ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

И.В. Пузынин

Р- 1549

АНАЛИТИЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКЕ

Дубна 1964

И.В. Пузынин

Р- 1549

АНАЛИТИЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКЕ

Дубна 1964

В этой заметке приводится доказательство аналитичности решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = y - \frac{y^{q+1}}{x^q} \tag{1}$$

в окрестности сингулярной точки $x=0$, удовлетворяющего условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = a < \infty, \quad y(\infty) = 0. \tag{2}$$

Здесь $q > 0$ – вещественное, a – искомый параметр задачи (1)-(2).

Краевая задача (1)-(2) встречается в нелинейной полевой теории при изучении взаимодействия элементарных частиц и в теории ядра. Доказательство существования положительных решений этой краевой задачи для некоторого интервала значений q дано в работе/1/. Показано, что решение, удовлетворяющее условиям (1)-(2), является решением задачи Коши

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = a, \quad a > 1, \tag{3}$$

т.е. параметр a может быть выбран нужным образом. Нахождение решений задачи (1)-(2) численными методами связано с некоторыми трудностями из-за неясности поведения решений в окрестности особой точки $x = 0$. Так, один из возможных алгоритмов численного решения задачи (1)-(2) и нахождения параметра a, приведенный в работе /2/, предполагает представление решения в окрестности точки $x = 0$ степенным рядом. Некоторые экспериментальные исследования этого вопроса, данные в работе/2/, не могут служить исчерпывающим доказательством законности такого представления.

Здесь приводится метод последовательных приближений, являющийся видоизменением метода Пикара и позволяющий доказать существование и аналитичность решения задачи Коши вида (3) уравнения (1). На основании результатов работы/1/ свойство аналитичности перенесено и на решение краевой задачи (1)-(2). Заметим, что существование решения задачи Коши может быть получено как следствие более общих теорем, приведенных в работе/3/. Следует также отметить, что приведенные здесь методы применимы для доказательства аналитичности решения задачи Коши системы двух уравнений второго порядка в окрестности сингулярной точки $x = 0$.

$$y_1'' = \frac{m_1}{m_2}\, y_1 - \frac{k_2}{k}\, \frac{(y_2 - y_1)^{q+1}}{x^q},$$

$$y_2'' = y_2 - \frac{(y_2 - y_1)^{q+1}}{x^q},$$

$$y_1(0)=0, \quad y_2(0)=0, \quad y_1'(0)=a_1, \quad y_2'(0)=a_2, \quad x \ge 0 .$$

Здесь

$$q>0, \quad \frac{m_1}{m_2} \geqslant 1, \quad \frac{k_1}{k_2} \geqslant 1, \quad \frac{k_1}{m_1} \geqslant \frac{k_2}{m_2}, \quad 0 \leqslant a_1 \le a_2 .$$

Представим уравнение (1) в виде нормальной системы двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2 = f_1(x, y_1, y_2),$$
$$\frac{dy_2}{dx} = y_1 - \frac{y_1^{q+1}}{x^q} = f_2(x, y_1, y_2), \tag{4}$$

с задачей Коши

$$y_1(0)=0, \quad y_2(0)=a, \quad x \ge 0, \quad a \ge 1 . \tag{5}$$

Непосредственное применение метода Пикара /4/ для доказательства существования решения (4)–(5) в окрестности сингулярной точки $x=0$ невозможно, поскольку в любом гиперинтервале, содержащем точку ($x=0$, $y=0$), правые части системы (4) не удовлетворяют условиям классической теоремы. Поэтому построение последовательных приближений будет дано в области "углового" типа.

Рассмотрим область D , определенную неравенствами

$$0 \le x \le \delta, \quad x \le y_1 \le ax, \quad 1 \le y_2 \le a . \tag{6}$$

Здесь δ –достаточно малое положительное число, значение которого будет определено ниже. Покажем теперь, что при некотором доопределении функции f_i , $i=1,2$, из (4) будут удовлетворять в D условиям классической теоремы Пикара. Функция $f_1(x, y_1, y_2)=y_2$ непрерывна в D и имеет непрерывные частные производные по переменным y_1 и y_2.

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = 1 .$$

Поэтому f_1 ограничена в замкнутой области D и удовлетворяет условиям Липшица относительно переменных y_1 и y_2 .

$$|f_1(x, y_1, y_2)| \le a,$$
$$|f_1(x, y_1, y_2) - f_1(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2)| = |y_2 - \bar{y}_2| \le |y_1 - \bar{y}_1| + |y_2 - \bar{y}_2| . \tag{7}$$

Относительно функции $f_2(x, y_1, y_2)$ заметим, что ее предел по любому направлению, лежащему в D , при $x \to 0$ и $y_1 \to 0$ равен нулю. Поэтому, доопределив по непрерывности $f_2(x, y_1, y_2)$ при $x=0$, положив $f_2(0, 0, y_2)=0$, получим непрерывность f_2 в замкнутой области D .

