ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.В. Пашкевич, Р.А. Сардарян

Р-1574

ВОЗБУЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ НЕАКСИАЛЬНЫХ НЕЧЕТНЫХ АТОМНЫХ ЯДЕР

Дубна 1964

В.В. Пашкевич, Р.А. Сардарян

Р-1574

ВОЗБУЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ НЕАКСИАЛЬНЫХ НЕЧЕТНЫХ АТОМНЫХ ЯДЕР

Направлено в "Изв. АН СССР" и

"Nuclear Physics"

Дубна 1964

В в е д е н и е

За последнее время было выполнено несколько работ [3-6], посвященных исследованию энергетических состояний несферических нечетных атомных ядер. В большинстве этих работ энергетические состояния нечетных ядер подразделяются на одночастичные и коллективные, по аналогии с четно-четными ядрами.

В несферических четно-четных ядрах коллективные возбуждения можно исследовать в адиабатическом приближении , т.е. считая, что при коллективных возбуждениях одночастичные состояния не меняются. Это возможно, так как спектр одночастичных состояний отделен от основного состояния "щелью" порядка 2 Мэв.

Однако адиабатическое приближение, при котором вращение ядра исследуется при фиксированном состоянии внешнего нуклона, в нечетных ядрах является грубым и во многих случаях мало оправданным, так как энергия одночастичных состояний в нечетных ядрах одного порядка с энергией вращения и колебания поверхности. В качестве модели нечетного ядра часто рассматривается система, состоящая из остова и движущегося в его поле внешнего нуклона. Равновесная форма апроксимируется либо эллипсоидом вращения, либо трехосным эллипсоидом. Внешний нуклон движется в несферическом поле остова, поэтому, вообще говоря, ни полный момент, ни его проекция на любое направление, связанное с ядром, не сохраняются. Но если не существует близких друг к другу состояний с разными орбитальными моментами ℓ и при условии сильной спин-орбитальной связи, угловой момент внешнего нуклона можно приближенно считать хорошим квантовым числом.

Таким образом, приближения, используемые в теории нечетных атомных ядер, можно схематически представить в виде следующей таблицы:

	адиабатическое приближение, j – не сохраняется	отказ от адиабатики, j сохраняется
аксиальная теория	1. Нильссон [1] 2. Моттельсон, Нильссон [2]	Давыдов, Сардарян [3,4]
неаксиальная теория	1. Гехт, Сачлер [5] 2. Персон, Расмуссен [6] 3. Ньютон [7].	настоящая работа

В первой строке таблицы даны ссылки на теории с аксиально-симметричным полем остова, во второй строке - с неаксиальным полем остова. В первом столбце указаны теории, использующие адиабатическое приближение, во втором - теории, которые не разделяют одночастичные и коллективные возбуждения, однако при этом вводится ограничение, от которого свободны адиабатические теории, а именно: момент внешнего нуклона считается хорошим квантовым числом.

Модель ядра с фиксированным моментом j внешнего нуклона позволила удовлетворительно описать /3,4/ единым образом несколько вращательных полос в рамках аксиальной теории с учетом малых отклонений от аксиальной симметрии. Дальнейшим естественным развитием теории /3,4/ является распространение ее на случай неаксиального поля остова.

В настоящей работе рассчитывается последовательность спинов и энергии возбужденных состояний нечетных атомных ядер без разделения возбуждений на одночастичные и коллективные при следующих предположениях. Равновесная форма остова апроксимируется трехосным эллипсоидом. Деформация остова описывается в переменных $\beta \gamma \theta_i$; где β и γ характеризуют форму поверхности остова, θ_i - углы Эйлера, которые определяют ориентацию ядра в пространстве. Поверхность ядра может совершать малые β- и γ -колебания относительно равновесных значений $\beta_0 \neq 0$ и $\gamma_0 \neq 0$. Момент j внешнего нуклона сохраняется. Рассматриваются ядра, спин основного состояния которых равен 5/2. Ядра, спин основного состояния которых равен 1/2 и 3/2 требуют специального исследования /см., например, /8,9/ /. Развиваемая теория в принципе применима и к ядрам, спин основного состояния которых больше 5/2.

Получены формулы, позволяющие рассчитать последовательность спинов и энергии возбужденных состояний нечетных ядер через некоторое число параметров. В адиабатическом приближении по β - колебаниям поверхности ядра формулы значительно упрощаются. Последовательность спинов и энергии возбужденных вращательно-одночастичных состояний выражаются через два параметра и рассчитывались на электронно-счетных вычислительных машинах. Результаты теории сравниваются с экспериментальными данными.

§ 1. Уравнения модели

При малых отклонениях от равновесных значений $\beta_0 \neq 0$, $\gamma_0 \neq 0$ возбужденные состояния рассматриваемой системы определяются уравнением Шредингера

$$(H_v + H_{rot} + H_p(x) + H_{int} - E)\Psi = 0 , \qquad /1/$$

где $H_p(x)+H_{int}$ – оператор Гамильтона внешнего нуклона в поле остова ядра; $H_p(x)$ учитывает центрально-симметричную часть поля;

$$H_{int} = -T(r)\beta\{\cos\gamma\,(3\hat{j}_3^2-\hat{\vec{j}}^2)+\sqrt{3}\sin\gamma\,(\hat{j}_1^2-\hat{j}_2^2)\}- \qquad /2/$$

оператор, учитывающий несферическую часть поля остова ядра; r – расстояние нуклона от центра ядра; $\hat{j}_1$, $\hat{j}_2$, $\hat{j}_3$ – операторы проекций углового момента внешнего нуклона на оси координатной системы, связанной с ядром; x – пространственные и спиновые координаты нуклона;

$$H_v = -\frac{\hbar^2}{2B\beta^2}\{\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\beta}(\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta})+\frac{1}{\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}(\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma})\}- \qquad /3/$$

$$-\frac{C}{2}(\beta-\beta_0)^2-\frac{B\omega_\gamma^2\beta_0^2}{2}(\gamma-\gamma_0)^2 -$$

оператор, характеризующий β – и γ – колебания поверхности остова ядра;

$$H_{rot} = \frac{\hbar^2}{8B\beta^2}\sum_{\kappa=1}^{3}\frac{(\hat{I}_\kappa-\hat{j}_\kappa)^2}{\sin^2(\gamma-\frac{2\pi}{3}\kappa)} - \qquad /4/$$

оператор вращательной энергии ядра; $\hat{\vec{I}}$, $\hat{I}_1$, $\hat{I}_2$, $\hat{I}_3$ – соответственно операторы полного углового момента и его проекции на оси координат, связанные с ядром. Оператор вращательной энергии удобно представить в виде:

$$H_{rot} = \frac{\hbar^2}{6B\beta^2}\{\Gamma_1(\gamma)[\hat{\vec{I}}^2+\hat{\vec{J}}^2-\hat{I}_3^2-\hat{j}_3^2]-$$

$$-2\Gamma_1(\gamma)(\hat{I}_1\hat{j}_1+\hat{I}_2\hat{j}_2)-2\Gamma_2(\gamma)(\hat{I}_1\hat{j}_1-\hat{I}_2\hat{j}_2)+ \qquad /5/$$

$$+\Gamma_2(\gamma)(\hat{I}_1^2-\hat{I}_2^2)+\Gamma_2(\gamma)(\hat{j}_1^2-\hat{j}_2^2)+\tfrac{1}{4}\Gamma_3(\gamma)(\hat{I}_3-\hat{j}_3)^2\},$$

