

1572



Экз. ЧИТ. ЗАЛ

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

---

Р.Н. Фаустов

P-1572

КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД  
В ЗАДАЧЕ ОБ УРОВНЯХ  
ЭНЕРГИИ ПОЗИТРОНИЯ

Дубна 1964

Фаустов Р.Н.

## Квазипотенциальный метод в задаче об уровнях энергии позитрония

На основе квазипотенциального метода в квантовой теории поля рассмотрено связанное состояние системы электрон + позитрон (позитроний). Получена величина расщепления основного уровня энергии позитрония с точностью до  $\alpha^5$  ( $\alpha$  - постоянная тонкой структуры). Результат согласуется с предыдущими вычислениями, однако, новый метод значительно упрощает весь расчет.

Препринт Объединенного института ядерных исследований,  
Дубна, 1964.

Faustov R.N.

## Quasipotential Method in the Problem about the Positronium Energy Levels

The bound state of the electron-positron system (positronium) is considered on the basis of the quasipotential method in quantum field theory. The magnitude of the splitting of the ground energy level of the positronium is obtained with the accuracy up to  $\alpha^5$  ( $\alpha$  is the fine structure constant). The result is in agreement with earlier calculations, however the new method simplifies essentially the whole procedure.

Preprint, Joint Institute for Nuclear Research,  
Dubna, 1964.

Р.Н. Фаустов

P-1572

КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД  
В ЗАДАЧЕ ОБ УРОВНЯХ  
ЭНЕРГИИ ПОЗИТРОНИЯ

Дубна 1964

ОИЯИ  
БИБЛИОТЕКА

## В в е д е н и е

Проблема двух частиц в квантовой теории поля является одной из центральных и принципиально важных, так как мы получаем здесь наиболее детальное описание динамики взаимодействия. Обычно при исследовании этой проблемы использовалось либо уравнение Бете-Солпитера, либо метод дисперсионных соотношений и условие унитарности. При описании системы двух частиц с помощью уравнения Бете-Солпитера возникает ряд трудностей, связанных с четырехмерностью волновой функции (неясный физический смысл относительного времени двух частиц, отсутствие положительности нормы волновой функции и др.). Уравнения, получающиеся в методе дисперсионных соотношений в комбинации с условием унитарности имеют существенно нелинейный характер, что сильно затрудняет их исследование и приводит к большой неоднозначности решений.

В последнее время был предложен квазипотенциальный метод описания системы двух частиц<sup>/1/</sup>. Уравнения, получающиеся в этом методе, являются трехмерными и линейными, так что сохраняется основное достоинство уравнения Бете-Солпитера - линейность, в то же время отсутствуют указанные выше недостатки. Амплитуда рассеяния описывается уравнением типа Липпмана - Швингера, а волновая функция - уравнением типа Шредингера с комплексным потенциалом, зависящим от энергии. Потенциал для этих уравнений строится методом двухвременных функций Грина. Если ограничиться задачей получения физической амплитуды рассеяния, то потенциал можно определить по теории возмущений с помощью матричных элементов рассеяния на массовой поверхности. Как показано в<sup>/2/</sup>, оба метода построения потенциала дают одинаковые результаты при вычислении энергетических уровней системы. Однако второй метод обладает существенными преимуществами, так как оперирует с величинами на массовой поверхности и, следовательно, допускает использование свойств аналитичности и унитарности.

В настоящей работе демонстрируется применение квазипотенциального метода к рассмотрению связанного состояния электрона и позитрона (позитрония). Эта система удобна тем, что ввиду малости константы связи в квантовой электродинамике, здесь допустимо разложение по теории возмущений и соответствующие результаты можно сравнить с экспериментом. Ясно, что в низшем порядке теории возмущений мы получим кулоновские уровни энергии. В следующих порядках появится расщепление этих уровней, зависящее от полного спина и полного момента системы. В работе

будет вычислено расщепление основного уровня энергии ( $n=1$ ) с точностью до  $a^3$ , где  $a$  - постоянная тонкой структуры.

Поправки к уровням энергии позитрония с точностью до  $a^4$  вычислялись в <sup>/3/</sup>. Расщепление основного уровня с точностью до  $a^5$  было впервые вычислено в <sup>/4/</sup> с помощью уравнения типа Бете-Солпитера. Наши результаты полностью совпадают с этими вычислениями.

### 1. Определения

Введем  $T$ -матрицу, описывающую рассеяние двух фермионов с массой  $\pi$

$$\langle f | S | i \rangle = 1 - i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \langle f | T | i \rangle, \quad (1.1)$$

где  $S$  - матрица удовлетворяет обычному соотношению унитарности

$$S^\dagger S = 1. \quad (1.2)$$

Подставляя (1.1) в (1.2) получим соотношение унитарности для  $T$ -матрицы в виде:

$$\begin{aligned} \langle f | T^\dagger | i \rangle - \langle f | T | i \rangle = \\ = i(2\pi)^4 \sum_n \delta^4(p_i - p_n) \langle f | T | n \rangle \langle n | T | i \rangle. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В дальнейшем удобно будет работать в с.и.и. Определим поэтому импульсы начального и конечного состояний следующим образом:

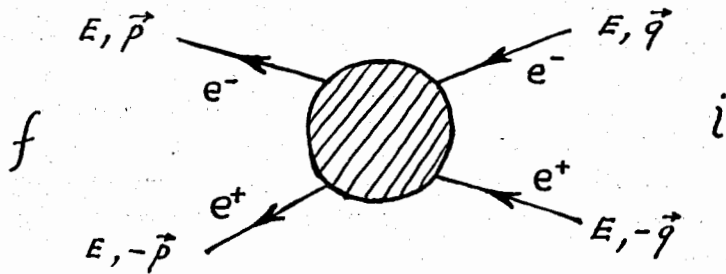


Рис. 1.

Поскольку мы находимся на массовой поверхности, то  $E^2 = p^2 + m^2 = q^2 + m^2$ . Тогда квадрат полной энергии в с.и.и.  $S = 4E^2 = 4(p^2 + m^2)$ , а передача импульса  $t = -(\vec{p} - \vec{q})^2 = -2p^2(1 - \cos\theta)$ . Если в выражении (1.3) ограничиться упругой унитарностью (двухфермионным промежуточным состоянием), то мы получим



где  $F$  - "диагональная" матрица  $\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\delta(\vec{k} - \vec{k}') \sqrt{k^2 + m^2}}{(E + i\epsilon)^2 - k^2 - m^2}$ .

Тогда, взяв мнимую часть, имеем:

$$\text{Im } T = V(\text{Im } F)(\text{Re } T) + V(\text{Re } F)(\text{Im } T) = V(\text{Im } F)T + V F(\text{Im } T)$$

или

$$\text{Im } T = (1 - VF)^{-1} V(\text{Im } F)T \quad (1.7)$$

Но из уравнения (1.6) следует

$$T = (1 - VF)^{-1} V$$

Подставляя это выражение в (1.7), получим

$$\text{Im } T = T(\text{Im } F)T$$

где

$$\text{Im } F = -\frac{\pi}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m^2} \delta(E^2 - k^2 - m^2) \theta(E) \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

что в точности совпадает с (1.4).

В методе двухвременных функций Грина мы имеем уравнение <sup>/1,2,9/</sup>

$$\tilde{T}(\vec{p}, \vec{q}) = \tilde{V}(\vec{p}, \vec{q}) + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{V}(\vec{p}, \vec{k}) \tilde{F}(k) \tilde{T}(\vec{k}, \vec{q}) d\vec{k} \quad (1.8)$$

Амплитуда рассеяния  $\tilde{T}$  определяется через двухвременную функцию Грина двух частиц  $\overline{G}$ :

$$-i \overline{F} \tilde{T} \overline{F} = \overline{G} - i \overline{F}$$

а

$$\overline{F}(k) = i \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon S_1(\vec{k}, E + \epsilon) S_2(-\vec{k}, E - \epsilon)$$

где  $S$  - одночастичная функция Грина фермиона.