Отсюда получаем ограниченность функции f_2 в D .

$$|f_2| = |y_1 - y_1^{q+1}/x^q| \leqslant |y_1| + |y_1^{q+1}/x^q| \leqslant$$
$$\leqslant |ax| + |a^{q+1}x| \leqslant a\delta(1+a^q). \tag{8}$$

Чтобы показать, что f_2 удовлетворяет в D условию Липшица, отметим следующее. Функция f_2 имеет непрерывные частные производные по y_1 и y_2 в открытой области d :

$$0 < x \leq \delta, \quad x \leq y_1 \leq ax, \quad 1 \leq y_2 \leq a,$$

причем $\frac{\partial f_2}{\partial y_2} = 0$ непрерывна и в D. Функцию $\frac{\partial f_2}{\partial y_1}$ в $x = 0$ непрерывным образом доопределить нельзя, так как предел функции по направленню p, лежащему в D, зависит от углового коэффициента направления.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y_1 = px}} \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 1 - p^q(q+1).$$

Однако в силу выбора области "углового" типа при $x = 0$ всегда $y_1 = 0$. Кроме того, $\frac{\partial f_2}{\partial y_1}$ ограничена в открытой области d по абсолютной величине

$$\left|\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\right| = \left|1 - (q+1)\frac{y_1^q}{x^q}\right| < 1 + a^q(q+1) = L_2.$$

Учитывая вышесказанное, можно сделать вывод, что во всей области D будет выполнено

$$|f_2(x, y_1, y_2) - f_2(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2)| \leqslant L_2(|y_1 - \bar{y}_1| + |y_2 - \bar{y}_2|), \tag{9}$$

если при данном x значения y_1, y_2, $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ принадлежат области D. Следовательно, в области D функции f_1, f_2 непрерывны, ограничены и удовлетворяют условию Липшица относительно y_1 и y_2. Введем обозначения

$$M = \max\{a, a\delta(1+a^q)\}, \quad L = L_2. \tag{10}$$

Перейдем теперь к построению последовательных приближений по методу Пикара в области D. Рассмотрим систему интегральных уравнений типа Вольтерра, соответствующую дифференциальной системе (4) с задачей (5).

$$y_1(x) = \int_0^x y_2(t)\,dt; \quad y_2(x) = a + \int_0^x [y_1(t) - \frac{y_1^{q+1}(t)}{t^q}]\,dt. \tag{11}$$

Решение этой системы, которое является решением задачи Коши (5) для системы (4), будем находить методом последовательных приближений по формулам

$$y_{1,0} = 0; \quad y_{1,m+1} = \int_0^x y_{2,m}(t)\,dt; \tag{12}$$
$$y_{2,0} = a; \quad y_{2,m+1} = a + \int_0^x [y_{1,m}(t) - \frac{y_{1,m}^{q+q}(t)}{t^q}]\,dt;$$

$m = 0, 1, 2, \ldots$.

Покажем сначала, что если должным образом выбрать δ , то последовательные приближения любого порядка будут находиться в области D . Действительно, приближения первого порядка

$$y_{1,1} = ax, \quad y_{2,1} = a$$

лежат в области D . Предположим, что этим свойством обладают приближения порядка m и докажем, что $m+1-е$ приближения также остаются в области D . Из предположения

$$1 \leq y_{2,m} \leq a$$

очевидным образом следует

$$x \leq y_{1,m+1} \leq ax .$$

Для $y_{2,m+1}$ справедлива следующая оценка:

$$y_{2,m+1} = a + \int_0^x y_{1,m}(t)\,dt - \int_0^x \frac{y_{1,m}^{q+1}(t)}{t^q}\,dt \geq$$

$$\geq a - \int_0^x \frac{a^{q+1}\,t^{q+1}}{t^q}\,dt = a - a^{q+1}\frac{x^2}{2} ;$$

поскольку $\int_0^x y_{1,m}(t)\,dt \geq 0, \quad y_{1,m} \leq ax$. Из условия

$$y_{2,m+1} \geq a - a^{q+1}\frac{x^2}{2} \geq 1$$

получаем границу δ независимой переменной x :

$$\delta = \sqrt{\frac{2(a-1)}{a^{q+1}}} . \qquad (13)$$

С другой стороны,

$$y_{2,m+1} = a + \int_0^x \left\{ 1 - \left[\frac{y_{1,m}(t)}{t} \right]^q \right\} y_{1,m}(t)\,dt \leq a ,$$