где

$$\Gamma_1(\gamma) = \frac{3\sin^2\gamma}{\sin^2 3\gamma}(2+\cos 2\gamma),\quad \Gamma_2(\gamma) = -\frac{3\sqrt{3}\sin^2\gamma}{\sin^2 3\gamma}\sin 2\gamma,\ \Gamma(\gamma)=\frac{3}{\sin^2\gamma}. \qquad /6/$$

Оператор Гамильтона уравнения /1/ коммутирует с оператором квадрата полного момента ядра. Волновая функция уравнения /1/, удовлетворяющая необходимым условиям симметрии[8], может быть записана в виде:

$$\Psi^{IJ} = F^{IJ}(\beta)\,\Phi^{IJr}(x,\gamma,\theta_i). \qquad /7/$$

Тогда β – колебания можно приближенно рассматривать независимо. Для β – колебаний получается следующее уравнение:

$$\left\{\frac{\hbar^2}{2B}\frac{d^2}{d\beta^2} - W_\Lambda(\beta) + (E - E_{j\tau})\right\}\beta^2 F_\Lambda^{Ij}(\beta) = 0, \qquad /8/$$

где

$$W_\Lambda(\beta) = \frac{C}{2}(\beta-\beta_0)^2 + \frac{\hbar^2(\Lambda + 2)}{2B\beta^2} \qquad /9/$$

играет роль потенциальной энергии; Λ – параметр разделения переменных; $E_{j\tau}$ – энергия внутреннего состояния, соответствуюшая оператору $H_p(x)$. Уравнение, относящееся к другим переменным системы, имеет вид:

$$(\hat{L} + \hat{\Omega} - \Lambda)\Phi^{Ij\tau}(x, \gamma, \theta_i) = 0 , \qquad /10/$$

где

$$\hat{L} = -\frac{1}{\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right) + D(\gamma-\gamma_0)^2,$$

$$\hat{\Omega} = -\frac{1}{3\xi}\left\{\cos\gamma[3\hat{j}_3^2 - \vec{j}^2] + \sqrt{3}\sin\gamma(\hat{j}_1^2 - \hat{j}_2^2)\right\} + \qquad /11/$$

$$+\frac{1}{3}\left\{\Gamma_1(\gamma)[\vec{I}^2 + \vec{j}^2 - \hat{I}_3^2 - \hat{j}_3^2) - 2\Gamma_1(\gamma)(\hat{I}_1\hat{j}_1 + \hat{I}_2\hat{j}_2) - \right. \qquad /12/$$

$$\left. - 2\Gamma_2(\gamma)(\hat{I}_1\hat{j}_1 - \hat{I}_2\hat{j}_2) + \Gamma_2(\gamma)(\hat{I}_1^2 - \hat{I}_2^2) + \Gamma_2(\hat{j}_1^2 - \hat{j}_2^2) + \tfrac{1}{4}\Gamma_3(\gamma)(\hat{I}_3 - \hat{j}_3)^2\right\},$$

$$D = \left(\frac{B\omega_\gamma\beta_0^2}{\hbar}\right)^2 , \qquad \xi = \frac{\hbar^2}{6B\beta_0^3\langle T\rangle} . \qquad /13/$$

В гамильтониане взаимодействия /2/ $T(r)$ заменен его средним значением $\langle T\rangle$ по внутренним состояниям внешнего нуклона и нулевым колебанием поверхности ядра.

При фиксированных значениях $j\tau$ уравнение /10/ позволяет вычислить параметр Λ для каждого значения полного углового момента системы, характеризуемого квантовым числом $I = 1/2, 3/2, \ldots$ С помощью найденных значений Λ можно из уравнения /8/ вычислить разности энергии $E - E_{j\tau}$, которые будут определять возбужденные состояния системы, соответствующие внутреннему состоянию $E_{j\tau}$.

§ 2. Вычисление параметров Λ

Введем новую функцию

$$\Psi = \sqrt{|\sin 3\gamma|}\,\Phi , \qquad /14/$$

тогда вместо уравнения /10/ можно получить следующее уравнение для функции Ψ:

$$[\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} + \frac{9}{4} + \frac{9}{4\sin^2 3\gamma} - D(\gamma-\gamma_0)^2 - \hat{\Omega}(\gamma\theta_i) + \\ + \Lambda]\Psi(\gamma\theta_i) = 0. \qquad /15/$$

Допустим, что оператор $\Omega(\gamma\theta_i)$ мало меняется при колебаниях поверхности остова ядра около положения равновесия γ_0. Тогда можно заменить оператор $\Omega(\gamma\theta_i)$ его значением при $\gamma=\gamma_0$. Сделав замену переменных $z=\gamma-\gamma_0$ и заменив еще $\sin 3\gamma$ его значением при $\gamma=\gamma_0$, получим вместо /15/ следующее уравнение:

$$[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - Dz^2 - \hat{\Omega}(\gamma_0\theta_i) + \Lambda']\Psi(z\theta_i) = 0, \qquad /16/$$

где

$$\Lambda' = \Lambda + \frac{9}{4} + \frac{9}{4\sin^2 3\gamma_0}. \qquad /17/$$

В уравнении /16/ переменные z и θ_i разделяются. Ищем решение уравнения /16/ в виде

$$\Psi(z\theta_i) = g(z)u(\theta_i). \qquad /18/$$

Получаем два уравнения:

$$[\hat{\Omega}(\gamma_0\theta_i) - \epsilon]u(\theta_i) = 0 \qquad /19/$$

и

$$[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - Dz^2 + \mathfrak{L}]g(z) = 0, \qquad /20/$$

где

$$\mathfrak{L} = \Lambda' - \epsilon. \qquad /21/$$

Решения уравнения /19/ ищутся в виде

$$u^{I\tau}(\theta_i) = \sum_{K,m} A^{\tau}_{K,m}(\gamma_0)\,|IjKm>, \qquad /22/$$

где

$$|IjKm> = \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi^2}}\,\{D^I_{MK}(\theta_i)\phi^{j\tau}_{K-2m}(x) + \\ + (-1)^{I+j} D^I_{M,-K}(\theta_i)\phi^{j\tau}_{2m-K}(x)\}, \qquad /23/$$

K – проекция углового момента ядра на ось 3, связанную с ядром; $\Omega = K - 2m$ – проекция углового момента внешнего нуклона на ту же самую ось. Здесь использованы свойства симметрии волновых функций нечетных ядер, согласно которым

$$K - \Omega = 2m, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{24}$$

В выражении /22/ суммирование по K производится по значениям $K = 1/2, 3/2, \ldots$, суммирование по m производится по целочисленным значениям m, удовлетворяющим неравенству $1/2 - j \le 2m \le I + j$; причем $|K - 2m| \le j$; $\phi^{j\tau}_{\Omega}(x)$ – собственные функции оператора $H_p(x)$, соответствующие собственным значениям $E_{j\tau}$; τ характеризует другие квантовые числа. Подставляем /22/ в /19/, получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{K,m} a^{K'm'}_{Km} A_{Km}(\gamma_0) - \epsilon(I) A_{K'm'}(\gamma_0) = 0 . \tag{25}$$