В низшем приближении

$$\overline{F}_0(k) = \pi \frac{\gamma_1^0 \gamma_2^0 (k^2 + m^2) - \gamma_1^0 E (m - \vec{\gamma}_2 \cdot \vec{k}) + (m - \vec{\gamma}_1 \cdot \vec{k}) \gamma_2^0 E - (m - \vec{\gamma}_1 \cdot \vec{k})(m - \vec{\gamma}_2 \cdot \vec{k})}{\sqrt{k^2 + m^2} (E^2 - k^2 - m^2)} \quad (1.9)$$

Как нетрудно видеть,  $\det \overline{F}_0(k) = 0$  и, следовательно, функция  $\overline{F}_0(k)$  не имеет обратной. Однако уже при учете простейших радиационных поправок к одночастичным функциям Грина фермионов,  $\det \overline{F}(k)$  становится отличным от нуля, что в свою очередь позволяет последовательным образом построить квазипотенциал  $\tilde{V}$ , используя уравнение (1.8) <sup>/1,2,9/</sup>.

Для практических вычислений удобнее спроектировать уравнение (1.8) на состояние с положительной энергией (аналогично тому, как это делается в уравнении Дирака).

При этом мы получим уравнение

$$T_+(\vec{p}, \vec{q}) = V_+(\vec{p}, \vec{q}) + \frac{1}{(2\pi)^4} \int V_+(\vec{p}, \vec{k}) F_+(k) T_+(\vec{k}, \vec{q}) d\vec{k} \quad (1.10)$$

$$F_+(k) = \bar{u}_1 \bar{u}_2 \sqrt{F_0(k)} u_1 u_2 = \frac{\pi}{E - \sqrt{k^2 + m^2}}; \quad T_+ = \bar{u}_1 \bar{u}_2 T u_1 u_2,$$

где  $u$  - спиноры для состояний с положительной энергией. Записывая уравнение (1.10) в символическом виде:

$$T_+ = V_+ + V_+ F_+ T_+,$$

получим формальное выражение для квазипотенциала

$$V_+ = T_+ (1 + F_+ T_+)^{-1}.$$

Уравнение для волновой функции связанного состояния будет при этом иметь вид:

$$2(E - \sqrt{p^2 + m^2}) \psi_+(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int V_+(\vec{p}, \vec{q}) \psi_+(\vec{q}) d\vec{q}$$

В соответствии с замечаниями, сделанными во введении, мы в дальнейшем будем строить квазипотенциал  $V$  с помощью матричных элементов амплитуды рассеяния на массовой поверхности, используя для этого уравнение (1.5).

Определяя, как обычно, волновую функцию в импульсном пространстве через амплитуду рассеяния

$$\psi(\vec{p}) = \delta(\vec{p} - \vec{q}) + \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{E^2 - p^2 - m^2} T(\vec{p}, \vec{q}) \quad (1.11)$$

$$E^2 = q^2 + m^2,$$

получим из (1.5) для  $\psi$  следующее уравнение

$$\psi(\vec{p}) = \delta(\vec{p} - \vec{q}) + \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{(E^2 - p^2 - m^2)(2\pi)^3} \int V(\vec{p}, \vec{q}) \psi(\vec{q}) d\vec{q}, \quad E^2 = k^2 + m^2. \quad (1.12)$$

В дальнейшем нас будет интересовать лишь задача о связанных состояниях; поэтому  $\delta$ -функцию в правой части (1.12) можно отбросить. В результате мы получим уравнение

$$(E^2 - p^2 - m^2) \psi(\vec{p}) = \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{(2\pi)^3} \int V(\vec{p}, \vec{q}) \psi(\vec{q}) d\vec{q}. \quad (1.13)$$

Нетрудно видеть, что в нерелятивистском пределе  $m^2 \rightarrow \infty$  мы имеем обычное уравнение Шредингера

$$\left(\frac{p^2}{m} - W\right) \psi(\vec{p}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int V(\vec{p}, \vec{q}) \psi(\vec{q}) d\vec{q}, \quad (1.14)$$

где  $W = 2(E - m)$  - энергия связи.



## § 2. Построение потенциала

При построении потенциала для уравнения (1.13) будем исходить из того, что амплитуда рассеяния на массовой поверхности правильно описывает как процессы рассеяния, так и связанные состояния (полюса амплитуды). Поэтому выберем потенциал  $V$  таким образом, чтобы уравнение (1.5) правильно описывало амплитуду  $T$  на энергетической поверхности  $E^2 = p^2 + m^2 = q^2 + \pi^2 / l^2$ . Это можно сделать, задавая амплитуду  $T$  по теории возмущений в виде суммы графов Фейнмана и определяя потенциал  $V$  последовательными итерациями уравнения (1.5) по теории возмущений<sup>/1/</sup>. Перепишем уравнение (1.5) в виде:

$$V(\vec{p}, \vec{q}) = T(\vec{p}, \vec{q}) - \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{V(\vec{p}, \vec{k}) \sqrt{k^2 + m^2} T(\vec{k}, \vec{q})}{(E^2 - k^2 - m^2)} dk \quad (2.1)$$

или символически (см. (1.6))

$$V = T - V F T, \quad (2.2)$$

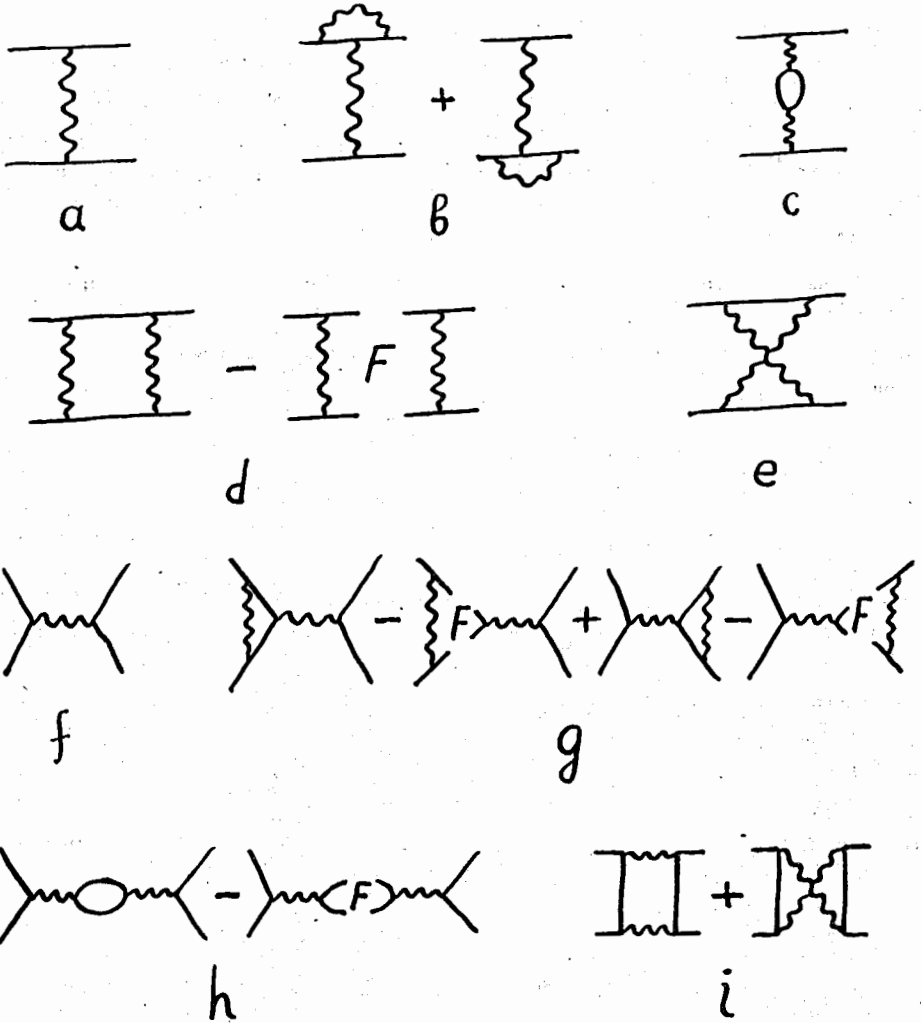
и представим  $V$  и  $T$  в виде разложений по теории возмущения

$$\begin{aligned} T &= T^{(2)} + T^{(4)} + \dots \\ V &= V^{(2)} + V^{(4)} + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Тогда, подставляя (2.3) в (2.1), получим:

$$\begin{aligned} V^{(2)} &= [ T^{(2)} ] \\ V^{(4)} &= [ T^{(4)} ] - [ [ T^{(2)} ] \cdot F [ T^{(2)} ] ], \end{aligned} \quad (2.4)$$

