ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р.Н. Фаустов

Р-1566

ПЕРЕНОРМИРОВКА КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ЧАСТИЦ

Дубна 1964

Р.Н. Фаустов

Р-1566

ПЕРЕНОРМИРОВКА КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ЧАСТИЦ

Направлено в ДАН

Дубна 1964

В работе[1] было получено квазипотенциальное уравнение для волновой функции системы двух частиц

$$(E^2 - p^2 - m^2)\psi(\vec{p}) = \int V(\vec{p}, \vec{p}', E)\psi(\vec{p}')d\vec{p}', \tag{1}$$

где квазипотенциал V определяется с помощью двухвременной функции Грина двух частиц. Благодаря трехмерности, это уравнение имеет ряд преимуществ по сравнению с уравнением Бете-Солпитера. При построении квазипотенциала V по теории возмущений возникает проблема устранения расходимостей. Эту проблему можно было бы считать решенной, если бы удалось показать, что соответствующие расходимости сводятся к расходимостям S – матрицы, поскольку рецепт устранения последних хорошо известен. Эта ситуация имеет место в случае уравнения Бете-Солпитера[2]. Напротив, в методе Тамма-Данкова этого достигнуть не удается, что является одной из основных трудностей метода.

В настоящей работе рассматривается построение квазипотенциала V для системы двух частиц одинаковой массы. При этом будет показано, что в случае перенормируемых теорий, где имеются лишь тройные точечные вершины (например, электродинамика) в квазипотенциале V не возникает других расходимостей, кроме тех, которые характерны для S –матрицы. Эти теории отличаются тем, что в них расходятся лишь собственно энергетические и вершинные части, а диаграммы, описывающие процессы рассеяния, уже не имеют собственных расходимостей.

Рассмотрим систему двух частиц одинаковой массы (например, электрон и позитрон). Обозначим четырехимпульсы в с.ц.м. этих частиц в начальном состоянии через $(E+\epsilon_q, \vec{q})$ и $(E-\epsilon_q, -\vec{q})$, а в конечном состоянии через $(E+\epsilon_p, \vec{p})$ и $(E-\epsilon_p, -\vec{p})$, где $2E$ – полная энергия системы. Тогда двухвременная функция Грина двух частиц $\overline{G}$ определяется через 4-временную функцию Грина G следующим образом[1]:

$$\overline{G}(\vec{p}, \vec{q}, E) = \int\int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon_p \, d\epsilon_q \, G(\vec{p}, \vec{q}, \epsilon_p, \epsilon_q, E), \tag{2}$$

(знак $\overline{}$ будет в дальнейшем использоваться для обозначения интеграций по энергиям). Функция $\overline{G}$ удовлетворяет уравнению[1]:

$$\overline{G}(\vec{p},\vec{q},E) = \overline{G}_0(\vec{p},\vec{q},E) - \qquad (3)$$

$$-i\int \overline{G}_0(\vec{p},\vec{k}',E)\,V(\vec{k}',\vec{k},E)\,\overline{G}(\vec{k},\vec{q},E)\,d\vec{k}'\,d\vec{k} \quad ,$$

где

$$G_0(\vec{p},\vec{q},\epsilon_p,\epsilon_q,E) = S_1(\vec{p},E+\epsilon_p)\,S_2(-\vec{p},E-\epsilon_p)\,\delta(\vec{p}-\vec{q})\,\delta(\epsilon_p-\epsilon_q)\ ,$$

а S_1 и S_2 – полные одночастичные функции Грина. В дальнейшем мы будем использовать символическую запись уравнения (3):

$$\overline{G} = \overline{G}_0 - i\,\overline{G}_0 V \overline{G}\ . \qquad (4)$$

При этом для квазипотенциала V получается выражение:

$$i V = \overline{G}^{-1} - \overline{G}_0^{-1}\ . \qquad (5)$$

Вместо функции Грина G удобно ввести формально амплитуду рассеяния двух частиц вне массовой поверхности:

$$-i\,G_0 T G_0 = G - G_0\ . \qquad (6)$$

Аналогичную величину можно определить и для двухвременной функции Грина $\overline{G}$:

$$-i\,\overline{G}_0 \tilde{T}\,\overline{G}_0 = \overline{G} - \overline{G}_0\ . \qquad (7)$$

