i\infty)$. Получим (делая подстановку $x = e^{-\frac{\pi}{2}i} y$)

$$C_n(p^2) = -\frac{4\pi}{p} i \int_a^{\infty} dy\,y^2 K_1(yp)\left(\frac{\mu K_1(\mu y)}{4\pi^2 y}\right)^n . \tag{A.6}$$

Рассмотрим $D_n(p^2)$. Представим его в виде суммы

$$D_n(p^2) = E_n(p^2) + F_n(p^2) , \tag{A.7}$$

где

$$E_n(p^2) = \frac{2\pi^2}{p}\int_{-ia-\infty}^{-ia+\infty} dx\,x^2 H_1^{(1)}(xp)\left(-\frac{\mu H_1^{(2)}(\mu x)}{8\pi i x}\right)^n , \tag{A.8}$$

$$F_n(p^2) = \frac{2\pi^2}{p}\int_{-ia}^{-ia-\infty} dx\,x^2 H_1^{(1)}(xp)\left(-\frac{\mu H_1^{(2)}(\mu x)}{8\pi i x}\right)^n . \tag{A.9}$$

Как показано в /4/, функция $E_n(p^2)$ при $p^2 > (n\mu)^2$ равна

$$E_n(p^2) = \frac{\pi i}{(16\pi^3)^{n-1}}\,\Omega_n(p^2) , \tag{A.10}$$

где $\Omega\ (p\ )$ – фазовый объем n частиц при энергии p.

В интеграле (А.9) для $F\ (p^2)$ сделаем замену $x = e^{-\frac{\pi}{2}i} y$ и подстановку

$$H_1^{(1)}(e^{-\frac{\pi}{2}i} yp) = -2iI_1(yp) + \frac{2}{\pi}K_1(yp); \quad H_1^{(2)}(e^{-\frac{\pi}{2}i}\mu y) = -\frac{2}{\pi}K_1(\mu y) ,$$

получим

$$F_n(p^2) = \frac{4\pi^2}{p} \int_a^{a-i\infty} dy\, y^2 I_1(yp) \left(\frac{\mu K_1(\mu y)}{8\pi^2 y} \right)^n + i \frac{4\pi}{p} \int_a^{\infty} dy\, y^2 K_1(py) \left(\frac{\mu K_1(\mu y)}{4\pi^2 y} \right)^n . \tag{A.11}$$

Легко заметить, что первый интеграл в правой части (A.11) равен $B^*_n(p^2)$, а второй равен $-C_n(p^2)$.

Итак, мы получим

$$B_n(p^2) = \frac{\pi i}{(16\pi^3)^{n-1}} \Omega_n(p^2) + B^*_n(p^2) \tag{A.12}$$

и

$$\mathrm{Im}\, B_n(p^2) = \frac{\pi}{2(16\pi^3)^{n-1}} \Omega_n(p^2), \tag{A.13}$$

откуда немедленно следует (9).

Литература

1. Г.В. Ефимов. ЖЭТФ, 44, 2107 (1963).
2. G.V.Efimov. Nuovo Cim. (in print).
3. E.S.Fradkin. Nucl. Phys., 49, 624 (1963).
4. В.А. Колкунов. ЖЭТФ, 43, 1448 (1962).
5. Н.Н. Мейман. Сборник "Вопросы физики элементарных частиц", Изд. АН Арм. ССР, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 апреля 1964 г.