ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Я. Квециньски

Р - 1592

О СВЯЗИ МЕЖДУ МУЛЬТИПЕРИФЕРИЧЕСКИМ И БЕТЕ-СОЛЬПИТЕРОВСКИМ ПОДХОДАМИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ФЕРМИОННЫХ ПОЛЮСОВ РЕДЖЕ

Дубна 1964

Я. Квециньски[x/]

Р-1592

О СВЯЗИ МЕЖДУ МУЛЬТИПЕРИФЕРИЧЕСКИМ И БЕТЕ-СОЛЬПИТЕРОВСКИМ ПОДХОДАМИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ФЕРМИОННЫХ ПОЛЮСОВ РЕДЖЕ

Направлено в "Physics Letters"

[x/] Постоянный адрес: Институт ядерной физики, Краков.

Недавно Амати и др.[1] исследовали проблему фермионных полюсов Редже, используя мультипериферическую модель (МПМ).

Они исследовали асимптотическое однородное интегральное уравнение для абсорбтивной части амплитуды процесса $N\bar{N} \to \pi\pi$. Так как асимптотическое ядро МПМ обладает трансляционной симметрией, соответствующие инвариантные амплитуды могут быть факторизованы следующим способом (см.[1]),

$$A_i\,(s, u, v, t) = S^{\alpha(t)}\,\phi_i\,(u, v, t)\,,$$

где

$$p_1^2 = -v\,, \qquad s = (p_1 - p_2)^2,$$
$$q_1^2 = -u\,, \qquad t = (p_1 + q_1)^2$$
$$p_2^2 = m^2,$$
$$q_2^2 = \mu^2,$$

и $p_{1,2}$, $q_{1,2}$ – 4-импульсы входящего и выходящего нуклонов и мезонов, соответственно.

Функции ϕ_i являются решением системы четырех связанных интегральных уравнений. Уравнения удается упростить, если положить

$$\Phi_{1,3} = \phi_{1,3} + (\sqrt{t} - m)\,\phi_{2,4}\,,$$

$$\Phi_{2,4} = \phi_{1,3} - (\sqrt{t} + m)\,\phi_{2,4}\,.$$

Тогда получим следующие две системы интегральных уравнений /формулы (14а) (14б) работы[1]/:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_1(uvt) = {} & \frac{Gg}{16\pi^3}\int_0^1 dx\, x^{\alpha(t)} \iint \frac{du'dv'K(uvu'v'xt)}{(u'+\mu^2)(v'+m^2)}\,\cdot \\
& \cdot\{[m(1+x)+\rho\sqrt{t}]\;\Phi_1(u'v't) - (v'+m^2)\,\Phi_3(u'v't)\}\\
\Phi_3(uvt) = {} & \frac{Gg}{16\pi^3}\int_0^1 dx^{\alpha(t)+1}\iint \frac{du'dv'K(uvu'v'xt)}{(u'+\mu^2)(v'+m^2)}\,\Phi_1(u'v't)\,,
\end{aligned}\right\}\quad (1а)$$

$$\Phi_2(uvt)=\frac{Gg}{16\pi^3}\int_0^1 dx\, x^{\alpha(t)}\iint\frac{du'dv'K(uvu'v'x\ t)}{(u'+\mu^2)(v'+m^2)}\cdot$$

$$\cdot\{[m(1+x)-\rho\sqrt{t}\,]\,\Phi_2(u'v't)-(v'+m^2)\,\Phi_4(u'v't)\}\qquad(1б)$$

$$\Phi_4(uvt)=\frac{Gg}{16\pi^3}\int_0^1 dx\,x^{\alpha(t)+1}\iint\frac{du'dv'K(uvu'v'x\ t)}{(u'+\mu^2)(v'+m^2)}\,\Phi_2(u'v't),$$

где (см.[2])

$$K(u\,v\,u'\,u'\ \ x\,t)=\frac{1}{4}\,\frac{\Theta(H)}{\sqrt{H}},$$

$$H=\Big[-\Big(\frac{u'-v'}{2}-\frac{u-v}{2}x\Big)^2-t(1-x)\,\frac{u'+v'-(u+v)x}{2}-\frac{s_o\,x}{1-x}+\frac{t}{4}(1-x)\Big].$$

и

$$\rho=\frac{t-v'+u'+x(-t+v-u)}{2t}.$$

Решая систему однородных интегральных уравнений (1а,в), получаем две функции: $a^{(+)}(t)$ и $a^{(-)}(t)$ /первая из уравнения (1а) и вторая из уравнения (1б)/. При $t<0$ эти функции являются комплексно-сопряженными. Существование этих двух решений тесно связано со спинорным характером задачи. В работе[1] функции $a^{\pm}(t)$ были связаны с траекториями Редже, принадлежащими семейству связанных состояний с $J=l+1/2$ и $J=l-1/2$ соответственно, продолженными в область отрицательных значений t.