Сравнивая (6) и (7), получим связь между $\tilde{T}$ и T :

$$\tilde{T} = \overline{G}_0^{-1}\,\overline{G_0 T G_0}\,\overline{G}_0^{-1} \qquad (8)$$

(в дальнейшем знак ~ понимается в смысле этого определения). Из выражения (8) следует, что на энергетической поверхности $(p = q = E - m)$ функция $\tilde{T}$ совпадает с величиной T на массовой поверхности $(\epsilon_p = \epsilon_q = 0\ ,\ p^2 = q^2 = E^2 - m^2)$ и дает, таким образом, физическую амплитуду рассеяния. Вводя величину

$$F = -i\,G_0\ , \qquad (9)$$

получим из (4) и (7) уравнение для $\tilde{T}$ в следующем виде:

$$\tilde{T} = V + V\,\overline{F}\,\tilde{T}\ . \qquad (10)$$

Поскольку уравнение (10) эквивалентно уравнению (4), то оно также может служить для определения квазипотенциала V , а именно,

$$V = \tilde{T}(1 + \overline{F}\,\tilde{T})^{-1}\ , \qquad (11)$$

где $\tilde{T}$ определено в (8).

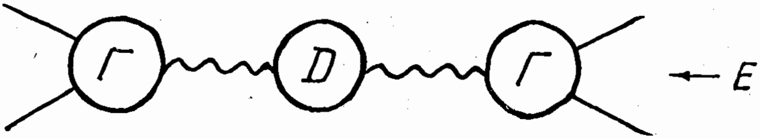
Для дальнейшего рассмотрения удобно представить T в виде двух слагаемых:

$$T = M + L\,. \tag{12}$$

Здесь L представляет собой совокупность слабо связанных диаграмм, в которых частицы начального состояния связаны с частицами конечного состояния одной бозонной линией. Эти диаграммы имеют следующий общий вид:

$$L = \Gamma D \Gamma\,, \tag{13}$$

где Γ – полная вершинная часть, а D – полный бозонный пропагатор. Можно представить выражение (13) графически.

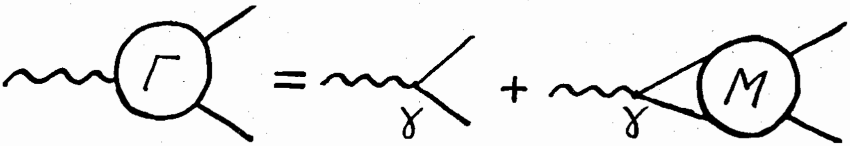


Р и с. 1.

Раскрывая (11) по теории возмущений, мы получим расходящиеся выражения типа $\tilde{L}\overline{F}\tilde{T}$. Эти расходимости не устраняются обычной ренормировкой S –матрицы. Однако, как мы сейчас покажем, в действительности эти члены в выражении (11) отсутствуют. Представим вершинную часть Γ в виде:

$$\Gamma = \gamma(1 + FM), \tag{14}$$

где γ – точечная вершина, F определено в (9), а M – в (12). Представление (14) можно изобразить графически.



Р и с. 2.

Подставляя (14) в (13), получим:

$$L = (1 + MF)\,\gamma D \gamma\,(1 + FM)\,. \tag{15}$$

Теперь нам нужно получить величину $\tilde{L} = \overline{F}^{-1}\,\overline{FLF}\,\overline{F}^{-1}$ согласно (9). Поскольку фукция D в (15) зависит только от полной энергии E системы, то справедливо соотношение

$$\overline{ADB} = \overline{A}\,D\,\overline{B} \tag{16}$$

для любых функций A и B. Таким образом, используя (15) и (16), мы получаем:

$$\tilde{T} = \tilde{M} + \tilde{L} = \tilde{M} + (1 + \tilde{M}\overline{F})\gamma D \gamma (1 + \overline{F}\tilde{M}) =$$

$$= \tilde{M}[1 + \overline{F}\gamma D\gamma(1 + \overline{F}\tilde{M})] + \gamma D \gamma(1 + \overline{F}\tilde{M})\,. \tag{17}$$