где квадратные скобки обозначают здесь переход на массовую поверхность. В случае квантовой электродинамики при рассеянии электрона на позитроне соотношения (2.4) можно изобразить с помощью диаграмм Фейнмана следующим образом (в принятом приближении достаточно ограничиться диаграммами до четвертого порядка включительно):



Р и с . 3.

(Сплошная линия обозначает электрон или позитрон, волнистая - фотон).

При этом  $V^{(2)}$  описывается диаграммами а и f рис. 3, а  $V^{(4)}$  - всеми остальными диаграммами. Диаграммы, где внутри вставлено F, условно изображают вычитаемые члены в определении (2.4) для  $V^{(4)}$ . Более подробная запись ясна из (2.1). Диаграммы f, g, h, i описывают так называемое обменное взаимодей-

ствие электрона с позитроном, учитывающее возможность виртуального превращения электрона и позитрона в фотоны.

Как нетрудно видеть, потенциал  $V$  является комплексным. Действительно, диаграммы  $i$  имеют неупругое двухфотонное промежуточное состояние, и, следовательно, их мнимая часть в области, где имеются связанные состояния,  $s = 4E^2 < 4\pi^2$  отлична от нуля. Как известно, мнимая часть потенциала характеризует неупругие процессы. В данном случае она описывает вероятность распада парапозитрония на два фотона.

Вычисление уровней энергии позитрония мы будем производить по теории возмущений. При этом за исходное приближение естественно взять кулоновский потенциал, волновые функции которого хорошо известны. Представляя диаграмму  $a$  рис. 3 в виде

$$V_a = \mathcal{C} + \Lambda V_a,$$

где  $\mathcal{C}$  - кулоновский потенциал, и обозначая обменную диаграмму  $f$  рис. 3 через  $V_f$ , получим для потенциала выражение

$$V = \mathcal{C} + \Lambda V_a + V_f + V^{(4)}. \quad (2.5)$$

Члены  $\Lambda V_a$  и  $V_f$  имеют первый порядок малости ( $\approx a$ ), а  $V^{(4)}$  - второго порядка малости ( $\sim a^2$ ). Поэтому при вычислении поправок к кулоновским уровням энергии необходимо учитывать член второго порядка теории возмущений, получающийся от части потенциала  $(\Delta V_a + V_f)$ . Таким образом поправку к уровням энергии можно символически записать в виде:

$$\Delta E = \langle \Lambda V_a + V_f \rangle + \langle V^{(4)} \rangle + \langle (\Lambda V_a + V_f) F (\Lambda V_a + V_f) \rangle. \quad (2.6)$$

Величина  $F$  определена в (1.6), а символ  $\langle \dots \rangle$  означает матричный элемент по волновым функциям уравнения (1.13) с кулоновским потенциалом.

### § 3. Вычисление уровней энергии позитрония. Прямое взаимодействие

Рассмотрим сначала диаграммы  $a - e$  рис. 3, описывающие прямое взаимодействие электрона и позитрона. В низшем порядке прямой потенциал дается диаграммой  $a$  рис. 3 на массовой поверхности. Используя определение  $T$ -матрицы (1.1), получаем из (2.4), согласно обычным фейнмановским правилам <sup>15/</sup>:

$$V_a(\vec{p}, \vec{q}) = -e^2 \frac{[\bar{u}_1^+(\vec{p}) \gamma_1^\mu u_1^-(\vec{q})][\bar{u}_2^-(\vec{-q}) \gamma_2^\mu u_2^+(\vec{-p})]}{(\vec{p} - \vec{q})^2 - i\delta}. \quad (3.1)$$

Обозначения импульсов соответствуют рис.1. Мы используем следующее представление для  $\gamma$ -матриц:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где  $\vec{\sigma}$  - спиновые матрицы Паули, и скалярное произведение определяется как

$$a^\mu b^\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Для получения дальнейшего приближения удобно представить четырехкомпонентные спиноры  $u^+$  и  $u^-$  в двухкомпонентной форме /6/:

$$u^{\pm}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{p^0 + m}{2p^0}} \begin{pmatrix} w \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{p^0 + m} w \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где  $w$  - произвольные двухкомпонентные спиноры.

Преобразуем также спиноры  $\bar{u}^-$  и  $u^+$  в  $\bar{u}^-$  и  $\bar{u}^+$  с помощью матрицы зарядового сопряжения  $C$ :

$$\bar{u}^- = C u^-, \quad u^+ = C \bar{u}^+. \quad (3.4)$$

Это соответствует введению волновой функции позитрона /6/. Матрицу зарядового сопряжения выберем в виде:

$$C = \gamma^0 \gamma^2. \quad (3.5)$$

Учитывая соотношение

$$\bar{u}^- \gamma^\mu u^+ = \bar{u}^+ \gamma^\mu u^-$$

и подставляя (3.2) и (3.3) в (3.1), получим:

$$\begin{aligned} V_{\pm}(\vec{p}, \vec{q}) = & -\frac{e^2}{k^2} \frac{(p^0 + m)(q^0 + m)}{4p^0 q^0} \times \\ & \times w_1^* w_2^* \left\{ \left[ 1 + \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p})(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q})}{(p^0 + m)(q^0 + m)} \right] \left[ 1 + \frac{(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{p})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q})}{(p^0 + m)(q^0 + m)} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{(p^0 + m)(q^0 + m)} [(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p})\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_1(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q})][(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{p})\vec{\sigma}_2 + \vec{\sigma}_2(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q})] \right\} w_1 w_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$p^0 = \sqrt{p^2 + m^2}, \quad q^0 = \sqrt{q^2 + m^2}, \quad \vec{k} = \vec{p} - \vec{q}.$$

Поскольку как  $T$ , так и  $V$  являются матрицами, что соответствует различным ориентациям спина электрона и позитрона (поляризационные индексы у спиноров  $u$  и  $w$  опущены), то в дальнейшем мы будем опускать спиноры  $w$ , получая таким образом явное матричное выражение для  $T$  и  $V$ . При вычислении поправок к уровням энергии

надо будет взять матричные элементы  $V$  по соответствующим собственным функциям полного углового момента и спина. Мы произведем в (3.6) нерелятивистское разложение по  $p/m$ , поскольку в дальнейшем при вычислении поправок к кулоновским уровням энергии нам придется брать матричные элементы по кулоновским волновым функциям. Эти функции содержат множитель

$$\frac{p}{(p^2 - m W_n)^{l+2}},$$

где  $W_n$  - кулоновские уровни энергии, поэтому при интегрировании по  $p$  от 0 до  $\infty$  основной вклад будет давать область  $p^2 = |m W_n| \approx m^2 a^2$ . Таким образом разложение подынтегрального выражения по  $p/m$  будет эквивалентно разложению всего интеграла по  $a$  (при условии сходимости интеграла).