так как

$$1 - \left[\frac{y_{1,m}(x)}{x} \right]^q \leq 0 ,$$

что следует из

$$y_{1,m} \geq x .$$

Таким образом, показано, что приближения $m+1$ -го порядка принадлежат области D при должном выборе границы δ , который не зависит от m . Тем самым доказано, что приближения любого порядка лежат в области D . Отметим еще непрерывность последовательных приближений, которая также легко доказывается методом индукции. Далее для области D применимы методы классической теоремы Пикара (см. [4]), которые доказывают равномерную сходимость последовательностей приближений в области D к единственному решению интегральной системы (11). Из этой схемы доказательства мы воспроизведем только мажорантный ряд для функционального ряда, частичные суммы которого равны соответствующим последовательным приближениям

$$y_{i,0}+[y_{i,1}-y_{i,0}]+\dots+[y_{i,m}-y_{i,m-1}]+\dots, \qquad i=1,2 \tag{14}$$

Для каждого члена этого ряда справедлива оценка

$$|y_{i,m}-y_{i,m-1}|\le(2L)^{m-1}M\frac{|x|^m}{m!}\le(2L)^{m-1}M\frac{\delta^m}{m!}. \tag{15}$$

Таким образом, ряд (14) мажорируется числовым рядом

$$|y_{i,0}|+\sum_{m=1}^{\infty}(2L)^{m-1}M\frac{\delta^m}{m}, \tag{16}$$

сходящимся по признаку Даламбера. Эти факты будут использованы в дальнейших рассуждениях. Существование решения задачи Коши (3) для дифференциального уравнения (1) в окрестности сингулярной точки $x=0$ доказано.

Покажем теперь представимость решения задачи Коши (5) системы (4) степенным рядом по целым степеням x в некоторой окрестности сингулярной точки $x=0$. Рассмотрим последовательные приближения, получаемые по рекурентным формулам (12).

$$\begin{aligned}
&y_{1,1}=ax, && y_{1,2}=ax, && y_{1,3}=ax-\frac{a(a^q-1)}{3!}x^3,\\
&y_{2,1}=a, && y_{2,2}=a-\frac{a(a^q-1)}{2!}x^2, && y_{2,3}=a-\frac{a(a^q-1)}{2!}x^2,
\end{aligned} \tag{17}$$

$$y_{1,4}=ax-\frac{a(a^q-1)}{3!}x^3,$$

$$y_{2,4}=a+\frac{a}{2}x^2-\frac{a(a^q-1)}{4!}x^4-\int_0^x t\,[a+\frac{a(a^q-1)}{3!}t^2]^{q+1}dt\ \}.$$

Рассмотрим

$$\int_0^x t\,[a+\frac{a(a^q-1)}{3!}t^2]^{q+1}dt.$$

Преобразуем этот интеграл следующим образом:

$$\int_0^x t\,[a+\frac{a(a^q-1)}{3!}t^2]^{q+1}dt=\frac{3!}{2a(a^q-1)(q+2)}\{[a+\frac{a(a^q-1)}{3!}x^2]^{q+2}-a^{q+2}\}.$$

В свою очередь,

$$[a+\frac{a(a^q-1)}{3!}x^2]^{q+2}=a^{q+2}[1+\frac{(a^q-1)}{3!}x^2]^{q+2}. \tag{18}$$

Правая часть (18) разлагается в биномиальный ряд по четным степеням x, сходящийся при достаточно малых значениях x. Граница промежутка сходимости определяется неравенством

$$\left| \frac{a^q - 1}{3!} x^2 \right| < 1. \tag{19}$$

Таким образом, четвертое приближение из (17) имеет следующее представление:

$$y_{1,4} = ax - \frac{a(a^q - 1)}{3!} x^3, \quad y_{2,4} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,4n} x^{2n}, \quad a_{2,4,0} = a, \tag{20}$$

причем $y_{1,4}$ представляется полиномом, содержащим нечетные степени x, а $y_{2,4}$ – рядом, содержащим только четные степени x и сходящимся в промежутке радиуса R_4, определяемого из (19). Из рекуррентных формул (12) легко видеть, что пятое приближение представимо степенными рядами, сходящимися в том же промежутке, что и ряд для $y_{2,4}$. Действительно, из (12), учитывая (20), получаем

$$y_{1,5} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,4,n} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2,4,n}}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,5,n} x^{2n+1},$$

$$y_{2,5} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,5,n} x^{2n} \quad a_{1,5,0} = a_{2,5,0} = a, \quad a_{2,5,n} = a_{2,4,n}. \tag{21}$$

Поскольку радиус сходимости степенного ряда при почленном интегрировании не нарушается, то $R_5 = R_4$.