Покажем, что эту связь можно получить, если использовать уравнение Бете-Сольпитера (БС) для волновой функции системы πN. Уравнение, записанное в лестничном приближении для волновой функции, имеет следующий вид:

$$\Psi(p)=\int d^4p'\,V(p,p')\,\frac{[-\gamma\cdot p'+\gamma^o(ip'_o+\frac{E}{2})+m]}{F(p',E)}\,\Psi(p'),\qquad(2)$$

где

$$V(p,p')=\frac{Gg}{2(2\pi)^4}\,\frac{1}{(p-p')^2+(p_o-p'_o)^2+s_o},$$

$$F(p,E)=[p^2+(p_o+i\frac{E}{2})^2+\mu^2]\,[p^2+(p_o-i\frac{E}{2})^2+m^2]$$

(следуя Вику[3], мы совершили поворот пути интегрирования по переменной p'_o). Функция ψ является 4-мерным спинором:

$$\Psi=\binom{\phi}{\chi}.$$

Разложим ϕ и χ по собственным функциям полного углового момента j и орбитального углового момента ℓ:

$$\phi=\sum_{\ell jm}\phi_{j\ell}(p,p_o)\,\Omega_{\ell jm},$$

$$\chi=\sum_{\ell jm}\chi_{j\ell}(p,p_o)\,\Omega_{\ell jm}.$$

Тогда получим следующую систему уравнений для скалярных функций $\phi_{j\ell}$ и $\chi_{j\ell}$ (мы используем следующие свойства функции $\Omega_{jm\ell}$, а именно, $\sigma\cdot p\,\Omega_{j\ell m}=-|p|\,\Omega_{j,2j-\ell,m}$ (см.[4]):

$$\left.\begin{aligned}
&\phi_{j,j-1/2}(p,p_o)=\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp'dp'_o}{F(p,'p'_o;E)}\,V_j^{(-)}(pp_o;p'p'_o)\,\cdot\\
&\cdot[(ip'_o+\frac{E}{2}+m)\,\phi_{j,j-1/2}(p'p'_o)+p'\chi_{j,j+1/2}(p',p'_o)]\\
&\chi_{j,j+1/2}(p,p_o)=\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp'dp'_o}{F(p,'p'_o,E)}\,V_j^{(+)}(pp_o;p'p'_o)\,\cdot\\
&[-(ip'_o+\frac{E}{2}-m)\,\chi_{j,j+1/2}-p'\phi_{j,j-1/2}],
\end{aligned}\right\}(3а)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\phi_{j,j+1/2}(p,p_o)=\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp'dp'_o}{F(p'p'_o,E)}\,V_j^{(+)}(pp_o;p'p'_o)\\
&\cdot[(ip'_o+\frac{E}{2}+m)\,\phi_{j,j+1/2}(p',p'_o)+p'\chi_{j,j-1/2}(p',p'_o)]\\
&\chi_{j,j-1/2}(p,p_o)=\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp'dp'}{F(p',p'_0,E)}\,V_j^{(-)}(pp_0;p'p'_0)\,.\\
&[-(ip'_o+\frac{E}{2}-m)\,\chi_{j,j-1/2}(p',p')-p'\phi_{j,j+1/2}(p',p'_0)],
\end{aligned}\right\}(3б)$$

где

$$V_j^{(\pm)}(p\,p_o;\,p'\,p'_o)=\frac{gG}{2(2\pi)^3}\,\Big(\frac{p'}{p}\Big)\,Q_{j\pm1/2}\Big(\frac{p'^2+p^2+(p_o-p'_o)^2}{2pp'}\Big)$$

Введем далее функции:

$$\phi_{j,j-1/2}=-(ip_o+\frac{E}{2}-m)\,\Psi_1^j-\Psi_2^j,\qquad(4)$$

$$\chi_{j,j+1/2} = p\,\psi_1^j\,,$$
$$\phi_{j,j+1/2} = p\,\psi_3^j\,, \qquad (4)$$
$$\chi_{j,j-1/2} = -\left(ip_o + \frac{E}{2} + m\right)\psi_3^j + \psi_4^j\,.$$

Подставляя (4) в (3а,б), нетрудно получить системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_1^j(p_1\,p_0) &= \int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp'\,dp_o'}{F(p',p_0',E)}\, V_j^{(+)}(p_1'\,p_o';\,p_1\,p_o)\left(\frac{p'}{p}\right)\Psi_2^j(p_1'\,p_o')\\
\Psi_2^j(p_1\,p_o) &= \int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp'\,dp_o'}{F(p,p_o,E)}\,\{\,V_j^{(-)}(p\,p_o';\,p'\,p_o')\,\cdot\\
&\quad \left[\left(-m^2-\left(p_o'-i\frac{E}{2}\right)^2-p^2\right)\Psi_1^j(p',p_o') + \left(ip_o'+\frac{E}{2}+m\right)\Psi_2^j(p',p_o')\right] -\\
&\quad \left(ip_o+\frac{E}{2}-m\right)V_j^{(+)}(p\,p_o;\,p'\,p_o')\left|\frac{p'}{p}\right|\Psi_2^j(p_1'\,p_o')\,\}\,,
\end{aligned}\right\}(5\,а)$$