Применяя несколько раз соотношение

$$\sigma_i \sigma_j = i \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij},$$

можно преобразовать (3.6) к виду:

$$V_n(\vec{p}, \vec{q}) = -\frac{e^2}{k^2} \left\{ 1 + \frac{1}{4m^2} (3i[\vec{p} \times \vec{q}] \cdot (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) + 4(\vec{p} \cdot \vec{q}) + (\vec{k} \cdot \vec{\sigma}_1)(\vec{k} \cdot \vec{\sigma}_2) - k^2(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)) \right\}. \quad (3.7)$$

$\vec{k} = \vec{p} - \vec{q}$ .

Как нетрудно видеть, первый член в выражении (3.7) дает кулоновский потенциал:

$$U(\vec{p}, \vec{q}) = -\frac{e^2}{(\vec{p} - \vec{q})^2}, \quad (3.8)$$

который мы выберем в качестве исходного приближения. Нерелятивистское уравнение (1.14) при этом дает хорошо известные уровни энергии <sup>/6/</sup>

$$W_n = -\frac{m}{4} \left( \frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{n^2} = -\frac{m}{4} \frac{a^2}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

$a = \frac{e^2}{4\pi}$

Выпишем еще значение квадрата модуля волновой функции в  $r$ -пространстве при  $r=0$

$$|\psi_r(0)|^2 = \frac{(am)^3}{8\pi n^3}. \quad (3.10)$$

Как известно, для системы двух фермионов сохраняется отдельно как полный момент количества движения, так и полный спиновый момент. В связи с этим все уровни позитрония можно разделить на синглетные (парапозитроний) с  $s=0$  и триплетные (ортопозитроний) с  $s=1$  ( $s(s+1)$  - собственные значения оператора квадрата полного спина). Целью настоящей работы является вычисление расщепления уровней энергии основных состояний ( $n=1$ ) орто- и парапозитрония, т.е.  $\Delta W = E(I^2 S_1) - E(I^2 S_0)$ . Орбитальный момент при этом равен нулю и, следовательно, соответствующие волно-

вые функции не зависят от угловых переменных. В качестве решений уравнения (1.14) с потенциалом (3.8) мы возьмем паулевские волновые функции, которые в данном случае будут собственными функциями оператора квадрата полного спина.

В низшем порядке теории возмущений поправки к уровням энергии (3.9) имеют вид

$$\Delta E_n = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi^*(\vec{p}) \Delta V_n(\vec{p}, \vec{q}) \psi(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q}, \quad (3.11)$$

где

$$\Delta V_n = V_n - U,$$

а  $V_n$  — дается выражением (3.7). Мы не учитываем здесь релятивистских поправок, которые дает уравнение (1.13) (фактор  $\sqrt{p^2 + m^2}$ ) поскольку они не дают вклада в расщепление основного уровня позитрония. При интегрировании в (3.11) отличный от нуля результат дают два последних члена выражения (3.7). Используя формулу

$$\int (\vec{a} \vec{k}) (\vec{b} \vec{k}) d\Omega_k = \frac{1}{3} (\vec{a} \vec{b}) k^2 \int d\Omega_k, \quad (3.12a)$$

где  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коммутируют, получим

$$\Delta E_n = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{4m^2} \int \psi^*(\vec{p}) \left[ (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) - \frac{(\vec{k} \vec{\sigma}_1)(\vec{k} \vec{\sigma}_2)}{k^2} \right] \psi(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q} = \quad (3.12)$$

$$= \frac{e^2}{4m^2} |\psi_s(0)|^2 \frac{2}{3} \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle = \frac{2\pi a}{3m^2} |\psi_s(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle.$$

Здесь под символом  $\langle \dots \rangle$  понимается взятие матричного элемента по собственным функциям оператора квадрата полного спина.

Рассмотрим теперь вклад в потенциал от диаграммы  $b$  рис. 3 (поправки в вершинную часть). Этот вклад сводится к учету аномального магнитного момента электрона (позитрона). Действительно, при вычислении поправки к уровням энергии мы получим интеграл типа (3.11). Аналогично предыдущему легко убедиться, что в этом интеграле основной вклад будут давать малые значения импульсов  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$ . Выражение для вершинной части третьего порядка при малых значениях  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$  имеет вид <sup>15/</sup>:

$$\Gamma_\mu(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{a}{8\pi m} \left[ (\vec{p} - \vec{q})^\mu \gamma^\mu - \gamma^\mu (\vec{p} - \vec{q})^\mu \right].$$

Поскольку в потенциале  $\Gamma_\mu$  будет стоять между спинорами  $u$  и  $\bar{u}$ , то можно использовать уравнение Дирака

$$(\vec{p} - m) u(\vec{p}) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{u}^+(\vec{p}) \Gamma_{\mu}(\vec{p}, \vec{q}) u^-(\vec{q}) &= \frac{a}{8\pi m} \bar{u}^+(\vec{p}) [(\hat{p}-\hat{q})\gamma^{\mu} - \gamma^{\mu}(\hat{p}-\hat{q})] u^-(\vec{q}) = \\ &= \frac{a}{4\pi m} \bar{u}^+(\vec{p}) [-(p+q)_{\mu} + 2m\gamma^{\mu}] u^-(\vec{q}). \end{aligned}$$

Первый член не дает вклада в расщепление основного уровня позитрония. Вклад второго члена в потенциал эквивалентен замене точечной вершины  $e\vec{y}$  на  $e\vec{y} \frac{a}{2\pi}$  что и соответствует учету аномального магнитного момента.

Выражение для поправки к уровням энергии может быть получено поэтому умножением  $\Delta E_a$  на  $2 \frac{a}{2\pi}$ , поскольку имеются две вершины (две диаграммы  $b$ ), Таким образом

$$\Delta E_b = \frac{a}{\pi} \Delta E_a = \frac{2a^2}{3m^2} |\psi_r(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle. \quad (3.13)$$

Часть потенциала, связанная с диаграммой с рис. 3, не дает вклада в поправку к основному уровню энергии позитрония. Действительно, поскольку эта диаграмма имеет порядок  $a^2$ , то при вычислении матричных элементов с достаточной точностью можно положить в выражении для потенциала  $\vec{p} = \vec{q} = 0$ ,  $E = m$ . При этом, однако, в силу условия нормировки для поляризационного оператора  $\Pi[(\vec{p}-\vec{q})^2]$  в нуле<sup>15/</sup>:

$$\Pi(0) = 0; \quad k^2 \Pi(k^2) \Big|_{k^2=0} = 0$$

соответствующий член  $\Delta V_c$  в потенциале обращается в нуль.

