ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

Р-158

В.Цёллнер, О.Хрусталев, В.Серебряков, А.Лезнов

ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ПРОЦЕССА $\pi + N \longrightarrow \pi' + \pi'' + N'$ В ПРИБЛИЖЕНИИ ПОКОЯЩЕГОСЯ НУКЛОНА

Z-t fur naturforsch. 1958, v13a, h7, p 499.

1958 год

Аннотация

С помощью схемы, развитой Н.Н.Боголюбовым, установлено дисперсионное соотношение для процесса $\pi + N \to \pi' + \pi'' + N$ в приближении покоящегося нуклона. Значительная часть ненаблюдаемой области покрыта непрерывным спектром, приближенный учет которого приведет к интегральным уравнениям между эрмитовой и анти-эрмитовой частями амплитуды процесса. Из полученного дисперсионного соотношения можно получить уравнение типа Чу-Лоу, удовлетворяющее всем требованиям симметрии.

I. Введение

В этой работе с помощью метода Н.Н.Боголюбова (I) получаются запаздывающий и опережающий матричные элементы процесса $\pi + N \longrightarrow \pi' + \pi'' + N$ в нерелятивистском случае, после чего становится возможным вывод дисперсионного соотношения.

Недостатки нерелятивистской трактовки нуклона при энергиях, необходимых для рождения мезона при мезон-нуклонном столкновении, очевидны, однако, успехи приближения покоящегося нуклона при упругом рассеянии мезонов оправдывают попытку применения его при рассмотрении реакции рождения π-мезонов.

Известно, что особое преимущество дисперсионных соотношений состоит в том, что для их вывода нет нужды в детальном рассмотрении процесса. Это справедливо и для проведенного здесь нерелятивистского рассмотрения. Для более наглядной интерпретации получаемых величин (вариационные производные S-матрицы и т.п.) мы введем определенный лагранжиан взаимодействия, но легко видеть, что результаты работы не зависят от этого выбора, а имеют общее значение. В особенности это касается полученного в главе У уравнения Чу-Лоу для процесса $\pi + N \longrightarrow \pi' + \pi'' + N'$.

Наши исследования тесно связаны с работами (2), (3) Логунова А.А. и А.Н.Тавхелидзе.

П. Условие причинности; запаздывающий и опережающий матричные элементы

Лагранжиан взаимодействия π-мезонного поля с фиксированным протяженным нуклоном можно написать в следующем виде:

$$L(t) = -J_{\gamma s}(t)\,\varphi_{\gamma s}(t) \tag{2.1}$$

где

$$J_{\gamma s}(t) = \frac{f}{\mu}\,\overset{+}{\psi}(t)\,\tau_s\,\sigma_\gamma\,\psi(t) \tag{2.2}$$

$$\varphi_{\gamma s}(t) = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d\vec{q}}{\sqrt{2E}}\left\{\overset{(+)\gamma}{a}_s(\vec{q})\,e^{iEt} - \overset{(-)\gamma}{a}_s(\vec{q})\,e^{-iEt}\right\}q^\gamma\,v(|\vec{q}|) \tag{2.3}$$

Таким образом, в нашем случае S -матрица является функционалом мезонного поля $\varphi_{\gamma s}(t)$, учитывая это, легко получить соотношения коммутации S -матрицы с операторами рождения и уничтожения мезонов $\overset{(+)\gamma}{a}_s(\vec{q})$ и $\overset{(-)\gamma}{a}_s(\vec{q})$:

$$\left[\overset{(-)\gamma}{a}_s(\vec{q}), S\right] = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\,\frac{v(|\vec{q}|)\,q^\gamma}{\sqrt{2E}}\int e^{iEt}\,\frac{\delta S}{\delta\varphi_{\gamma s}(t)}\,dt$$

$$\left[S, \overset{(+)\gamma}{a}_s(\vec{q})\right] = +\frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\,\frac{v(|\vec{q}|)\,q^\gamma}{\sqrt{2E}}\int e^{-iEt}\,\frac{\delta S}{\delta\varphi_{\gamma s}(t)}\,dt \tag{2.4}$$

Чтобы выяснить физический смысл вариаций S -матрицы по полям $\varphi_{\gamma s}(t) \equiv \varphi(t)$, напишем S -матрицу в виде

$$S = T\left(e^{i\int_{-\infty}^{+\infty} L(t')dt'}\right) \tag{2.5}$$

отсюда

$$\frac{\delta S}{\delta\varphi(t)} = -i\,U(\infty, t)\,J(t)\,U(t, -\infty) \tag{2.6}$$

где $S = S(+\infty, -\infty) = \mathcal{U}(+\infty, t)\mathcal{U}(t, -\infty)$.