Для того, чтобы система /25/ имела нетривиальные решения, необходимо, чтобы равнялся нулю следующий детерминант:

$$\| a^{K'm'}_{Km}(\gamma_0) - \epsilon(I)\,\delta_{K'K}\,\delta_{m'm} \| = 0 , \tag{26}$$

где

$$a^{K'm'}_{Km}(\gamma_0) = \langle IjK'm' | \hat{\Omega} | IjKm \rangle , \tag{27}$$

т.е. матричные элементы оператора $\hat{\Omega}(\gamma_0 \theta_i)$ на базисных функциях /23/. Отличные от нуля матричные элементы оператора $\hat{\Omega}(\gamma_0 \theta_i)$ имеют вид:

$$\langle IjKm | \hat{\Omega} | IjKm \rangle = \frac{1}{3}\Gamma_1(\gamma_0)\{[I(I+1) + j(j+1) - K^2 - (K-2m)^2] - (-1)^{I-j}(I+½)(j+½)\delta_{K½}\delta_{m0}\} + \frac{1}{3}\Gamma_3(\gamma_0) m^2 - \frac{\cos\gamma_0}{3\xi}[3(K-2m)^2 - j(j+1)] ; \tag{28}$$

$$\langle IjKm | \hat{\Omega} | IjK \pm 1, m \rangle = -\frac{1}{3}\Gamma_1(\gamma_0) \times \sqrt{(j \mp K \pm 2m)(j \pm K \mp 2m + 1)(I \mp K)(I \pm K + 1)} ; \tag{29}$$

$$\langle IjKm | \hat{\Omega} | IjK \pm 1, m \pm 1 \rangle = -\frac{1}{3}\Gamma_2(\gamma_0) \times [\sqrt{(j \pm K \mp 2m)(j \mp K \pm 2m + 1)(I \mp K)(I \pm K + 1)} - (½)(-1)^{I-j}(I + ½)\sqrt{(I + 3/2)(I - ½)}\,\delta_{K,\mp½+1}\,\delta_{m,½\mp½}] ;$$

$$\langle IjKm|\hat{\Omega}|IjK\mp 2,\ m\mp 1\rangle = (1/6)\Gamma_2(\gamma_0)\times$$
$$\times\sqrt{(I\pm K)(I\pm K-1)(I\mp K+1)(I\mp K+2)}\quad; \qquad /31/$$

$$\langle IjKm|\hat{\Omega}|IjK,m\pm 1\rangle = (1/6)(\Gamma_2(\gamma_0)-\frac{1}{5}\sqrt{3}\sin\gamma_0)\times$$
$$\times\sqrt{(j\pm K\mp 2m)(j\pm K\mp 2m-1)(j\mp K\pm 2m+1)(j\mp K\pm 2m+2)}- \qquad /32/$$
$$-(1/3)(-1)^{I+j}\Gamma_2(\gamma_0)(I+½)\sqrt{(j+3/2)(j-1/2)}\,\delta_{K½}\,\delta_{m,½\mp½}\quad;$$

$$\langle IjKm|\hat{\Omega}|IjK,\ -m\rangle = -(1/3)(-1)^{I+j}\ \Gamma_1(\gamma_0)\times \qquad /33/$$
$$\times(I+½)\sqrt{(j+½+2m)(j+½-2m)}\quad\delta_{K½}\cdot(1-\delta_{mo});$$

$$\langle IjKm|\hat{\Omega}|IjK,-m+1\rangle = -(1/3)(-1)^{I+j}\Gamma_2(\gamma_0)\times \qquad /34/$$
$$\times(I+½)\sqrt{(j-½+2m)(j+3/2-2m)}\quad\delta_{K½}\cdot(1-\delta_{mo}-\delta_{m1})\quad;$$

$$\langle IjKm|\hat{\Omega}|IjK\pm 1,-m+1\rangle = (1/6)(-1)^{I-j}\ \Gamma_2(\gamma_0)\times$$
$$\times(I+½)\sqrt{(I+3/2)(I-½)}\quad\delta_{K,\mp½+1}\cdot(1-\delta_{m,½\mp½})\ . \qquad /35/$$

Решения уравнения /20/ выражаются через полиномы Эрмита $H_\lambda(x)$ и имеют вид:

$$g_{\mathfrak{L}}(z) = \exp(-½\sqrt{D}z^2)H_\lambda(zD^{¼}), \qquad /36/$$

$$\mathfrak{L} = \sqrt{D}\,(2\lambda+1),\qquad \lambda = 0,1,2,\ldots \qquad /37/$$

Таким образом, зная решение уравнения /26/, можно определить параметр Λ следующим образом:

$$\Lambda = \epsilon(I)+\sqrt{D}(2\lambda+1)-9/4-\frac{9}{4\sin^2 3\gamma_0}\ , \qquad /38/$$

где $\epsilon(I)$ – решение уравнения /26/.

§ 3. Вычисление энергии возбужденных состояний

Вычисленный в § 2 параметр Λ / 38/ определяет потенциальную энергию β – колебаний с помощью соотношения /9/. Разлагая /9/ в ряд относительно значения β_Λ, соответствующего минимуму $W_\Lambda(\beta)$, можно написать

$$W_\Lambda(\beta) = W_\Lambda(\beta_\Lambda) + \frac{C_\Lambda}{2}(\beta - \beta_\Lambda)^2 \quad , \qquad /39/$$

где

$$C_\Lambda = C\left(1 + \frac{3\hbar^2(\Lambda+2)}{BC\beta_\Lambda^4}\right) \; , \qquad \beta_\Lambda = \beta_0 + \frac{\hbar^2(\Lambda+2)}{BC\beta_\Lambda^3} \; . \qquad /40/$$

После подстановки /39/ в уравнение /8/ получаем уравнение, решение которого исследовалось в работе А.С. Давыдова[10]. В этой работе было показано, что волновая функция уравнения /8/ имеет вид:

$$F_\Lambda(\beta) = \frac{N}{\beta^2} e^{-\frac{z^2}{2}} H_\nu(Z) \; , \qquad /41/$$

где

$$H_\nu(Z) = [2\Gamma(-\nu)]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma\left(\frac{n-\nu}{2}\right)(2Z)^n \; - \qquad /42/$$

функции Эрмита,

$$Z = \frac{p(\beta-\beta_\Lambda)}{\mu_1 \beta_\Lambda} \; , \qquad \mu_1 = \mu\left[1 + 3(\Lambda+2)\left(\frac{\mu}{p}\right)^4\right]^{-1/4} ,$$

$$(p-1)p^3 = (\Lambda+2)\mu^4 \; , \qquad p = \beta_\Lambda/\beta_0 \geq 1 \; ,$$

ν - корень трансцендентного уравнения

$$H_\nu\left(-\frac{p}{\mu_1}\right) = 0 \; , \qquad /43/$$

N - множитель нормировки, $\mu = \frac{1}{\beta_0}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{C}}$ - "параметр неадиабатичности". Выражение для энергии при этом будет иметь вид:

$$\Delta E_{1r}(I\Lambda r) = \hbar\omega\left\{(\nu + 1/2)\sqrt{1 + 3(\Lambda+2)\left(\frac{\mu}{p}\right)^4} + \right. \qquad /44/$$

$$\left. + (\Lambda+2)\cdot 2^{-1}\cdot(\mu/p)^2 + 2^{-1}\mu^{-2}(p-1)^2\right\} .$$

Полную волновую функцию рассматриваемых состояний определяют функции /22/, /36/, /41/ при помощи следующих связей между ними: /7/, /14/, /18/. В тех случаях, когда $\mu < 1/3$, значения ν в уравнении /43/ мало отличаются от целых чисел, т.е. $\nu \approx n = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда функции Эрмита /42/ переходят в полиномы Эрмита, а выражение /44/ можно приближенно заменить следующим:

$$\Delta E_{1r}(I\Lambda n) = \hbar\omega(n + 1/2) + \qquad /45/$$

$$+ \frac{\hbar^2}{2B\beta_0^2}(\Lambda+2)\{1 + 3\mu^2(n + 1/2) - \mu^4(\Lambda+2)\} .$$

Такой вид выражения /45/ означает, что при $\mu < \frac{1}{3}$ можно приближенно выделить возбуждения, соответствующие β - колебаниям.