Рассмотрим теперь вклад в потенциал от двухфотонного обмена, даваемый диаграммами  $d$  и  $e$  рис. 3, а также поправку к уровням энергии второго порядка от возмущения  $\Delta V_a$ . Согласно формуле (2.8), эта поправка будет иметь вид:

$$\Delta E' = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi^*(\vec{p}) \left[ \int d\vec{k} \Delta V_a(\vec{p}, \vec{k}) F(k) \Delta V_a(\vec{k}, \vec{q}) \right] \psi(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q},$$

где согласно уравнению (1.13)

$$F(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{k^2 + m^2}}{E^2 - k^2 - m^2}. \quad (3.14)$$

Поправка к уровням энергии от части потенциала, соответствующей диаграммам  $d$  рис. 3, дается выражением:

$$\begin{aligned} \Delta E''_d &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi^*(\vec{p}) \{ T_d^{(4)}(\vec{p}, \vec{q}) - \\ &- \int V_a(\vec{p}, \vec{k}) F(k) V_a(\vec{k}, \vec{q}) d\vec{k} \} \psi(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где  $T_d^{(4)}$  обозначает квадратную диаграмму на массовой поверхности, а  $V_d$  дается выражением (3.1). Складывая (3.14) и (3.15) с учетом того, что  $\Delta V_d = V_d - \bar{C}$  получим:

$$\begin{aligned} \Delta E_d &= \Delta E'_d + \Delta E''_d = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \dot{\psi}(\vec{p}) \{ T_d^{(4)}(\vec{p}, \vec{q}) - \\ &- \int \Delta V_d(\vec{p}, \vec{k}) F(k) \bar{C}(\vec{k}, \vec{q}) d\vec{k} - \\ &- \int \bar{C}(\vec{p}, \vec{k}) F(k) \Delta V_d(\vec{k}, \vec{q}) d\vec{k} - \\ &- \int \bar{C}(\vec{p}, \vec{k}) F(k) \bar{C}(\vec{k}, \vec{q}) d\vec{k} \} \psi(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q} = \\ &= \int \dot{\psi}(\vec{p}) R_d(\vec{p}, \vec{q}) \psi(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q}; \quad \bar{C}(\vec{p}, \vec{k}) = -\frac{e^2}{(\vec{p} - \vec{k})^2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Выражение для  $T_d^{(4)}(\vec{p}, \vec{q})$  на массовой поверхности с учетом (3.4) имеет вид:

$$\begin{aligned} T_d^{(4)}(\vec{p}, \vec{q}) &= \bar{u}_1^+(\vec{p}) C_2 u_2^-(\vec{q}) M_d^{(4)}(\vec{p}, \vec{q}) u_1^-(\vec{q}) C_2 \bar{u}_2^+(\vec{p}) \\ &= \bar{u}_1^+(\vec{p}) \bar{u}_2^+(\vec{p}) M_d^{(4)}(\vec{p}, \vec{q}) u_1^-(\vec{q}) u_2^-(\vec{q}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$M_d^{(4)}(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{ie^4}{(2\pi)^4} \int \frac{\gamma_\mu^\dagger [m + \gamma_0^\dagger (E + k_0) - \vec{\gamma} \vec{k}] \gamma_\nu^\dagger \gamma_\mu^\dagger [m + \gamma_0^\dagger (E - k_0) + \vec{\gamma} \vec{k}] \gamma_\nu^\dagger d^4 k}{[(E + k_0)^2 - k^2 - m^2][(E - k_0)^2 - k^2 - m^2][k_0^2 - (\vec{k} - \vec{p})^2][k_0^2 - (\vec{k} - \vec{q})^2]}.$$

При вычислении интегралов в (3.16) можно пренебречь зависимостью  $R_d(\vec{p}, \vec{q})$  от  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$  и соответственно положить  $E^2 = m^2$ , так как поправка  $\Delta E_d$  будет при этом пропорциональна  $e^4 |\dot{\psi}_r(0)|^2 = a^5$  и, следовательно, учет членов типа  $(p^2/m^2) = a^2$  даст превышение точности (см. замечание после формулы (3.6)). По этой же причине можно считать, что спиноры  $u$  имеют лишь верхние "большие" компоненты. Последний член в (3.16) не дает вклада в расщепление основного уровня позитрония и мы не будем его здесь рассматривать. С учетом этих замечаний выражение для  $M_d^{(4)}$  можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} M_d^{(4)}(0,0) &= \frac{2ie^4}{(2\pi)^4} \int \frac{[k_0^2 (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) - (\vec{k} \vec{\sigma}_1)(\vec{k} \vec{\sigma}_2)(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)] d^4 k}{k_\mu^2 k_\mu^2 [(m + k_0)^2 - k^2 - m^2][(m - k_0)^2 - k^2 - m^2]} = \\ &= \frac{2ie^4}{(2\pi)^4} \int k^2 dk \int d\Omega \frac{(k_0^2 - \frac{2}{3} k^2)(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)}{k_\mu^2 k_\mu^2 [(m + k_0)^2 - k^2 - m^2][(m - k_0)^2 - k^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (3.18)$$



где при взятии интеграла по углам использована формула (3.12) и соотношение

$$(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) = 2(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2).$$

Подставляя в (3.16) выражение (3.18) для  $T_d^{(4)}$  и выражение (3.11) для  $\Delta V_a$  и интегрируя по  $k_0$ , имеем для  $\Delta E_d$  выражение:

$$\Delta E_d = \frac{e^4}{(2\pi)^4} \frac{8\pi}{m^2} |\psi_r(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle I,$$

где

$$I = \frac{\pi}{8} \int dk \left\{ \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} - \frac{1}{k} + \frac{8m}{3k^2} \left( \frac{m}{\sqrt{k^2 + m^2}} - 1 \right) \right\} = \frac{\pi}{8} \left[ \ln \frac{2\lambda}{m} - \frac{8}{3} \right],$$

или

$$\Delta E_d = \frac{a^2}{m^2} |\psi_r(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \left[ \ln \frac{2\lambda}{m} - \frac{8}{3} \right]. \quad (3.19)$$

Здесь величина  $\lambda$ , обрезающая интеграл по  $k$  в нуле, отражает наличие инфракрасной расходимости. Подробно этот вопрос в связи с вычислением уровней энергии позитрония рассмотрен<sup>17/</sup>. Здесь же мы только заметим, что в сумме с поправкой для уровней энергии, даваемой диаграммой в рис. 3, член с логарифмом  $\lambda$  исчезает. Поправка к потенциалу, даваемая диаграммой в рис. 3, вычисляется совершенно аналогично предыдущему.

В результате получаем:

$$\begin{aligned} V_o(0,0) &= T_o^{(4)}(0,0) = \frac{2ie^4}{(2\pi)^4} 4\pi \int k^2 dk \int dk_o \frac{(k_o^2 - \frac{2}{3}k^2)(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)}{(k_\mu^2)^2 [(m-k_o)^2 - k^2 - m^2]^2} = \\ &= \frac{e^4}{(2\pi)^4} \frac{\pi^2}{m^2} \int dk \left\{ \frac{1}{k} - \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} + \frac{5}{3} \frac{m^2}{(\sqrt{k^2 + m^2})^3} \right\} (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) \\ &= \frac{a^2}{m^2} \left[ -\ln \frac{2\lambda}{m} + \frac{5}{3} \right] (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2). \end{aligned}$$

Поправка к уровням энергии будет иметь вид:

$$\Delta E_o = \frac{a^2}{m^2} |\psi_r(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \left[ -\ln \frac{2\lambda}{m} + \frac{5}{3} \right]. \quad (3.20)$$

Складывая (3.19) и (3.20), получим:

$$\Delta E_d + \Delta E_o = -\frac{a^2}{m^2} |\psi_r(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle. \quad (3.21)$$

Собирая вместе выражения (3.12), (3.13) и (3.21), получим поправку к основному уровню энергии позитрония, обусловленную прямым взаимодействием:

$$\Delta E_D = \Delta E_a + \Delta E_b + \Delta E_c + \Delta E_d + \Delta E_e = \quad (3.22)$$

$$= \frac{\alpha \pi}{m^2} |\psi_i(0)|^2 \left[ 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \right] \frac{2}{3} \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle.$$

#### § 4. Вычисление уровней энергии позитрония.

##### Обменное взаимодействие

Рассмотрим теперь вклад в потенциал  $V$  от обменных членов, даваемых диаграммами  $l-i$  рис. 3.