Потребуем, чтобы представление взаимодействия и представление Гейзенберга совпадали при $t \longrightarrow +\infty$. Тогда получим

$$i \frac{\delta S}{\delta \varphi(t)} \overset{+}{S} = \mathcal{U}(\infty, t) \jmath(t) \overset{+}{\mathcal{U}}(t, \infty) = j(t) \tag{2.7}$$

где $j(t)$ - ток в представлении Гейзенберга.

Одновременно введем второй ток $\lambda(t)$, определяемый как

$$\lambda(t) \equiv i \frac{\delta \overset{+}{S}}{\delta \varphi(t)} S = -i \overset{+}{S} \frac{\delta S}{\delta \varphi(t)} \tag{2.8}$$

$j(t)$ и $\lambda(t)$ связаны соотношением

$$\lambda(t) = -\overset{+}{S} j(t) S \tag{2.9}$$

В качестве условия причинности для нашего нерелятивистского случая мы возьмем соотношения, следующие из (2.7) и (2.8):

$$\frac{\delta j(t)}{\delta \varphi'(t')} = 0 \qquad \text{при} \quad t' < t \tag{2.10а}$$

$$\frac{\delta \lambda(t)}{\delta \varphi'(t')} = 0 \qquad \text{при} \quad t' > t \tag{2.10в}$$

Формулировка такого условия причинности для поведения системы во времени возможна, так как мы имеем дело с нерелятивистской теорией, которая нелокальна только в пространственном отношении. Условия (2.10а) и (2.10в), конечно, следуют одно из другого, именно: исполь-

-зуя (2.8) и равенство[x)]

$$i\left\{\frac{\delta j(t)}{\delta\varphi'(t')}-\frac{\delta j'(t')}{\delta\varphi'(t)}\right\}=j'(t')j(t)-j(t)j'(t') \qquad (2.11)$$

получаем соотношение

$$\frac{\delta\lambda(t)}{\delta\varphi'(t')}=-\overset{+}{S}\,\frac{\delta j'(t')}{\delta\varphi(t)}\,S \qquad (2.12)$$

Матричный элемент процесса $\pi+N \longrightarrow \pi'+\pi''+N'$ есть

$$S_{2\pi,\pi}=\langle s',\vec q'',\vec q'|S|\vec q,s\rangle=\langle s'|\overset{(-)}{a}{}''(\vec q'')\overset{(-)}{a}{}'(\vec q')S\overset{(+)}{a}(\vec q)|s\rangle \qquad (2.13)$$

$|s\rangle$ и $|s'\rangle$ - состояния нуклона, характеризуемые спином и изотопическим спином и являющиеся вакуумом для мезонов. Коммутируя $\overset{(+)}{a}(\vec q)$ с S-матрицей и операторами $\overset{(-)}{a}(\vec q)$, получаем

$$S_{2\pi,\pi}=\frac{i v\vec q}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E}}\int dt\, e^{-iEt}\langle s',\vec q',\vec q''|\frac{\delta S}{\delta\varphi(t)}|s\rangle.$$

В наблюдаемой области $S|\alpha\rangle=|\alpha\rangle$, где $|\alpha\rangle$ вакуумное или одночастичное состояние. Поэтому в ненаблюдаемой области матричный элемент процесса равен

$$S_{2\pi,\pi}=\frac{v\vec q}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E}}\int dt\, e^{-iEt}\langle s',\vec q'',\vec q'|j(t)|s\rangle \qquad (2.14)$$

Проделывая такую же процедуру с операторами $\overset{(-)}{a}(\vec q)$ и используя трансляционную инвариантность матричных элементов, получим для $S_{2\pi,\pi}$ следующее выражение

---

x) См. (I). Здесь можно сравнить используемую обычно в релятивистском случае форму условия причинности (коммутатор пространственно удаленных операторов равен нулю) с сформулированным Боголюбовым[(I)] общим условием причинности. При переходе к нерелятивистскому случаю первое становится неприменимым, в то время, как форма второго сохраняется.