Подставим в /45/ значение /38/. Тогда получим следующее выражение для энергии ядра:

$$\Delta E_{j\tau}(I\lambda n) = \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2}) + (\mathcal{E}_{j\tau}(I) + \hbar\omega_\gamma\lambda) \times$$ /46/

$$\times \{ 1 + 3\mu^2 (n + \tfrac{1}{2}) - \frac{2B\beta_0^2}{\hbar^2}\mu^4 (\mathcal{E}_{j\tau}(I) + \hbar\omega_\gamma\lambda) \},$$

где

$$\mathcal{E}_{j\tau}(I) = \frac{\hbar^2}{4B\beta_0^2}(2\epsilon(I) - \tfrac{1}{2} - \frac{9}{2\sin^2 3\gamma_0}) + \tfrac{1}{2}\hbar\omega_\gamma \quad .$$ /47/

Энергия /46/ основного состояния ядра характеризуется значением $n = \lambda = 0$, квантовым числом $I = I_0$, которому соответствует наименьшее значение $\epsilon^{j\tau}(I)$ корня уравнения /26/. Обычно наименьшее значение корня уравнения /26/ соответствует $I_0 = j$, если $j \geq 5/2$.

Итак,

$$(\Delta E)_{\text{осн}} = \frac{1}{2}\hbar\omega + \mathcal{E}^0_{j\tau}(I_0)\{(1 + \frac{3}{2}\mu^2 - \mu^4 \frac{2B\beta_0^2}{\hbar^2}\mathcal{E}_{j\tau}(I_0)\},$$ /48/

где

$$\mathcal{E}^0_{j\tau}(I_0) = \frac{\hbar^2}{4B\beta_0^2}(2\epsilon_1(I_0) - \tfrac{1}{2} - \frac{9}{2\sin^2 3\gamma_0}) - \tfrac{1}{2}\hbar\omega_\gamma \ .$$ /49/

Корни уравнения /26/ будем нумеровать индексом ℓ, пробегающим значения 1,2,3, ... так, что $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3 < \dots$. Вычитая из /46/ энергию основного состояния ядра,получим энергию возбужденных состояний,соответствующих разным значениям квантовых чисел $I\ell\lambda n$:

$$\Delta E_{j\tau}(I\ell\lambda n) - (\Delta E)_{\text{осн}} = \hbar\omega\cdot n + \hbar\omega_\gamma\cdot\lambda + \frac{\hbar^2}{2B\beta_0^2}\Delta\epsilon^{j\tau}_\ell(I) +$$

$$+ \frac{3\mu^2}{2}(\frac{h^2}{2B\beta_0^2}\Delta\epsilon^{j\tau}_\ell(I) + h\omega_\gamma\lambda) + 3\mu^2\cdot n(\mathcal{E}_{j\tau}(I\ell) + \hbar\omega_\gamma\cdot\lambda) -$$ /50/

$$-\mu^4\frac{2B\beta_0^2}{h^2}[\frac{\hbar^2}{2B\beta_0^2}\Delta\epsilon^{j\tau}_\ell(I) + \hbar\omega_\gamma\cdot\lambda][\mathcal{E}_{j\tau}(I\ell) + \mathcal{E}^0_{j\tau}(I_0) + \hbar\omega_\gamma\lambda],$$

где

$$\Delta\epsilon^{j\tau}_\ell = \epsilon^{j\tau}_\ell - \epsilon^{j\tau}_1(I_0).$$

/51/

В адиабатическом приближении по β - колебаниям $(\mu = 0)$ будем иметь:

$$\Delta E_{j\tau}(I\ell\lambda n) - (\Delta E) = \hbar\omega n + \hbar\omega_\gamma \lambda + \frac{\hbar^2}{2B\beta_0^2}\Delta\epsilon_\ell^{j\tau}(I). \qquad /52/$$

Разделив /52/ на $<T>\beta_0$ получим выражение энергии в адиабатическом приближении в безразмерных величинах :

$$E_{j\tau}(I\ell\lambda n) = \zeta\cdot n + \eta\cdot\lambda + 3\xi\,\Delta\epsilon_\ell^{j\tau}(I), \qquad /53/$$

где

$$\zeta = \frac{\hbar\omega}{<T>\beta_0}, \quad \eta = \frac{\hbar\omega_\gamma}{<T>\beta_0}, \quad \xi = \frac{\hbar^2}{6B\beta_0^3<T>}. \qquad /54/$$

Вращательно-одночастичные возбуждения можно получить, положив $\lambda = n = 0$. Тогда

$$E_{j\tau}(I\ell 00) = 3\xi\Delta\epsilon_\ell^{j\tau}(I). \qquad /55/$$

Энергия возбуждения /55/ зависит только от двух параметров: параметра ξ и параметра неаксиальности γ_0.

Формула /50/ учитывает связь между одночастично-вращательными возбуждениями и β - и γ - колебаниями. Выберем начало отсчета энергии такое, что $\epsilon_I^{j\tau}(I_0) = 0$, тогда $\Delta\epsilon_\ell^{j\tau}(I) = \epsilon_\ell^{j\tau}(I)$ и поправка к вращательно-одночастичным уровням в состояниях $n = \lambda = 0$ может быть представлена, как в случае четно-четных ядер[10], в виде:

$$-a[\epsilon_\ell^{j\tau}(I)\cdot\xi]^2 + b[\epsilon_\ell^{j\tau}(I)\xi],$$

где a обусловлено связью вращений с β - колебаниями, b обусловлено связью как с β-, так и с γ - колебаниями.