Предположим, что приближение порядка $m\ (m > 5)$ представляется степенными рядами, сходящимися в некотором промежутке радиуса R_m.

$$y_{1,m} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,m,n} x^{2n+1}, \quad y_{2,m} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,m,n} x^{2n},$$

$$a_{1,m,0} = a_{2,m,0} = a. \tag{22}$$

Из (12) получаем:

$$y_{1,m+1} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,m,n} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,m+1,n} x^{2n+1}; \quad a_{1,m+1,0} = a. \tag{23}$$

Ряд (23) сходится в интервале радиуса R_m по теореме об интегрировании степенных рядов.

Рассмотрим теперь выражение $y_{2,m+1}$.

$$y_{2,m+1} = a + \int_0^x y_{1,m}(t)\, dt - \int_0^x \frac{y_{1,m}^{q+1}(t)}{t^q} dt =$$

$$= a + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,m,n} t^{2n+1} dt - \int_0^x \frac{\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_{1,m,n} t^{2n+1}\right]^{q+1}}{t^q} dt. \tag{24}$$

Первый интеграл в (24) представим степенным рядом по четным степеням x в интервале радиуса R_m. Обозначим второй интеграл в (24) I_{m+1} и преобразуем его следующим образом:

$$I_{m+1} = \int_0^x t \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_{1,m,n} \, t^{2n} \right]^{q+1} dt .$$

Законность этого преобразования (т.е. деления сходящегося ряда на t) очевидна. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_{1,m,n} \, x^{2n}$ сходится в том же интервале, что и ряд, стоящий в подынтегральном выражении. Действительно, он сходится при $x = 0$. Предположение о расходимости в точке $\bar{x}$ $(0<|\bar{x}|< R_m)$ приводит к противоречию, так как тогда расходился бы ряд

$$\bar{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,m,n} \, \bar{x}^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,m,n} \, \bar{x}^{2n+1} .$$

Далее,

$$I_{m+1} = \frac{a_{1,m,0}^{q+1}}{2} \int_0^x \left[1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{1,m,n}}{a_{1,m,0}} \, t^{2n} \right]^{q+1} dt^2 . \tag{25}$$

Очевидно, что проведенные преобразования (вычитание из сходящегося ряда числа и почленное деление на число) не изменили радиуса сходимости степенного ряда, стоящего в (25). Таким образом, ряд

$$f_{m+1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{1,m,n}}{a_{1,m,0}} \, x^{2n} \tag{26}$$

сходится в интервале радиуса R_m. Отсюда следует, что подынтегральная функция в (25) представляется в некоторой окрестности точки $x = 0$ степенным рядом. Действительно, функция

$$\phi(y) = (1+y)^{q+1} \tag{27}$$

разлагается в биномиальный ряд, сходящийся при $|y|<1$. С другой стороны, $f_{m+1}(x)$ в интервале радиуса R_m представима сходящимся степенным рядом (26), а так как $f_{m+1}(x)$ – непрерывная функция и $f_{m+1}(0)=0$, то можно выделить интервал радиуса R_{m+1} $(R_{m+1} \leqslant R_m)$, в котором будет выполнено

$$|f_{m+1}(x)| < 1. \tag{28}$$

В интервале радиуса R_{m+1} справедлива теорема о подстановке степенных рядов /5/. По этой теореме функция

$$\phi[f_{m+1}(x)] = \left[1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{1,m,n}}{a_{1,m,0}} \, x^{2n}\right]^{q+1} \tag{29}$$

разлагается в интервале радиуса R_{m+1} в сходящийся степенной ряд. Отсюда непосредственно следует, что интеграл I_{m+1} разлагается в интервале радиуса R_{m+1}