$$S_{2\pi,\pi} = -2\pi i\delta(E'+E''-E)\frac{\nu\nu'\nu''}{\sqrt{8EE'E''}}T^{ret}_{\beta\alpha}(E',E'') \qquad (2.15)$$

где

$$T^{ret}_{\beta\alpha}(E',E'') = \frac{q\,q'q''}{(2\pi)^{9/2}}\int dt'dt''e^{iE't'+iE''t''}\langle s'|\frac{\delta^2 j(0)}{\delta\varphi'(t')\delta\varphi''(t'')}|s\rangle \qquad (2.16)$$

$\alpha \equiv (q,\gamma,\mathfrak{z},s)$ и $\beta \equiv (\vec{q}',\vec{q}'',\gamma',\gamma'',\mathfrak{z}',\mathfrak{z}'',s')$ характеризуют импульсы, спиновые и изотопические индексы частиц в начальном и конечном состояниях. Для эрмитовски сопряженного матричного элемента $\overset{+}{S}_{2\pi,\pi}$ аналогичным образом получаем

$$\overset{+}{S}_{2\pi,\pi} = +2\pi i\delta(E'+E''-E)\frac{\nu\nu'\nu''}{\sqrt{8EE'E''}}T^{ad}_{\beta\alpha}(E',E'') \qquad (2.17)$$

где

$$T^{ad}_{\beta\alpha}(E',E'') = \frac{\vec{q}\,\vec{q}'\vec{q}''}{(2\pi)^{9/2}}\int dt'dt''e^{iEt'+iE''t''}\langle s'|\frac{\delta^2\lambda(0)}{\delta\varphi'(t')\delta\varphi''(t'')} \qquad (2.18)$$

и

$$T^{ad}_{\beta\alpha} = \overset{+}{T}{}^{ret}_{\beta\alpha}$$

III. Исследование функций $T^{ret}_{\beta\alpha}(E',E'')$ и $T^{ad}_{\beta\alpha}(E',E'')$

Продолжим функцию $T^{ret}(E',E'')$, которая пока определена лишь для действительных $E',E''\geqslant\mu$ на всю область комплексных переменных E',E''. Из условия причинности (2.10а) следует, что $T^{ret}(E',E'')$ – аналитическая функция переменных E',E'' при $\mathrm{Im}\,E'>0$ и $\mathrm{Im}\,E''>0$. Точно также устанавливается что $T^{ad}(E',E'')$ аналитична в области $\operatorname{Im} E'<0,\ \operatorname{Im} E''<0$.

Для получения дисперсионного соотношения необходимо исследовать разность функций (2.16) и (2.18) для вещественных аргументов.

Разность $\bar{T}(E',E) = T^{ret}(E',E'') - T^{ad}(E',E'')$

пропорциональна антиэрмитовой части амплитуды рождения мезонов $T^{ret}(E',E'')$, что устанавливается непосредственно

$$T^{ret} = \frac{1}{2}\left(T^{ret} + \overset{+}{T}{}^{ret}\right) + i\,\frac{1}{2i}\left(T^{ret} - \overset{+}{T}{}^{ret}\right) = D + iA \tag{3.1}$$

и $\overset{+}{T}{}^{ret} = T^{ad}$

Мы напишем $\bar{T}(E',E'')$ в виде

$$\bar{T}_{\beta\alpha}(E',E'') = \frac{q\,q'\,q''}{2(2\pi)^{9/2}}\int dt'\,dt''\,\langle S'| -\frac{\delta}{\delta\varphi''(t'')}\,i\left\{\frac{\delta j(0)}{\delta\varphi'(t')} + \frac{\delta\lambda(0)}{\delta\varphi'(t)}\right\} - \tag{3.2}$$

$$-\frac{\delta}{\delta\varphi'(t')}\,i\left\{\frac{\delta j(0)}{\delta\varphi''(t'')} + \frac{\delta\lambda(0)}{\delta\varphi''(t'')}\right\}|S\rangle\, e^{iE't'+iE''t''} .$$

Используя соотношение (2.12) и условие стабильности начального и конечного состояний нуклона, можно свести матричный элемент (3.2) к сумме членов вида

$$\langle S'|\left\{\frac{\delta j''(t'')}{\delta\varphi''(t'')} + \frac{\delta j'(t')}{\delta\varphi''(t'')}\right\} j(0)|S\rangle .$$