§ 4. Сравнение теории с экспериментом

Для определения последовательности спинов и энергии вращательно-одночастичных возбуждений в адиабатическом приближении по β - колебаниям $(\mu = 0)$ на электронно-счетных вычислительных машинах было решено уравнение /26/ для каждого значения полного углового момента I ядра. Решение уравнения /26/ сводится к диагонализации матрицы /27/. Диагонализация матрицы проводилась по методу Якоби, стандартная программа которого была разработана Воеводиным и Ким[11] в Вычислительном центре МГУ. Порядок диагонализируемых матриц определяется выражением $(j + ½)(I + ½)$. Счет велся для $j = 5/2$, хотя в принципе он может быть проведен для любого $j > 5/2$. Были найдены собственные значения и собственные векторы матрицы /27/ как функции ξ и γ_0 при следующих значениях этих параметров:

$$\xi = \pm 0{,}25; \quad \pm 0{,}50; \quad \pm 0{,}75; \quad \pm 1{,}00.$$

$$\gamma_0 = 5^\circ; \ 10^\circ; \ 15^\circ; \ 20^\circ; \ 22{,}5^\circ; \ 25^\circ; \ 27{,}5^\circ; \ 30^\circ.$$

Поскольку оператор Гамильтона в этой модели инвариантен относительно преобразования

$$\begin{cases} \gamma_0 \to 60^\circ - \gamma_0 \\ \langle T \rangle \beta_0 \to - \langle T \rangle \beta_0 , \end{cases}$$

можно рассматривать γ_0 в интервале от 0 до 30° для ядер с $\xi > 0$ и в том же интервале для ядер с $\xi < 0$, что соответствует интервалу от 30° до 60° для ядер с $\xi > 0$. Положительное ξ в ядрах может быть реализовано в двух случаях: либо внешний нуклон представляет собой дырку, а квадрупольный момент ядра положительный, либо внешний нуклон-квазичастица, квадрупольный момент-отрицательный. Отрицательное ξ возможно, если внешний нуклон - дырка, а квадрупольный момент-отрицательный, или внешний нуклон-квазичастица, квадрупольный момент-положительный. Таким образом, переход через 30° означает, что квазичастица становится дыркой или меняется знак квадрупольного момента.

На рис. 1-4 представлены последовательность спинов и зависимости от параметра γ_0 энергий возбужденных состояний нечетных атомных ядер, имеющих в основном состоянии спин 5/2 , при значениях $\xi = 0{,}25$; 0,50; 0,75; 1,00.

При $\gamma_0 = 0$ часть уровней энергии непрерывно переходит в уровни основной вращательно-одночастичной полосы, рассчитанной в аксиальной теории[3,4]. При 60° эти уровни переходят в уровни, рассчитанные в работе[12]. Этим уровням энергии соответствуют на графиках более толстые кривые. Остальные уровни при $\gamma_0 \to 0^\circ$ или 60° уходят в бесконечность. Они соответствуют аномальным полосам, рассмотренным в работе[4]. Полученные результаты свидетельствуют, что простая модель малой неаксиальности[4] может быть использована вплоть до $\gamma_0 \approx 10^\circ$. В этом случае можно говорить отдельно об основной вращательной - одночастичной полосе и аномальных полосах. При $\gamma_0 > 10^\circ$ такое разделение становится невозможным. Уровни, которые при $\gamma_0 < 10^\circ$ соответствуют асимптотически аномальным полосам, характеризуемым квантовым числом $|m|$, при больших γ_0 опускаясь из бесконечности, сильно деформируют уровни, соответствующие асимптотически при $\gamma_0 < 10^\circ$ основной вращательно-одночастичной полосе $(|m|=0)$. Волновая функция состояний, асимптотически соответствующих состояниям с $|m| = 0$, при $\gamma_0 > 10^\circ$ будет содержать большие примеси состояний с $|m| \neq 0$, что должно сказаться на вероятности переходов. Можно заметить, что общий характер спектра напоминает спектр

четно-четных ядер. Однако у нечетных ядер основная полоса деформируется значительно сильнее, чем в случае четно-четных ядер, и нет симметрии относительно 30°. Последнее связано с тем обстоятельством, что спектр нечетных ядер чувствителен к знаку квадрупольного момента в отличие от спектра четно-четных ядер, т.е. это связано с указанной выше симметрией гамильтониана относительного преобразования
$\gamma_0 \to 60^{0} - \gamma_0$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $\langle T \rangle \beta_0 \to - \langle T \rangle \beta_0$.

В таблицах 1,2 указаны теоретические и экспериментальные значения спинов и энергий возбужденных состояний ядер Al^{25} и Mg^{25} соответственно. Хотя в работах /13-14/ даны уровни энергии этих ядер вплоть до 7-8 Мэв, сравнение проведено только для нижайших уровней, ибо высокоэнергетические возбуждения могут быть совершенно иной природы.

После того, как выбран один из четырех рисунков, параметр γ_0 определяется из отношения энергий двух нижайших уровней.

В таблице 3 указаны спины и энергии возбужденных состояний ядра Sb^{119}. Среднее четно-четное ядро Cd^{116} имеет $\gamma_0 = 25{,}3^{\circ}$, что близко к выбранному для Sb^{119} значению γ_0. В таблицах 4, 5, 6 и 7 даны теоретические и экспериментальные значения спинов и энергий ядер Re^{185}, Re^{187}, Yb^{173} и Hf^{175}. Ближайшие четно-четные ядра W^{184}, W^{186} и Os^{188} имеют $\gamma_0 = 14{,}1$ /21/; $13{,}9$ /22/; $13{,}9$ /21/ соответственно, что также близко к выбранным для Re^{185} и Re^{187} значениям. Наконец, в таблице 8 даны теоретические и экспериментальные спины и энергии ядра U^{233}. Это ядро было рассмотрено в рамках аксиальной теории /4/, и там было указано, что уровни $1/2^{+}$ 398 кэв, $3/2^{+}$ 415 кэв и $5/2^{+}$ 481 кэв можно отнести к первой аномальной полосе с $|m| = 1$. Из таблицы 8 видно, что указанные уровни относятся к уровням асимптотически основной полосы, которые уже деформированы уровнями асимптотически аномальной полосы. γ_0 ближайшего четно-четного ядра Th^{232} равно $10{,}3^{\circ}$ /21/, что близко к γ_0, приписанному U^{233}.

Проведенное сравнение теории с экспериментом показывает, что последовательность спинов и значений энергий ряда ядер с нечетным A может быть удовлетворительно объяснена в рамках неаксиальной теории в предположении, что j - хорошее квантовое число и возможно отделение β - и γ - колебаний от вращений.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность проф. А.С. Давыдову, под руководством которого была выполнена настоящая работа. Авторы также благодарны сотрудникам кафедры математики физического факультета и Вычислительного центра МГУ за содействие и помощь при работе на электронно-счетных вычислительных машинах.