Выражение для полюсной диаграммы  $l$  рис. 3 имеет вид:

$$T_l(\vec{p}, \vec{q}) = - \frac{e^2}{4E^2} [ \bar{u}_1^+(\vec{p}) \gamma^\mu u_2^+(-\vec{p}) ] [ \bar{u}_2^-(\vec{q}) \gamma^\mu u_1^-(\vec{q}) ]. \quad (4.1)$$

С нужной точностью можно положить  $E^2 = m^2$ , так как соответствующая поправка  $\frac{E^2 - m^2}{m^2}$  имеет порядок  $\alpha^2$ , а весь член  $\sim \alpha^6$ , что выходит за рамки принятого приближения. Заменяя спинорные функции  $u^+$  и  $\bar{u}^-$ , согласно (3.4), получим:

$$T_l(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{e^2}{4m^2} [ \bar{u}_1^+(\vec{p}) \gamma^\mu C \bar{u}_2^+(-\vec{p}) ] [ \bar{u}_2^-(\vec{q}) C \gamma^\mu u_1^-(\vec{q}) ]. \quad (4.2)$$

Поскольку в выражении (4.2) для  $T_l$  содержится множитель  $\alpha/m^2$ , то можно считать, что спиноры  $u$  (3.3) имеют лишь верхние "большие" компоненты, так как учет нижних компонент дает поправки порядка  $p^2/m^2 = \alpha^2$ . Кроме того выражение (4.2) может быть приведено к виду, где матрицы  $\vec{\sigma}$  относятся к спинам отдельных частиц<sup>1/3/</sup> (в расщепление основного уровня дают вклад только пространственные  $\vec{y}$ -матрицы):

$$\begin{aligned} & + \\ & ( \bar{u}_1^+ \gamma^\mu C \bar{u}_2^+ ) ( u_2^- C \gamma^\mu u_1^- ) \rightarrow \\ & + \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 \frac{1}{2} ( 3 + \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 ) w_1 w_2 = \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 s^2 w_1 w_2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$\vec{s} = \frac{1}{2} ( \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2 ) \quad (4.4)$$

$\vec{w}$  - оператор полного спина системы. Опуская двухкомпонентные спиноры  $w$ , получаем, согласно (2.4) выражение для потенциала

$$V_l(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{e^2}{4\pi r^2} s^2 = \frac{\pi\alpha}{m^2} s^2. \quad (4.5)$$

Поправка к уровням энергии получится после усреднения (4.5) по волновым функциям уравнения (1.13) с кулоновским потенциалом:

$$\Delta E_t = \langle V_t \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi(\vec{p}) d\vec{p} \int \psi(\vec{q}) d\vec{q}. \quad (4.6)$$

Волновые функции  $\psi(\vec{p})$  можно приближенно получить, итерируя уравнение (1.13) с кулоновским потенциалом и взяв в качестве исходного приближения кулоновские волновые функции  $\psi_c$ , удовлетворяющие уравнению (1.14).

Тогда в первом приближении имеем:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{p}) &= \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{E^2 - p^2 - m^2} \int U(\vec{p}, \vec{q}) \psi_c(\vec{q}) d\vec{q} = \\ &= \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{m} \psi_c(\vec{p}) = \frac{m}{\sqrt{p^2 + m^2}} \psi_c(\vec{p}) + \frac{p^2}{m \sqrt{p^2 + m^2}} \psi_c(\vec{p}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где первое слагаемое дает нерелятивистское приближение при  $\frac{p^2}{m^2} \ll 1$ . Нормированную кулоновскую волновую функцию S-состояния можно представить в виде:

$$\psi_c(\vec{p}) = \frac{2m\alpha}{\sqrt{2\pi}} \psi_s(0) \frac{1}{(p^2 + \frac{1}{4}m^2\alpha^2)^2}. \quad (4.8)$$

Используя (4.7) и (4.8), с требуемой точностью можно записать интегралы, фигурирующие в (4.6) следующим образом:

$$\begin{aligned} \int \psi(\vec{p}) d\vec{p} &\approx (2\pi)^{3/2} \psi_s(0) \left[ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\Lambda \frac{dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} \right] = \\ &= (2\pi)^{3/2} \psi_s(0) (1 + \alpha L). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Величина  $L$  представляется расходящимся интегралом ( $\Lambda$  - обрезание). Однако, как будет видно из дальнейшего, в сумме с поправками к уровням энергии от диаграмм  $g$  (рис. 2) мы получим конечный результат. Подставляя (4.9) в (4.6), имеем:

$$\Delta E_t = \frac{\pi\alpha}{m^2} |\psi_s(0)|^2 \langle s^2 \rangle + \langle V_t \rangle |\psi_s(0)|^2 2\alpha L. \quad (4.10)$$

Вклад в потенциал от диаграммы  $g$  рис. 3 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} V_g(\vec{p}, \vec{q}) &= T_{g_1}(\vec{p}, \vec{q}) - \int d\vec{k} V_n(\vec{p}, \vec{k}) F(k) V_t(\vec{k}, \vec{q}) + \\ &+ T_{g_2}(\vec{p}, \vec{q}) - \int d\vec{k} V_t(\vec{p}, \vec{k}) F(k) V_n(\vec{k}, \vec{q}), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где

$$T_{A_1} = \frac{e^2}{4E^2} | \bar{u}_1^+(\vec{p}) |_{\mu} ( \vec{p}, E ) C \bar{u}_2^+(\vec{-p}) | | u_2^-(\vec{-q}) C \gamma^{\mu} u_1^-(\vec{q}) |$$

$$T_{A_2} = \frac{e^2}{4E^2} | \bar{u}_1^+(\vec{p}) \gamma^{\mu} C u_2^+(\vec{-p}) | | u_2^-(\vec{-q}) C |_{\mu} ( \vec{q}, E ) u_1^-(\vec{q}) | \quad (4.12)$$

$$\Gamma_{\mu} ( \vec{p}, E ) = \frac{e^2}{i(2\pi)^4} \int \frac{\gamma^{\lambda} [ m - \gamma^0 ( E + k^0 ) + \gamma ( \vec{k} - \vec{p} ) ] \gamma^{\mu} [ m + \gamma^0 ( E - k^0 ) - \gamma ( \vec{p} - \vec{k} ) ] \gamma^{\nu} d^4 k}{k_{\nu}^2 [ ( E + k^0 )^2 - ( \vec{k} - \vec{p} )^2 - m^2 ] [ ( E - k^0 )^2 - ( \vec{k} - \vec{p} )^2 - m^2 ]}$$

Необходимо также учесть соответствующий член второго порядка теории возмущений для поправки к уровням энергии из (2.6):

$$\Delta E_a' = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi ( \vec{p} ) \int d\vec{k} [ \Delta V_a ( \vec{p}, \vec{k} ) F ( k ) V_l ( \vec{k}, \vec{q} ) +$$

$$+ V_l ( \vec{p}, \vec{k} ) F ( k ) \Delta V_a ( \vec{k}, \vec{q} ) ] \psi ( \vec{q} ) d\vec{p} d\vec{q}, \quad (4.13)$$

где

$$\Delta V_a = V_a - \bar{C}$$

$$\bar{C} ( \vec{p}, \vec{k} ) = - \frac{e}{( \vec{p} - \vec{k} )^2}.$$

Беря матричный элемент от потенциала (4.11) и складывая с (4.13), получим для поправки к уровням энергии выражение:

$$\Delta E_a = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi ( \vec{p} ) | T_{A_1} ( \vec{p}, \vec{q} ) - \int d\vec{k} \bar{C} ( \vec{p}, \vec{k} ) F ( k ) V_l ( \vec{k}, \vec{q} ) +$$

$$+ T_{A_2} ( \vec{p}, \vec{q} ) - \int d\vec{k} V_l ( \vec{p}, \vec{k} ) F ( k ) \bar{C} ( \vec{k}, \vec{q} ) | \psi ( \vec{q} ) d\vec{p} d\vec{q}. \quad (4.14)$$

Используя уравнение (1.14) и представление (4.7) для  $\psi$  преобразуем второе и четвертое слагаемые из (4.14) следующим образом:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi ( \vec{p} ) \bar{C} ( \vec{p}, \vec{k} ) F ( k ) V_l ( \vec{k}, \vec{q} ) \psi ( \vec{q} ) d\vec{p} d\vec{k} d\vec{q} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi ( \vec{p} ) \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{m} V_l ( \vec{p}, \vec{q} ) \psi ( \vec{q} ) d\vec{p} d\vec{q} = \quad (4.15)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \dot{\psi}_0(\vec{p}) V_f(\vec{p}, \vec{q}) \psi_0(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q} + \langle V_f \rangle |\psi_f(0)|^2 a L.$$

где  $L$  определено в (4.9).