Разлагая эти члены по полной системе функций $|n\rangle$, получим (E', E'' вещественны; $E'+E''=E$)

$$\bar{T}_{\beta\alpha}(E',E'';E) = \frac{\vec{q}\,\vec{q}\,'\vec{q}\,''}{2\cdot(2\pi)^{9/2}}\cdot 2\pi\sum_n\int dt\left\{-\delta(E_n-E)\left(\langle S'|\frac{\delta j(\tau)}{\delta\varphi''(0)}|n\rangle e^{iE'\tau} + \langle S'|\frac{\delta j''(\tau)}{\delta\varphi'(0)}|n\rangle e^{iE''\tau}\right)\right.$$

$$\cdot\langle n|j(0)|S\rangle$$

$$+\delta(E_m+E)\langle s'|j(0)|m\rangle\left(\langle m|\frac{\delta j''(0)}{\delta\varphi'(\tau)}|s\rangle e^{iE'\tau}+\langle m|\frac{\delta j'(0)}{\delta\varphi''(\tau)}|s\rangle e^{iE''\tau}\right)$$

$$+\delta(E_m+E')\left(\langle s'|\frac{\delta j''(\tau)}{\delta\varphi(0)}|m\rangle e^{iE''\tau}+\langle s'|\frac{\delta j(\tau)}{\delta\varphi''(0)}|m\rangle e^{-iE\tau}\right)\langle m|j(0)|s\rangle$$

$$-\delta(E_m-E')\langle s'|j'(0)|m\rangle\left(\langle m|\frac{\delta j(0)}{\delta\varphi''(\tau)}|s\rangle e^{iE''\tau}+\langle m|\frac{\delta j''(0)}{\delta\varphi(\tau)}|s\rangle e^{-iE\tau}\right)$$

$$+\delta(E_m+E'')\left(\langle s'|\frac{\delta j'(\tau)}{\delta\varphi(0)}|m\rangle e^{iE'\tau}+\langle s'|\frac{\delta j(\tau)}{\delta\varphi'(0)}|m\rangle e^{-iE\tau}\right)\langle m|j''(0)|s\rangle$$

$$-\delta(E_m-E'')\langle s'|j''(0)|m\rangle\left(\langle m|\frac{\delta j(0)}{\delta\varphi(\tau)}|s\rangle e^{-iE\tau}+\langle m|\frac{\delta j(0)}{\delta\varphi'(\tau)}|s\rangle e^{iE'\tau}\right)\Bigg\}. \quad (3.3)$$

Соотношение (3.3) удовлетворяет требованиям условия симметрии (перестановки порожденных мезонов, Grossing - симметрия, см. главу У).

Для вывода дисперсионного соотношения мы перейдем к новым переменным

$$E=E'+E'',\ \Delta=E'-E'',\ \text{т.е.}\ E'=\frac{1}{2}(E+\Delta),\ E''=\frac{1}{2}(E-\Delta) \quad (3.4)$$

Очевидно, что при действительном Δ $T^{ret}(E,\Delta)$ аналитическая функция E при $\Im m E>0$ а $T^{ad}(E,\Delta)$ аналитична в области $\Im m E<0$. В дальнейшем мы будем считать Δ действительным параметром и писать дисперсионное соотношение по переменной E.

Исследуем поведение $\tilde{T}(E,\Delta)$ на линии $\Im m\, E=0$.

Если пренебречь электромагнитным и слабым взаимодействиями и предположить, что $|\Delta|<\mu$, то получим энергетический спектр, изображенный на рис.I.

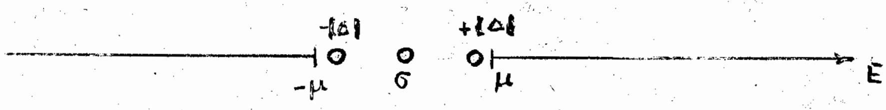

Рис.I. Энергетический спектр для случая $|\Delta|<\mu$.