Литература

1. S.G. Nilsson. Mat.- fys. Medd. Dan., 29, No. 16 (1955) /перевод, сб. "Деформация атомных ядер", ИЛ,Москва, 1958 /.

2. B. Mottelson and S. Nilsson. Mat.-fys. Skv. Dan., 1, N. 8 (1959).
3. А.С. Давыдов, Р.А. Сардарян. ЖЭТФ, 40, 1429 /1961/.
4. А.С. Давыдов, Р.А. Сардарян. Вестник Моск. университета, серия физ., № 4, 72 /1962/. Nucl. Phys., 37, 106 /1962/.
5. K. Hecht, G.R. Satchler. Nucl. Phys., 32, 286 (1962).
6. L.W. Person, J.O. Rasmussen. Nucl. Phys., 36, 666 (1962).
7. T.D. Newton. Can. J. Phys., 38, No. 5, 700 (1960).
8. A. Bohr. Mat.-fys. Medd. Dan., 26, No. 14 (1952).
9. А.С. Давыдов. Nucl.Phys., 16, 597 /1960/.
10. А.С. Давыдов. Вестник Моск. университета, серия физ., № 1, 56 /1961/.
11. В.В. Воеводин, Г. Ким. Вычислительные методы и программирование. Изд. МГУ, 269-278 /1962/.
12. Ш. Шарипов. Вестник Моск. университета, серия физ., № 1, 46 /1963/.
13. P.H. Endt. Van der Leun C. Nucl. Phys., 34, 68 (1962).
14. R.K. Sheline, R.A. Havlan. Nucl. Phys., 29, 177 (1962).
15. J. Kantele, R.W. Fink. Nucl. Phys., 43, 187 (1963).
16. А.С. Давыдов. Ядерные реакции при малых и средних энергиях. Труды Всесоюзной конференции 1960 года. Изд. АН СССР, Москва, 1962.
17. S.S. Malik, A. Mukerji. Phys.Rev., 111, 1291 (1958).
18. Б.С. Джелепов, Л.К. Пекер. Препринт ОИЯИ Р-288, Дубна, 1959.
19. B. Harmatz, T.H. Haudle, I.W. Mihelich. Phys.Rev., 128, 1186 (1962).
20. I. Marklund, B. Linström. Nucl.Phys., 40, 329 (1963).
21. А.С. Давыдов, В.С. Ростовский. ЖЭТФ, 36, 1788 (1959); Nucl.Phys, 12, 59 (1959).
22. А.С. Давыдов, Изв. АН СССР, серия физ., 25, 782 /1961/.
23. А.С. Давыдов, Г.Ф. Филиппов. ЖЭТФ, 35, 440 /1958/; Nucl. Phys., 8, 237 (1959).
24. C.J.Orth, M.E.Bunker, J.W.Starner. Phys. Rev., 132, 355 (1963).
25. R.G.Albridge, J.H.Hollander, C.J.Gallagher, J.H.Hamilton. Nucl. Phys., 27, 529 (1961)
26. G.Schulrze, J.Ahlf. Nucl. Phys., 30, 163 (1962).
27. K.M.Bisgard, P.Dahl, P.Hornshøj, A.B.Knusten. Nucl. Phys., 41, 21 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
26 февраля 1964 г.

Таблица I. Теоретические и экспериментальные спины и энергии ядра Al^{25}

Теория ξ =I.oo; γ_0 =40^0		Эксперимент [I3]	
Спин	Энергия (Мэв)	Спин	Энергия (Мэв)
5/2+	0	5/2+	0
I/2+	0,455	I/2+	0,455
9/2+	0,800		
3/2+	0,942	3/2+	0,949
7/2+	I,390	(7/2+)	I,6I
5/2+	I,78	5/2+	I,8I
3/2+	2,46	I/2+	2,50
			2,69
5/2+	2,92	3/2+	2,74

Таблица 2. Теоретические и экспериментальные спины и энергии ядра Mg^{25}

Теория ξ = I.oo γ_0 = $37{,}5^0$		Эксперимент [I4]	
Спин	Энергия (Мэв)	Спин	Энергия (Мэв)
5/2+	0	5/2+	0
I/2+	0,586	I/2+	0,586
9/2+	0,950		
3/2+	I,II0	3/2+	0,984
7/2+	I,500	7/2+	I,608
5/2+	I,970	5/2+	I,962
		I/2	2,566
5/2+	2,760	(7/2+)	2,740
3/2+	2,850	(3/2+)	2,805

Таблица 3. Теоретические и экспериментальные спины и энергии ядра Sb^{119}

Теория ξ = 0,25; γ_0= $21{,}25^0$		Эксперимент [I5]	
Спин	Энергия (Мэв)	Спин	Энергия(Мэв)
5/2+	0	5/2+	0
7/2+	0,27I	(7/2+)	0,27I
9/2+	0,530		
I/2+	0,630	(I/2+)	0,645
3/2+	0,755	(3/2+)	0,702
9/2+	0,825		
5/2+	0,900	(5/2+)	I,054
7/2+	I,230	(7/2+)	I,22I
		(9/2+)	I,374
3/2+	I,480		
9/2+	I,540		
5/2+	I,590		
		(I/2,3/2)	I,755
9/2+	I,990		
7/2+	2,000		
I/2+	2,0I0		
3/2+	2,090		
			2,205
			2,29I
5/2+	2,300		2,365
7/2+	2,570		

Таблица 4. Теоретические и экспериментальные спины и энергии ядра Re^{I85}

Теория ξ =0,25; γ_0= I5,6^0		Эксперимент [I7,I8]	
Спин	Энергия (кэв)	Спин	Энергия (кэв)
5/2+	0	5/2+	0
7/2+	I22	7/2+	I22
9/2+	277	9/2+	280
I/2+	627	I/2+	643
3/2+	720	3/2+	7I8
9/2+	740		
5/2+	790	5/2+	870
3/2+	8I0	3/2+	879

Таблица 5. Теоретические и экспериментальные спины и энергии ядра Re^{I87}

Теория ξ =0,25 ; γ_0 =I7,5^0		Эксперимент [I9]	
Спин	Энергия (кэв)	Спин	Энергия
5/2+	0	5/2+	0
7/2+	I34	7/2+	I34,24
9/2+	296	9/2+	300-320
I/2+	522	I/2+	5II,6
3/2+	634	3/2+	6I8,2
		I/2+	625,3
9/2+	655		
5/2+	740		
		3/2+	773
3/2+	840		
7/2+	855		864,5
5/2+	895		880±20

Таблица 6. Теоретические и экспериментальные спины и энергии ядра Yb^{I73}

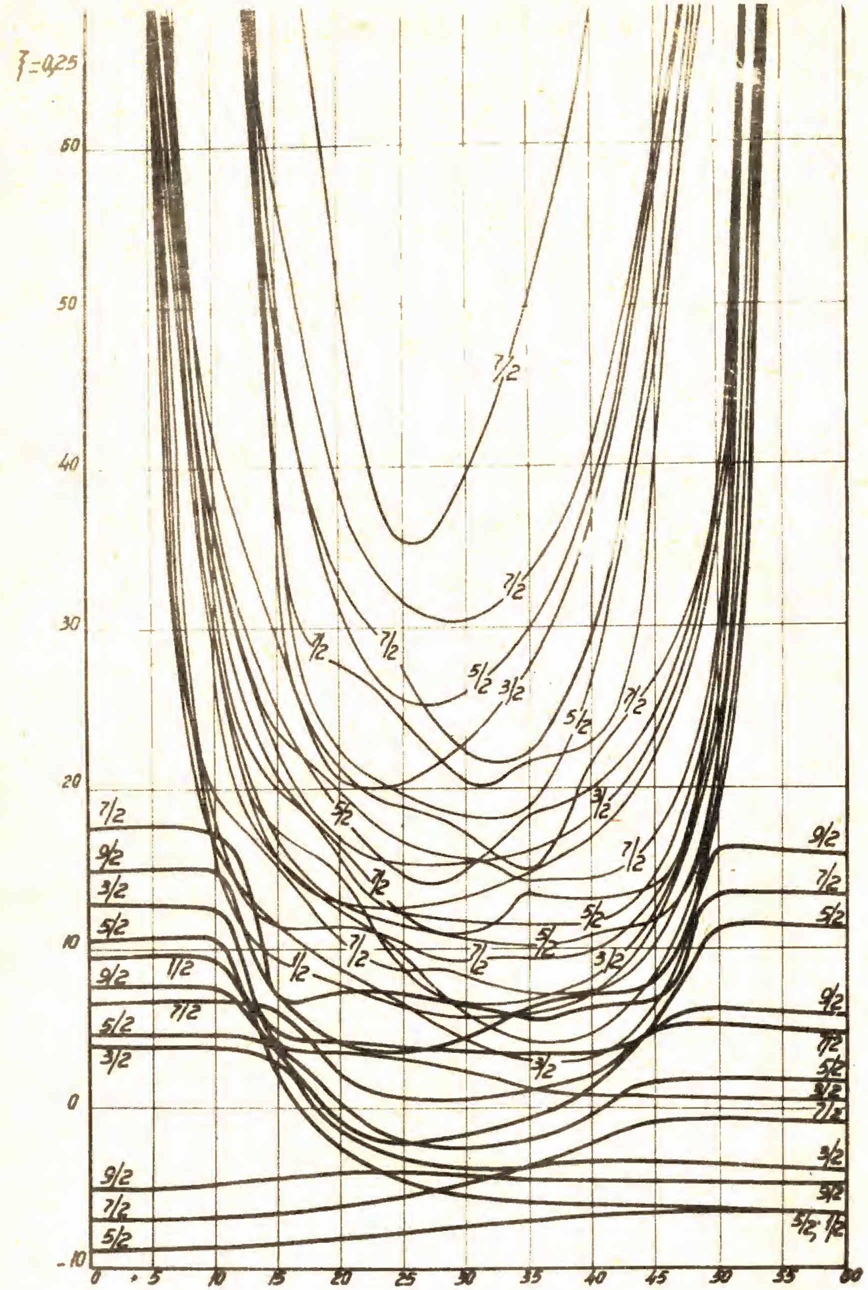
Теория ξ = 0,25 ; γ_0 = I5,6^0		Эксперимент [24]	
Спин	Энергия (Мэв)	Спин	Энергия(Мэв)
5/2	0	5/2	0
7/2	0,079	7/2	0,0787
9/2	0,I79	9/2	0,I795
I/2	0,4I5	I/2	0,399
3/2	0,466	3/2	0,465
9/2	0,478		
5/2	0,508		
3/2	0,525		
5/2	0,555		
7/2	0,598		
9/2	0,655		
7/2	0,672	7/2	0,637