Таким образом выражение (4.14) для  $\Delta E_g$  принимает вид:

$$\Delta E_g = \int \dot{\psi}_0(\vec{p}) \{ T_{g_1}(\vec{p}, \vec{q}) + T_{g_2}(\vec{p}, \vec{q}) - 2V_f(\vec{p}, \vec{q}) \} \psi_0(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q} - \langle V_f \rangle |\psi_f(0)|^2 2a L = \quad (4.16)$$

$$= \int \dot{\psi}_0(\vec{p}) R_g(\vec{p}, \vec{q}) \psi_0(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q} - \langle V_f \rangle |\psi_f(0)|^2 2a L.$$

Отсюда видно, что действительно выражения (4.10) и (4.16) в сумме дают конечный результат.

При вычислении матричных элементов в (4.16) можно с достаточной точностью, как и раньше, положить в  $R_g(\vec{p}, \vec{q})$   $\vec{p} = \vec{q} = 0$  и  $E = m$ , а также считать, что спиноры  $u$  имеют лишь верхние "большие" компоненты. Выражение для вершинной части принимает вид:

$$\Gamma_\mu(0, m) = \frac{e^2}{i(2\pi)^4} \int \frac{\gamma^\mu (2k_0^2 - \frac{2}{3} k^2 - 4m^2) d^4 k}{k_0^2 [(m - k_0)^2 - k^2 - m^2] [(m + k_0)^2 - k^2 - m^2]}.$$

Кроме того, надо произвести ренормировку вершинной функции  $\Gamma_\mu$ , которая в данном случае сводится к вычитанию ее значения в нуле  $\Gamma_\mu(0, 0)$ . Производя преобразование, аналогичное (4.3), окончательно имеем:

$$\Delta E_g = \frac{\pi a}{m^2} |\psi_f(0)|^2 \langle s^2 \rangle \frac{4a m^2}{\pi} \int \frac{dk}{k^2} \left[ \frac{m}{\sqrt{k^2 + m^2}} - 1 \right] = \quad (4.17)$$

$$= - \frac{\pi a}{m^2} |\psi_f(0)|^2 \langle s^2 \rangle \frac{4a}{\pi} - \langle V_f \rangle |\psi_f(0)|^2 2a L.$$

Диаграммы  $h$  описывают вклад в потенциал от эффекта поляризации вакуума:

$$V_h(\vec{p}, \vec{q}) = T_h(\vec{p}, \vec{q}) - \int d\vec{k} V_f(\vec{p}, \vec{k}) F(k) V_f(\vec{k}, \vec{q}), \quad (4.18)$$

где

$$T_h(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{e^2 [d(4E^2) - 1]}{4E^2} [u_1^+(\vec{p}) \gamma^\mu C u_2^+(-\vec{p})] [u_2^-(\vec{q}) C \gamma^\mu u_1^-(\vec{q})].$$

Фактор  $[d(4E^2) - 1]$  появляется за счет модификации фотонного пропагатора. Относящийся сюда член второго порядка теории возмущений имеет вид (см. (2.6)):

$$\Delta E_h' = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \dot{\psi}(\vec{p}) \left[ \int d\vec{k} V_f(\vec{p}, \vec{k}) F(k) V_f(\vec{k}, \vec{q}) \right] \psi(\vec{q}) d\vec{q} d\vec{p}. \quad (4.19)$$

Складывая (4.19) с матричным элементом от  $V_h$ , получим:

$$\Delta E_h = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi(\vec{p}) T_h(\vec{p}, \vec{q}) \psi(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q}. \quad (4.20)$$

Здесь, как и прежде, с нужной точностью можно положить в выражении для  $T_h$   $\vec{p} = \vec{q} = 0$ ,  $E = m$ . Функция  $d(k^2)$  в низшем порядке теории возмущений хорошо известна<sup>/5/</sup>. Производя соответствующую ренормировку, имеем:

$$d(4m^2) - 1 = \frac{e^2}{4\pi^2} \left(-\frac{8}{9}\right) = -\frac{8\alpha}{9\pi}. \quad (4.21)$$

Подставляя (4.21) в (4.18) и производя замену (4.3), получим из (4.20):

$$\Delta E_h = \frac{\pi\alpha}{m^2} |\psi_r(0)|^2 < s^2 > \left(-\frac{8\alpha}{9\pi}\right). \quad (4.22)$$

Диаграммы  $i$  учитывают возможность виртуальной двухфотонной аннигиляции электрона и позитрона. Соответствующий вклад в потенциал совпадает с матричным элементом рассеяния:

$$\begin{aligned} V_i(\vec{p}, \vec{q}) &= T_i^{(4)}(\vec{p}, \vec{q}) = u_1^+(\vec{p}) \bar{u}_2^-(\vec{q}) M_i(\vec{p}, \vec{q}) u_2^+(\vec{p}) u_1^-(\vec{q}) = \\ &= -\bar{u}_1^+(\vec{p}) u_2^-(\vec{q}) C M_i(\vec{p}, \vec{q}) C u_2^+(\vec{p}) u_1^-(\vec{q}), \end{aligned} \quad (4.23)$$

где

$$\begin{aligned} M_i(\vec{p}, \vec{q}) &= \frac{ie^4}{(2\pi)^4} \int \frac{\{\gamma^\mu [m - k_0 \gamma_0 - \vec{\gamma}(\vec{p} - \vec{k})] \gamma^\nu \{\gamma_\nu [m - \gamma_0 k_0 - \vec{\gamma}(\vec{q} - \vec{k})] \gamma_\mu\}}{[k_0^2 - (\vec{p} - \vec{k})^2 - m^2] [k_0^2 - (\vec{q} - \vec{k})^2 - m^2] [(E + k_0)^2 - k^2] [(E - k_0)^2 - k^2]} d^4 k \\ &+ \frac{ie^4}{(2\pi)^4} \int \frac{\{\gamma^\mu [m - \gamma_0 k_0 - \vec{\gamma}(\vec{p} - \vec{k})] \gamma^\nu \{\gamma_\nu [m + \gamma_0 k_0 - \vec{\gamma}(\vec{q} + \vec{k})] \gamma_\mu\}}{[k_0^2 - (\vec{p} - \vec{k})^2 - m^2] [k_0^2 - (\vec{q} + \vec{k})^2 - m^2] [(E + k_0)^2 - k^2] [(E - k_0)^2 - k^2]} d^4 k. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему рассмотрению можно положить  $\vec{p} = \vec{q} = 0$ ,  $E = m$ .