В точках $E=0, \pm\Delta$ $\tilde{T}(E,\Delta)$ имеет δ-особенности вклад однонуклонного члена разложения (3.3). Вправо и влево от точек $|E|=\mu$ простирается непрерывный спектр. В интервале $|E|<\mu$ имеются конечной длину отрезки, на которых $T^{ret}(E,\Delta)=T^{ad}(E,\Delta)$. Поскольку $T^{ret}(E,\Delta)$ аналитична при $\Im m\, E>0$, а $T^{ad}(E,\Delta)$ при $\Im m\, E<0$, то совокупность функций T^{ret} и T^{ad} представляет собой функцию

$$\tilde{T}(E,\Delta)=\begin{cases} T^{ret}(E,\Delta) & \text{при } \Im m\, E>0 \\ T^{ad}(E,\Delta) & \text{при } \Im m\, E<0 \end{cases}$$

аналитическую во всей комплексной плоскости аргумента E за исключением линий разреза $|\mathrm{Re}\, E|>\mu$ и точек $E=0,\pm\Delta$, где она имеет простые полюса. При $\mu<|\Delta|<2\mu$ границы непрерывного спектра расширяются и он захватывает точки $E=\pm\Delta$, однако, построение функции $\tilde{T}$ все еще возможно, и, наконец, при $|\Delta|\geq 2\mu$ границы непрерывного спектра смыкаются и построение функции $\tilde{T}$ становится невозможным.

IУ. Дисперсионное соотношение

Если мы предположим, что амплитуда процесса $\pi + N \to \pi' + \pi'' + N'$ при $E \to \infty$ убывает как $\frac{1}{E}$ или быстрее[x)], то можно применить к $\tilde{T}(E,\Delta)$ интегральную формулу Коши в форме

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z')}{z' - z}\, dz' .$$

В результате получим дисперсионное соотношение

$$D_{\beta\alpha}(E,\Delta) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_{\beta\alpha}(\varepsilon,\Delta)}{\varepsilon - E}\, d\varepsilon \qquad (4.I)$$

где $D_{\beta\alpha}(E,\Delta)$ и $A_{\beta\alpha}(E,\Delta)$ являются эрмитовой и антиэрмитовой частями амплитуды процесса.

Если амплитуда при $E \to \infty$ убывает медленнее, чем $\frac{1}{E}$ то также можно непосредственно указать дисперсионное соотношение, причем для устранения вклада полюса на бесконечности нужно использовать метод вычитания, известный из дисперсионных соотношений для упругого рассеяния.

Физическая область интегрирования в (4.I) определяется неравенством $E \geqslant |\Delta| + 2\mu$. Это неравенство получается вследствие того, что в дисперсионном соотношении фиксируется разность $E' - E'' = \Delta$.

x) В главе У мы увидим, что такое предположение приводит к обычно используемым уравнениям Чу-Лоу.

Устранение интегрирования по отрицательным энергиям достигается применением соотношений[x)]

$$\bar{T}_{\beta\alpha}(-E,\Delta) = P(N,N')\bar{T}_{\alpha\beta}(E,-\Delta)$$

или

$$A_{\beta\alpha}(-E,\Delta) = P(N,N')\overset{*}{A}_{\beta\alpha}(E,-\Delta) \qquad (4.2)$$

$P(N,N')$ представляет спиновые и изотопические индексы начального и конечного состояний, $\overset{*}{A}_{\beta\alpha}$ есть комплексно-сопряженный матричный элемент $A_{\beta\alpha}$. Как видно из рис.I, ненаблюдаемая область $|E|<|\Delta|+2\mu$ содержит для $|\Delta|<\mu$ три изолированных полюса и участок непрерывного спектра в области $\mu\leq|E|<|\Delta|+2\mu$. Расчет вклада однонуклонного члена дает в случае $|\Delta|<\mu$ следующее выражение

$$I(E',E'',E) \equiv \frac{1}{\pi}P\int_{-\mu}^{+\mu}\frac{A_{\beta\alpha}(\varepsilon,\Delta)}{\varepsilon-E}d\varepsilon$$

$$=\sum_{\sigma}\Big\{\frac{1}{E}\Big(D^{\tau'\tau''}_{s'\sigma}\big(\tfrac{\Delta}{2}\big)t_{\sigma s}+t_{s'\sigma}D^{\tau'\tau''}_{\sigma s}\big(\tfrac{\Delta}{2}\big)\Big)$$

$$-\frac{1}{E'}\Big(D^{\tau\tau''}_{s'\sigma}(\Delta)t'_{\sigma s}+t'_{s'\sigma}D^{\tau\tau''}_{\sigma s}(\Delta)\Big)$$

$$-\frac{1}{E''}\Big(D^{\tau'\tau}_{s\sigma}(\Delta)t''_{\sigma s}+t''_{s\sigma}D^{\tau'\tau}_{\sigma s}(\Delta)\Big) \qquad (4.3)$$

где

$$D^{\tau'\tau''}_{s'\sigma}(\varepsilon)=\frac{\vec{q}\,'\vec{q}\,''}{(2\pi)^3}\int d\tau\, e^{i\varepsilon\tau}\langle s'|\frac{\delta j''(0)}{\delta\varphi'(\tau)}+\frac{\delta j'(\tau)}{\delta\varphi''(0)}|\sigma\rangle$$

---

x) См.главу У.