Таблица 7. Теоретические и экспериментальные спины и энергии ядра Hf^{175}

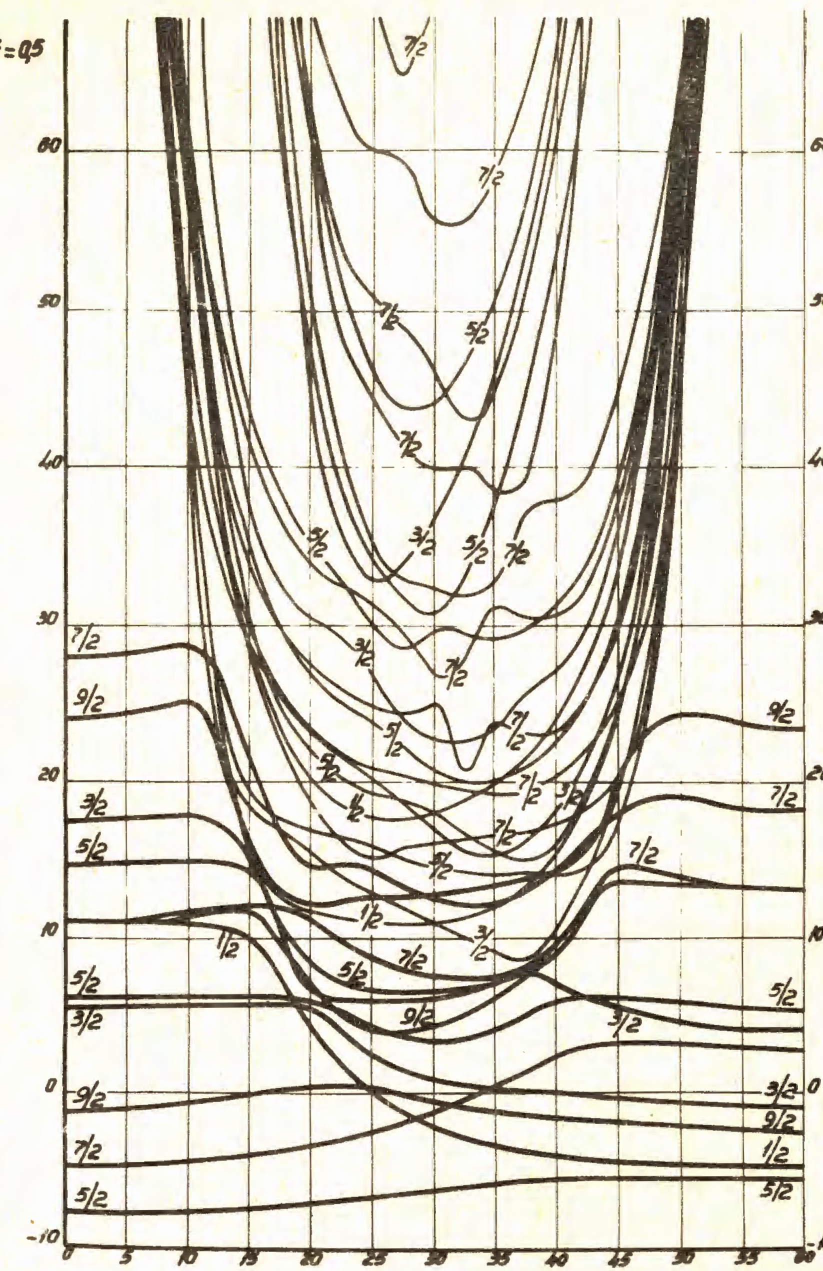
Теория $\xi = 0{,}25$; $\gamma_0 = 25^0$		Эксперимент [20]	
Спин	Энергия (кэв)	Спин	Энергия (кэв)
5/2-	0	5/2-	0
7/2-	8I,5	7/2-	8I,5
I/2-	I22	I/2-	I25,9
9/2-	I44	9/2-	I85,8
3/2-	I67	3/2-	I96,4
5/2-	208	5/2-	2I3,4
9/2-	2II		
		II/2-	3I2,4
7/2-	3I5	7/2-	348,4
		7/2-	375,4
3/2-	405		
9/2-	4I5	9/2-	406,I
5/2-	432		
		9/2-	474,8
I/2-	522		
3/2-	53I		
		II/2-	622,0