Величину $(1+\overline{F}\,\tilde{T})^{-1}$ удобно представить в следующих двух формах:

$$(1+\overline{F}\,\tilde{T})^{-1} = (1+\overline{F}\tilde{M})^{-1}[1+\overline{F}(1+\tilde{M}\overline{F})\gamma D\gamma]^{-1} = \tag{18}$$

$$= [1+\overline{F}\gamma D\gamma(1+\overline{F}\tilde{M})]^{-1}(1+\overline{F}\tilde{M})^{-1}\;.$$

Теперь, подставляя (17) и (18) в определение (11), получим:

$$V = \tilde{M}(1+\overline{F}\tilde{M})^{-1} + \gamma D\gamma[1+\overline{F}(1+\tilde{M}\overline{F})\gamma D\gamma]^{-1}\,. \tag{19}$$

Используя представление (14) для вершинной части и определение (8), получим:

$$\gamma\overline{F}(1+\tilde{M}\overline{F})\gamma = \gamma F\Gamma\,. \tag{20}$$

Таким образом, с учетом (20) выражение (19) для квазипотенциала V можно переписать в виде:

$$V = \tilde{M}(1+\overline{F}\tilde{M})^{-1} + \gamma D[1+\gamma F\Gamma D]^{-1}\gamma\,. \tag{21}$$

Воспользуемся теперь уравнением Дайсона для бозонного пропагатора:

$$D = \Delta + \Delta\gamma F\Gamma D\,, \tag{22}$$

где Δ – функция Грина свободного бозона. Тогда, очевидно,

$$(1+\gamma F\Gamma D)^{-1} = D^{-1}\Delta\;,$$

и, подставляя это выражение в (21), получим окончательно:

$$V = \tilde{M}(1+\overline{F}\tilde{M})^{-1} + \gamma\Delta\gamma\;. \tag{23}$$

Из выражения (23) видно, что квазипотенциал V распадается на два слагаемых, причем в первое слагаемое дают вклад только диаграммы M, а от диаграмм L остается только член низшего порядка теории возмущений (второе слагаемое), который, очевидно, не содержит расходимостей. В этом отношении квазипотенциал V аналогичен ядру уравнения Бете–Солпитера.

Диаграммы M содержат обычные расходимости S –матрицы. Раскрывая первое слагаемое в (23) по теории возмущений, получим выражения типа $\tilde{M}\,F\,\tilde{M}$. В этих выражениях не возникает дополнительных расходимостей, если рассматриваются теории, в которых расходятся лишь диаграммы собственной энергии и тройные вершинные части (например, электродинамика).

Таким образом, в этом случае квазипотенциал V не содержит других расходимостей, кроме тех, которые характерны для S – матрицы, и перенормировка квазипотенциального уравнения (1) производится полностью аналогично перенормировке S – матрицы.

В случае ренормируемых теорий, где расходятся диаграммы, описывающие процессы рассеяния (например, мезона на мезоне), требуется дальнейшее исследование. В этом случае можно избавиться от возможных дополнительных расходимостей, если, переходя к уравнению для парциальных волн, отбросить s – и p – волны[3]. В работе[4] было показано, что в ядре одновременного уравнения Бете-Солпитера в лестничном приближении не появляется новых расходимостей. Однако, когда в ядре содержатся члены, описывающие возможность виртуальной аннигиляции частиц системы (например, диаграммы L), то, как видно из вышеизложенного, необходимо дополнительное рассмотрение.

Автор выражает благодарность Н.Н. Боголюбову, А.А. Логунову, А.Н. Тавхелидзе за плодотворные и стимулирующие дискуссии, Б.А. Арбузову, А.Т. Филиппову и О.А. Хрусталеву за обсуждение результатов.

Литература

1. A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 380 (1963).
2. W. Zimmerman. Nuovo Cim., 11, 88 (1954).
3. А.Т. Филиппов. Phys. Lett. (в печати); Препринт ОИЯИ Р-1483, Дубна, 1964.
4. K. Symanzik. Nuovo Cim., 11, 88 (1954).

Рукопись поступила в издательский отдел
15 февраля 1964 г.