Дополнительно умножая величину  $M_i$  слева и справа на матрицу зарядового сопряжения  $C$ , получим:

$$C M_i(0,0) C = \frac{i\alpha^2}{\pi^2} \int \frac{\gamma^\mu (m - \vec{k}) \gamma^\nu C [C \gamma_\mu (m - \vec{k}) \gamma_\nu + C \gamma_\nu (m + \vec{k}) \gamma_\mu] d^4 k}{(k_0^2 - k^2 - m^2)^2 [(m + k_0)^2 - k^2] [(m - k_0)^2 - k^2]}. \quad (4.24)$$

В рамках принятого приближения можно считать, что спиноры  $u$  имеют лишь верхние большие компоненты. Тогда вклад в расщепление основного уровня позитрония будет давать лишь следующая матричная структура в числителе (4.24):

$$-\gamma_i (\vec{\gamma} \vec{k}) \gamma_j C [-C \gamma_i (\vec{\gamma} \vec{k}) \gamma_j + C \gamma_j (\vec{\gamma} \vec{k}) \gamma_i].$$

Интеграция по углам с использованием формулы (3.12) приводит к выражению

$$-\frac{1}{3} k^2 \gamma_i \gamma_n \gamma_j C [-C \gamma_i \gamma_n \gamma_j + C \gamma_j \gamma_n \gamma_i], \quad i, j, n=1, 2, 3 \quad (4.25)$$

Нетрудно видеть, что отличный от нуля вклад дают лишь члены, где все индексы  $i, j, n$  различны. Вводя тогда матрицу

$$\gamma_s = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3,$$

перепишем (4.25) в виде

$$4k^2 (\gamma_0 \gamma_s C) (C \gamma_0 \gamma_s).$$

Используя теперь явное представление (3.5) для матрицы  $C$ , получим вместо числителя подынтегрального выражения в (4.24)

$$-4k^2 (\gamma_s \gamma_2) (\gamma_s \gamma_2).$$

Матричный элемент в (4.23) преобразуем аналогично (4.3)

$$\begin{aligned} & (\bar{u}_1^+ \gamma_s \gamma_2 \bar{u}_2^+) (u_2^- \gamma_s \gamma_2 u_1^-) \rightarrow \\ & - \dot{w}_1 \dot{w}_2 \frac{1}{2} [1 - (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)] w_1 w_2 = \\ & = - \dot{w}_1 \dot{w}_2 (2 - s^2) w_1 w_2. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Интеграл в (4.24) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{16 i a^2}{\pi} \int k^4 dk \int d k_0 \frac{1}{(k_0^2 - k^2 - m^2)^2 [(m + k_0)^2 - k^2] [(m - k_0)^2 - k^2]} \\ & = \frac{2a^2}{m^2} \int dk \left\{ \frac{k^2}{\sqrt{(k^2 + m^2)^3}} + \frac{k}{m^2 - k^2 + i\epsilon} \right\} = \\ & = \frac{a^2}{m^2} [2 \ln 2 - 1 - i\pi]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Подставляя (4.26) и (4.27) в (4.23), получаем выражение для

$$V_i = \frac{a^2}{m^2} [2 \ln 2 - 2 - \pi i] (2 - s^2). \quad (4.28)$$

Усредняя  $V_i$  по кулоновским волновым функциям, получим соответствующую поправку к уровням энергии

$$\Delta E_i = \frac{\pi a}{m^2} \langle s^2 - 2 \rangle |\psi_r(0)|^2 \frac{2a}{\pi} (1 - \ln 2 + \frac{\pi i}{2}). \quad (4.29)$$

Как уже указывалось в разделе 2, мнимая часть в (4.23) характеризует вероятность распада позитрония на два  $\gamma$ -кванта и, следовательно, определяет его время жизни.

Подставляя для  $|\psi_r(0)|^2$  выражение (3.10), получим для вероятности распада:

$$w_{2\gamma} = -2Im \Delta E_I = \frac{\alpha^5 \pi}{2} = 0,804 \cdot 10^{10} \frac{1}{сек}. \quad (4.30)$$

Собирая равенства (4.10), (4.17), (4.22) и действительную часть (4.29) получим для полной поправки к основному уровню энергии позитрония от обменного взаимодействия:

$$\begin{aligned} \Delta E_E = \frac{\pi a}{m^2} |\psi_r(Q)|^2 \langle s^2 \rangle \left[ 1 - \frac{44a}{9\pi} \right] + \\ + \langle s^2 - 2 \rangle \frac{2a}{\pi} (1 - \ln 2). \end{aligned} \quad (4.31)$$

### § 5. Результаты и заключение

Складывая вместе поправки к основному уровню энергии от прямого и обменного взаимодействий (равенства (3.22) и (4.31)) получим:

$$\begin{aligned} \Delta E = \frac{\pi a}{m^2} |\psi_r(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \frac{2}{3} \left[ 1 - \frac{a}{2\pi} \right] + \\ + \langle s^2 \rangle \left[ 1 - \frac{44a}{9\pi} \right] + \langle s^2 - 2 \rangle \frac{2a}{\pi} (1 - \ln 2). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Из (5.1) видно, что появляется расщепление  $1^1 S_0$  и  $1^3 S_1$  - состояний в позитронии. Поскольку

$$\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 = 2s^2 - 3,$$

то зависимость этих уровней энергии от полного спина  $\vec{s}$  системы будет иметь вид:

$$\Delta E = \frac{\pi a}{m^2} |\psi_r(0)|^2 \langle s^2 \rangle \left[ \frac{7}{3} - \frac{2a}{\pi} \left( \frac{16}{9} + \ln 2 \right) \right]. \quad (5.2)$$

Отсюда для разности триплетного и синглетного уровней получаем, заменяя  $|\psi_r(0)|^2$  его значением (3.10) для  $n=1$ :

$$\begin{aligned} \Delta W = E(1^3 S_1) - E(1^1 S_0) = \\ = \alpha^4 m \left[ \frac{7}{12} - \left( \frac{16}{9} + \ln 2 \right) \frac{a}{2\pi} \right] = 2,0337 \cdot 10^5 \text{ Мгц}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Это значение находится в полном согласии с экспериментально найденной величиной расщепления /8/

$$\Delta W = (2,0333 \pm 0,0004) \cdot 10^5 \text{ Мгц}$$



Таким образом, проведенные выше вычисления показывают, что квазипотенциальный подход в квантовой теории поля является эффективным методом для вычисления энергии связанного состояния двух частиц. Преимущество этого метода по сравнению с рассмотрением этой задачи на основе четырехмерного уравнения Бете-Солпитера состоит в том, что при квазипотенциальном подходе достаточно значения "трехмерных" волновых функций. Основные осложнения в <sup>14/</sup> возникают именно из-за необходимости использования четырехмерных волновых функций, получающихся путем подстановки кулоновских волновых функций в правую часть уравнения Бете-Солпитера. Кроме того, поскольку квазипотенциал определяется в терминах амплитуды рассеяния на массовой поверхности, то значительно облегчается построение этого потенциала (например, с помощью диаграмм Фейнмана и техники дисперсионных соотношений).

В заключение автор выражает глубокую благодарность Н.Н.Боголюбову, А.А.Логуну, Нгуен Ван Хьеу, Р.Н.Фаустов, А.Н.Тавхелидзе за плодотворные и стимулирующие дискуссии и Б.А.Арбузову, А.Т.Филиппову, О.А.Хрусталеву за обсуждение результатов.

#### Л и т е р а т у р а

1. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Quasi-optical Approach in Quantum Field Theory., Preprint JINR, E-1145, Nuovo Cimento 29, 380 (1963).
2. Нгуен Ван Хьеу, Р.Н.Фаустов. Квазиоптический потенциал в модели квантовой теории поля. Препринт ОИЯИ Р-1253,
3. J.Pirene. Arch. Sci. Phys. Nat., 29, 121, 207, 265 (1947).  
В.Б.Берестецкий, Л.Д.Ландау. ЖЭТФ, 19, 673, 1130 (1949).
4. R.Karplus, A.Klein. Phys. Rev., 87, 848(1952).
5. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантовых полей ГИТТЛ, Москва (1957).
6. А.И.Ахнезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика. Физматгиз, Москва (1959).
7. T.Fulton, R.Karplus. Phys. Rev., 93, 1109 (1954).
8. V.W.Hughes, S.Marde, C.S.Wu. Phys. Rev., 6, 934 (1957).
9. Р.Н.Фаустов. Препринт ОИЯИ Р-1566, Дубна (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел  
25 февраля 1964 г.