эрмитова часть амплитуды упругого рассеяния π -мезонов на нуклонах в π приближении фиксированного нуклона (3). Для энергии $\varepsilon > \mu$ D может быть вычислена с помощью дисперсионного соотношения для этого процесса. $t_{\sigma s}$ означает следующую величину

$$t_{\sigma s} = i \frac{\vec{q}}{(2\pi)^{3/2}} \langle \sigma | j(0) | s \rangle$$

Непрерывный спектр ненаблюдаемой области содержит вклады членов с $n = 1$ и $n = 2$. Вклады состояний с $n = 2$ дают только два первых члена разложения (3.3).

Дисперсионное соотношение, таким образом, принимает форму

$$D_{\beta\alpha}(E', E'', E) = \frac{1}{\pi} P \int\limits_{|\Delta|+2\mu}^{\infty} \left\{ \frac{A_{\beta\alpha}(\varepsilon, \Delta)}{\varepsilon - E} - \frac{P(N,N')\overset{*}{A}_{\beta\alpha}(\varepsilon, -\Delta)}{\varepsilon + E} \right\} d\varepsilon + I(E', E''; E)$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} P \int\limits_{\mu}^{|\Delta|+2\mu} \left\{ \frac{\bar{T}_{\beta\alpha}(\varepsilon, \Delta)}{\varepsilon - E} - \frac{P(N,N')\bar{T}_{\alpha\beta}(\varepsilon, -\Delta)}{\varepsilon + E} \right\} d\varepsilon$$

(4.4)

где $|\Delta| < \mu$.

Если выразить возникающие в последнем интеграле члены формы $\langle \sigma, \vec{q}_1 | \frac{\delta j''}{\delta \varphi'} | s \rangle$ через эрмитову и антиэрмитову части амплитуды рождения и пренебречь вкладом члена с $n = 2$ в ненаблюдаемой области, то можно получить интегральные уравнения между величинами $D_{\beta\alpha}(E, \Delta)$ и $A_{\beta\alpha}(E, \Delta)$. Принципиально возможно получить $T^{ret}_{\beta\alpha}(E,\Delta)$ из интегральных уравнений. Однако, из этого рассмотрения видно, что полученные дисперсионные соотношения для процесса $\pi + N \longrightarrow \pi' + \pi'' + N'$ нельзя исследовать по известному методу, применяемому для упругого рассеяния из-за непрерывного спектра, простирающегося в ненаблюдаемую область. Дело усложняется также отсутствием "оптической теоремы" $\left(A^{\gamma\pi} = \frac{k}{4\pi}\sigma\right)$ для рассматриваемого процесса.

У. Уравнение Чу-Лоу

С помощью полученных соотношений легко вывести уравнения типа Чу-Лоу для процесса $\pi + N \longrightarrow \pi' + \pi'' + N'$. Для этого мы перейдем от матричных элементов типа $\langle S' | \frac{\delta j'}{\delta\varphi''} | \rangle$ в разложении (3.3) к причинным матричным элементам. Это достигается путем соответствующих сложений и вычитаний выражений типа $\langle S' | j'' j' | S \rangle$ и использования соотношений (см. /1/)

$$i \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi'\delta\varphi''} S^+ = \frac{\delta j'}{\delta\varphi''} - i j' j''$$

$$-i S \frac{\delta^2 S^+}{\delta\varphi'\delta\varphi''} = \frac{\delta j'}{\delta\varphi''} + i j'' j' .$$