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_3^j(p_1\,p_o) &= \int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp'\,dp_o'}{F(p_1\,p_o,E)}\, V_j^{(+)}(p\,p_o;\,p\,p_o)\left(\frac{p'}{p}\right)\Psi_4^j(p_1\,p_o)\\
\Psi_4^j(p_1\,p_o) &= \int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp'\,dp_o'}{F(p\,p\,E)}\,\{\,V_j^{(-)}(p\,p_o;\,p'\,p_o')\left[\left(-m^2-\left(p_o'-i\frac{E}{2}\right)^2-\right.\right.\\
&\quad \left.\left.-p^2\right)\Psi_3^j(p',p')-\left(ip_o'+\frac{E}{2}-m\right)\Psi_4^j\right]+\\
&\quad +\left(ip_o+\frac{E}{2}+m\right)V_j^{(+)}(p\,p_o;\,p'\,p_o')\left(\frac{p'}{p}\right)\Psi_4(p',p_o')\,\}\,.
\end{aligned}\right\}(5б)$$

Эти две системы уравнений определяют (путем отыскания нулей соответствующих детерминантов Фредгольма) две функции: $J_1(E)$ и $J_2(E)$. Легко видеть, что $J_1(E) = J_2(-E)$ и что $J_{1,2}(E) = J_{1,2}^*(E^*)$. Поэтому в дифракционной области ($E=\sqrt{t}$ чисто мнимая)

$$J_1(E) = J_2^*(E).$$

Далее, так как J_1 соответствует $\ell = J - 1/2$, а J_2 $\ell = J + 1/2$ (четность состояния определяется индексом ℓ в функции $\phi_{J\ell}$ (см. [4]), то J_1 и J_2, можно сопоставить с траекториями Редже с противоположными четностями. Чтобы доказать, что задача, определенная через уравнения (5 а,б) совпадает с задачей, определенной уравнениями (1а,б), мы используем (как это было сделано Ли и Свифтом[5] для скалярного случая) следующее интегральное представление функции $Q_\ell(\lambda)$:

$$Q_\ell(\lambda) = \int_0^{\lambda-\sqrt{\lambda^2-1}} \frac{\xi^\ell}{[1-2\lambda\,\xi+\xi^2]^{1/2}}\,. \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (5а,б) и производя замену переменных

$$\xi = \frac{p}{p'}\,x\,,$$
$$u' = \left(p_o' + i\,\frac{E}{2}\right)^2 + p'^2\,,$$
$$v' = \left(p' - i\,\frac{E}{2}\right)^2 + p'^2\,,$$

получаем

$$\Psi_{1,3}^j(u,v,t) = \frac{G\,g}{8(2\pi)^3}\iiint\left(\frac{p}{p'}\right)^{j-3/2}\frac{x^{j+1/2}\,\Theta(H)}{\sqrt{H}}\,\cdot\,\frac{dx\,du'\,dv'}{(u'+\mu^2)\,(v'+m^2)}\,\Psi_{2,4}^j(u',v',t)\,,$$

$$\Psi_{2,4}^j(u,v,t) = \frac{G\,g}{8(2\pi)^3}\iiint\left(\frac{p}{p'}\right)^{j-3/2}\frac{x^{j-1/2}}{\sqrt{H}}\,\Theta(H)\,\cdot$$
$$\cdot\,\frac{dx\,du'\,dv'}{(u'+\mu^2)(v'+m^2)}\,\{[\,m(1+x) \pm \rho\sqrt{t}\,]\,\Psi_{2,4}^j(u',v',t) - (v'+m^2)\,\Psi_3^j(u',v',t)\,\}.$$

С точностью до несущественного для решений данной задачи множителя $\left(\frac{p}{p'}\right)^{j-3/2}$ эти уравнения совпадают с уравнениями (1а,б), полученными по МПМ.

Таким образом, с точки зрения исследования траектории фермионных полюсов Редже оба метода (МПМ и БС) являются эквивалентными. При этом функции $\overset{+}{\alpha}(t)$, найденные в работе[1], совпадают с траекториями Редже для семейства связанных состояний $J = \ell \pm 1/2$, вычисленными с помощью уравнения Бете-Сольпитера для парциальных волн.

Л и т е р а т у р а

1. D. Amati, A. Stanghellini and K. Wilson. Nuovo Cim., 28, 639 (1963).
2. L. Bertocchi, S. Fubini and M. Tonin. Nuovo Cim., 25, 626 (1962).
3. G.C. Wick. Phys. Rev., 96, 1124 (1952).
4. А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика, Физматгиз, Москва, 1959.
5. B.W. Lee and A.R. Swift. Nuovo Cim., 27, 1272 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
14 марта 1964 г.