Таблица 8. Теоретические и экспериментальные спины и энергии ядра U^{233}

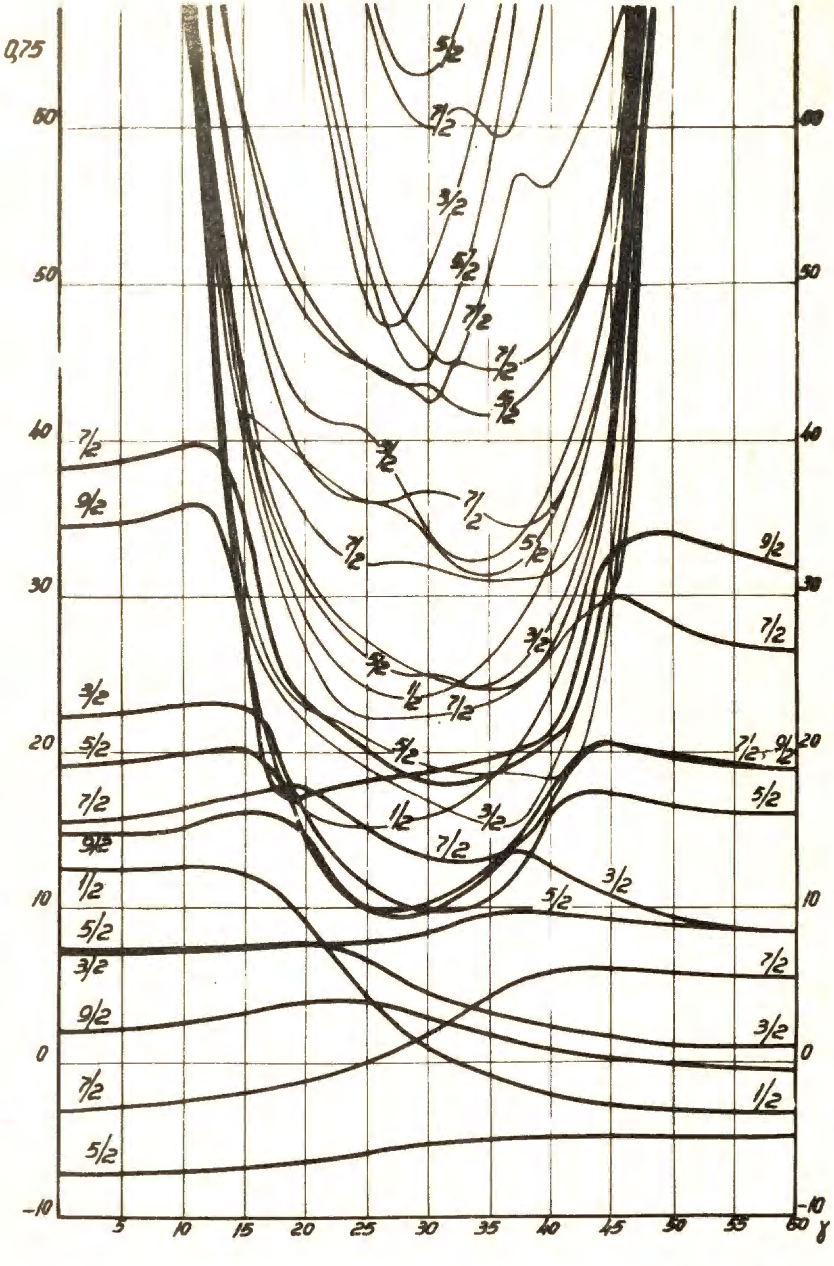
Теория $\xi = 0{,}25$; $\gamma_0 = \mathrm{II{,}25}^0$		Эксперимент [25,26,27]	
Спин	Энергия (кэв)	Спин	Энергия (кэв)
5/2	0	5/2	0
7/2	40,35	7/2	40,35
9/2	95	9/2	92,0
3/2	295	3/2	3II,93
5/2	3I5	5/2	340,52
7/2	365		
9/2	370		
I/2	403	I/2	398,55
		3/2	4I5,80
5/2	432		
3/2	453		
		5/2	46I,I6



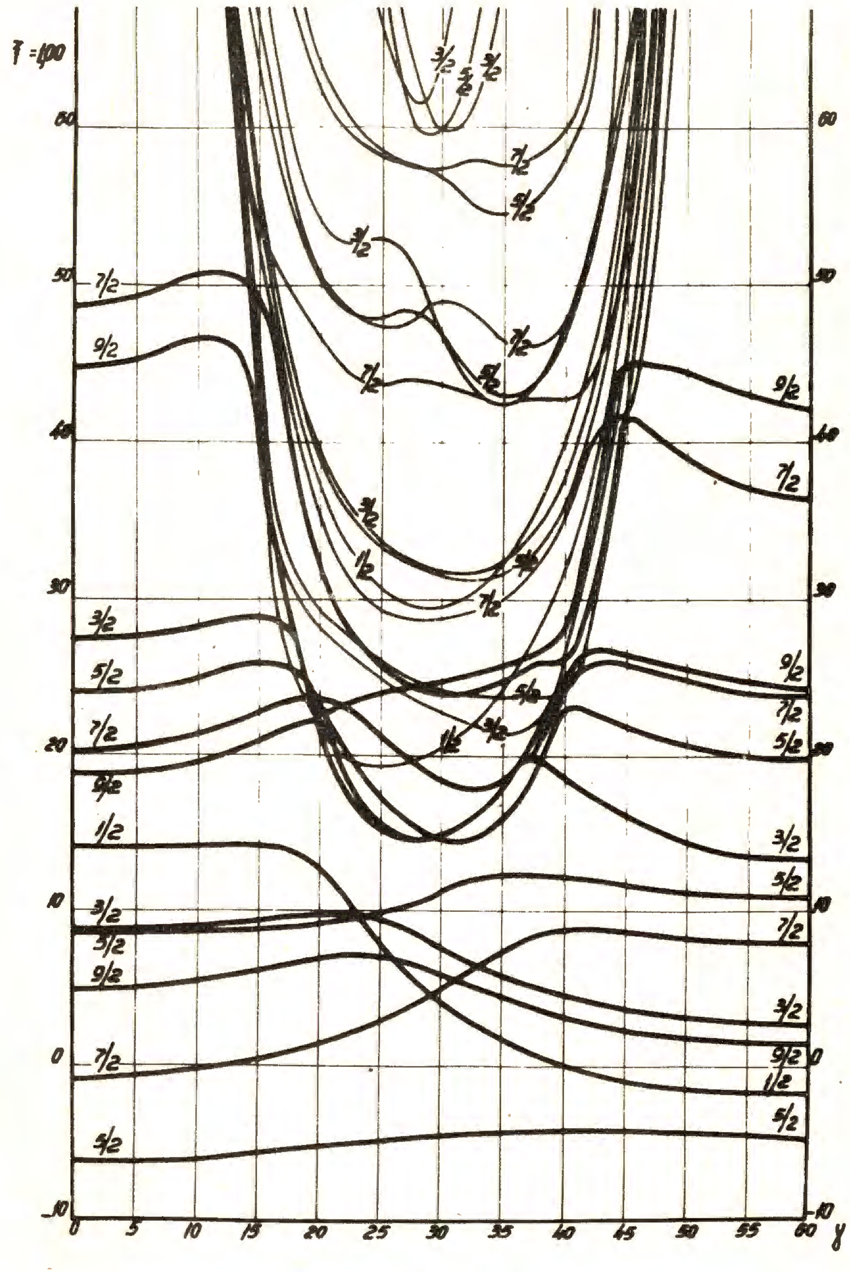
Р и с. 1. Зависимость от параметра γ_0 последовательности спинов и значений энергии вращательно-одночастичных состояний нечетных атомных ядер, спин основного состояния которых равен 5/2, при значении параметра ξ, равном 0,25.



Р и с. 2. Зависимость от параметра γ_0 последовательности спинов и значений энергии вращательно-одночастичных состояний нечетных атомных ядер, спин основного состояния которых равен 5/2, при значении параметра ξ, равном 0,5.



Р и с. 3. Зависимость от параметра γ_0 последовательности спинов и значений энергии вращательно-одночастичных состояний нечетных атомных ядер, спин основного состояния которых равен 5/2 , при значении параметра ξ, равном 0,75.



Р и с. 4. Зависимость от параметра γ_0 последовательности спинов и значений энергии вращательно-одночастичных состояний нечетных атомных ядер, спин основного состояния которых равен 5/2, при значении параметра ξ, равном 1,00 .