В результате правая часть (3.3) приведется к сумме членов типа

$$-2\pi \sum_m \delta(E_m - E) \int d\tau \frac{\vec{q}\,'\vec{q}\,''}{(2\pi)^3} \langle S' | -i \frac{\delta^2 S^+}{\delta\varphi''(\tau)\delta\varphi'(0)} | m \rangle e^{iE''\tau} \frac{q}{(2\pi)^{3/2}} \langle m | i \frac{\delta S}{\delta\varphi(0)} | S \rangle$$

$$= -2\pi i \sum_m \delta(E_m - E) \overset{+}{T}(E', E''; E_m) T(E_m, E).$$

Если подставить полученное таким образом выражение для A в дисперсионное соотношение (4.I) и использовать соотношение $\frac{1}{x+i\delta} = P\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$ то для $T^{\text{rel}} = T = D + iA$ получается следующее соотношение

$$T_{\beta\alpha}(E',E'',E) = -\sum_m \left\{ \frac{(\overset{+}{T}(\varepsilon',\varepsilon'',E_m)\,T(E_m,\varepsilon))_{\varepsilon=E_m}}{E_m - E - i\delta} - \frac{(\overset{+}{T}(-\varepsilon,E_m)\,T(E_m,-\varepsilon'-\varepsilon''))_{\varepsilon=-E_m}}{E_m + E + i\delta} \right.$$

$$+ \frac{(\overset{+}{T}(-\varepsilon,\varepsilon'',E_m)\,T(E_m,-\varepsilon'))_{\varepsilon'=-E_m}}{E_m + E' + i\delta} - \frac{(\overset{+}{T}(\varepsilon',E_m)\,T(E_m,\varepsilon,-\varepsilon''))_{\varepsilon'=E_m}}{E_m - E' - i\delta} \qquad (5.1)$$

$$\left. + \frac{(\overset{+}{T}(\varepsilon',-\varepsilon,E_m)\,T(E_m,-\varepsilon''))_{\varepsilon''=-E_m}}{E_m + E'' + i\delta} - \frac{(\overset{+}{T}(\varepsilon'',E_m)\,T(E_m,-\varepsilon',\varepsilon))_{\varepsilon=E_m}}{E_m - E'' - i\delta} \right\}.$$

~~(5.I)~~

Заметим, что при выводе (5.I) сделаны два важных допущения:

I) амплитуда $T_{\beta\alpha}(E',E'';E)$ при $E \longrightarrow \infty$ убывает как $\frac{1}{E}$ или быстрее;

2) разность $|E' - E''| < 2\mu$, так как дисперсионные соотношения при нашем способе вывода могут быть получены лишь при $|\Delta| < 2\mu$.

Значения E' и E'' даются (3.4), $\varepsilon' \equiv \frac{1}{2}(\varepsilon + \Delta)$, $\varepsilon'' \equiv \frac{1}{2}(\varepsilon - \Delta)$.

Соотношение (4.I) удовлетворяет необходимым для процесса условиям симметрии (перестановка порожденных мезонов и Crossing - симметрия).

Можно убедиться в справедливости соотношения

$$T_{\beta\alpha}(E',E'',E) = P(\pi',\pi'')\,T_{\beta\alpha}(E'',E',E) \qquad (5.2)$$

$P(\pi', \pi'')$ является оператором перестановки изотопических индексов порожденных мезонов. Для проверки Grossing -симметрии запишем $T_{\beta\alpha}(E'E'', E)$ в форме $T_{\beta\alpha}(z', z'', z)$, причем замена E на z означает величины +E, стоящие в знаменателе, получают мнимую добавку $+i\delta$. Непосредственно из (5.1) вытекают следующие соотношения

$$T_{\beta\alpha}(z', z'', z) = P(\pi, \pi')\, T_{\beta\alpha}(-z, z'', -z')$$

$$= P(\pi, \pi'')\, T_{\beta\alpha}(z', -z, -z'') \qquad (5.3)$$

Рассматривая матричный элемент $T_{\alpha\beta}(E, E', E'')$ для обратного процесса $\pi' + \pi'' + N' \longrightarrow N + \pi$, получаем соотношение

$$T_{\beta\alpha}(E', E'', E) = -P(N, N')\, \overset{+}{T}_{\alpha\beta}(-E, -E', -E'')$$

из которого следует

$$T_{\beta\alpha}(z', z'', z) = -P(N, N')\, T_{\alpha\beta}(-z, -z', -z'')$$

$$= -P(N, N')\, P(\pi, \pi')\, T_{\alpha\beta}(z', z, -z'') \qquad (5.4)$$

$$= -P(N, N')\, P(\pi, \pi'')\, T_{\alpha\beta}(z'', -z', z).$$

Условия симметрии (5.2-4) выполняются для каждого отдельного члена суммы (5.1).

Далее надо иметь в виду, что соотношение (3.4) можно понимать как условие унитарности для T -матрицы, которое учитывает симметричные свойства этого процесса. Следовательно, соотношение (5.1) удовлетворяет этому условию унитарности. Обычная форма условия унитарности

$$\overset{+}{T}_{\beta\alpha}(E) - T_{\beta\alpha}(E) = 2\pi i \sum_{m} \delta(E_m - E)\, \overset{+}{T}_{\beta m}(E, E_m)\, T_{m\alpha}(E_m, E) \qquad (5.5)$$

например, в случае упругого рассеяния, инвариантна относительно замены $z \to -z \; (z = E + i\varepsilon)$, $\alpha \rightleftarrows \beta$, которая выражает Grossing - симметрию [4] (индексы нуклонов в этом случае не переставляются). Эта замена, оставляя левую сторону (5.5) инвариантной, заменяет в правой стороне E на -E, i на $-i$. Если при выводе условия унитарности равноправно использовать к выражения $T_{\beta\alpha}(z) = P(N,N')T_{\alpha\beta}(-z)$ (или $T_{\beta\alpha}(E) = P(N,N')\overset{+}{T}_{\alpha\beta}(-E)$), то в выражении для условия унитарности добавится новый член $-2\pi i \sum_m \delta(E_m + E) P(N,N') \overset{+}{T}_{\alpha m}(-E, E_m) T_{m\beta}(E_m, E)$. Возникающее таким образом выражение для условия унитарности инвариатно по отношению к вышеуказанной замене.

Возникающие в случае рождения π-мезонов дополнительные свойства симметрии при использовании формализма Н.Н.Боголюбова учитываются автоматически. Т-матрица этого процесса удовлетворяет условиям (5.2-4). Если использовать эти выражения для вывода условия унитарности, то оно принимает вид (3.4).

Условия Чу-Лоу для процесса $\pi + N \to \pi' + \pi'' + N'$ выводились уже некоторыми авторами (5.9) (и частично исследовались в одноб мезонном приближении), но без исследования аналитических свойств используемых функций. Наши исследования, которые учитывают аналитические свойства функций, отличаются от этих работ в основном следующими пунктами:

1) Благодаря использованию дисперсионных соотношений для вывода (5.1) выполняется закон сохранения энергии и для эрмитовой части амплитуды.

2) Установлено, что соотношение (5.1) действительно лишь при условии, что $T_{\beta\alpha}$ убывает как $\frac{1}{E}$ или быстрее при $E \to \infty$. Если при высоких энергиях $T_{\beta\alpha}$, например, пропорциональна E, то

нужно использовать дисперсионное соотношение, соответствующее этому предположению. Для устранения возникающего при этом полинома первой степени нужно применить метод, известный из дисперсионных соотношений для упругого рассеяния. При использовании обрезающего фактора $V(|\vec{q}_1|)$, связанного с приближением покоящегося протяженного нуклона всегда можно предполагать, что $T_{el} \sim \frac{1}{E}$ при $E \to \infty$ так что в этом случае можно ограничиться простейшим предположением.

Авторы благодарны академику Н.Н.Боголюбову за постоянный интерес к их работе, они благодарят А.А.Логунова и А.Н.Тавхелидзе за многочисленные подробные обсуждения. Один из авторов (В.И.) благодарен Ф.Каплун за ценные дискуссии.

(1) Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков "Введение теории квантованных полей".

Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, М.К.Поливанов "Вопросы теории дисперсионных соотношений" (в печати).

(2) А.А.Логунов, ДАН (в печати).

(3) А.А.Логунов, А.Н.Тавхелидзе, Сообщения АН Груз.ССР, 18, 19 (1957); 18, 533 (1957).

(4) Chew, Low, Phys. Rev. 101, 1570 (1956).

(5) Barshay, Phys.Rev. 104, 1102 (1956).

(6) Franklin, Phys. Rev. 105, 1101 (1957).

(7) Omnes, Nuovo Cim. V, 983 (1957).

(8) Redberg, Phys. Rev. 106, 1090 (1957).

(9) Omnes, Nuovo Cim. VI, 780 (1957).