в сходящийся степенной ряд по четным степеням x. Следовательно, нами доказано, что приближение порядка $m+1$ также представимо степенными рядами вида:

$$y_{1,m+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,m+1,n} x^{2n+1}, \qquad y_{2,m+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,m+1,n} x^{2n}, \tag{30}$$

$$a_{1,m+1,0} = a_{2,m+1,0} = a.$$

Эти ряды сходятся в интервале радиуса R_{m+1}, содержащем сингулярную точку $x=0$. По индукции это утверждение распространяется на все приближения, $m=6,7,\ldots$. Радиусы сходимости рядов (30) для двух последовательных значений m связаны неравенством

$$R_{m+1} \leq R_m . \tag{31}$$

Покажем теперь, что, начиная с некоторого m, и для всех последующих в (31) будет выполняться точное равенство, т.е., начиная с некоторого приближения, радиус сходимости рядов будет постоянным, отличным от нуля. Ряд (26) в полуинтервале $[0, R_m)$ представляет функцию

$$f_{m+1}(x) = \frac{1}{a_{1,m,0}} \frac{y_{1,m}(x)}{x} - 1 . \tag{32}$$

Докажем, что при $m \to \infty$ последовательность (32) равномерно сходится в D. Для этого достаточно показать равномерную сходимость в области D последовательности функций

$$\psi_m(x) = \frac{y_{1,m}(x)}{x}, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Функции $\psi_m(x)$ непрерывны в отрезке $[0, \delta]$ и $\psi_m(0) = a$. Рассмотрим функциональный ряд

$$\psi_1 + [\psi_2 - \psi_1] + \ldots, \quad + [\psi_m - \psi_{m-1}] + \ldots . \tag{33}$$

Каждый член этого ряда – непрерывная функция по x в $[0,\delta]$. Общий член ряда можно оценить, используя оценку (15).

$$|\psi_m - \psi_{m-1}| = \left|\frac{y_{1,m}(x) - y_{1,m-1}(x)}{x}\right| \leqslant (2L)^{m-1} M \frac{x^{m-1}}{m!} \leqslant (2L)^{m-1} M \frac{\delta^{m-1}}{m!} .$$

Таким образом, функциональный ряд (33) мажорируется числовым рядом

$$a + \sum_{m=2}^{\infty} (2L)^{m-1} M \frac{\delta^{m-1}}{m!} ,$$

который сходится по признаку Даламбера. Этот факт и доказывает равномерную сходимость последовательности (32) в отрезке $[0, \delta]$. Предельная функция $\bar{f}(x)$ непрерывна в $[0, \delta]$ и $\bar{f}(0) = 0$. Поэтому можно выделить полуинтервал $[0, r_\epsilon)$, в котором

$$|\bar{f}(x)| < 1 - \epsilon , \tag{34}$$

где $\epsilon > 0$ достаточно мало. С другой стороны, по определению равномерной сходимости последовательности $f_m(x)$, для любого $\epsilon > 0$ найдется такое m_0, что для всех $m \geq m_0$

$$|f_m(x) - \bar{f}(x)| < \epsilon \tag{35}$$

для всех $x \in [0, \delta]$. А так как

$$|f_m(x)| - |\bar{f}(x)| < |f_m(x) - \bar{f}(x)| < \epsilon,$$

то из последнего неравенства и (34) следует

$$|f_m(x)| < \epsilon + |\bar{f}(x)| < 1 \tag{36}$$

для всех $m > m_0$ и x из полуинтервала $[0, r_\epsilon)$.

Выберем теперь радиус сходимости приближений следующим образом. Зададимся числом $\epsilon > 0$. Найдем m_0, такое, чтобы для всех $m \geq m_0$ было выполнено (35). С другой стороны, выделим полуинтервал $[0, r_\epsilon)$, в котором выполнено (34). Тогда получим, что для всех $m \geq m_0$ и $x \in [0, r_\epsilon)$

$$|f_m(x)| < 1.$$

Последовательное приближение порядка m_0 представляется сходящимися степенными рядами в некоторой окрестности точки $x=0$ $[0, R_{m_0})$. Если теперь взять

$$R = \min\{R_{m_0}, r_\epsilon\}, \tag{37}$$

то все приближения более высоких порядков представляются степенными рядами в окрестности точки $x=0$ $[0, R)$. Действительно, приближение порядка m_0 представляется степенными рядами в полуинтервале $[0, R)$. Как было показано, интервал, в котором приближение порядка m_0+1 представимо степенным рядом, определяется неравенством

$$|f_{m_0+1}(x)| < 1.$$

Это неравенство будет выполнено в полуинтервале $[0, R)$, т.е. приближение порядка m_0+1 также представимо сходящимися рядами в полуинтервале $[0, R)$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

<u>Лемма.</u> Последовательные приближения, построенные по методу Пикара в области D_φ можно представить степенными рядами (30) в полуинтервале $[0, R)$, $R > 0$. Ряды (30) сходятся абсолютно и равномерно внутри интервала сходимости при $|x| < R$.

Введем теперь вместо x комплексную переменную z. Степенные ряды (30) с действительными коэффициентами будут также равномерно сходиться в круге $|z| < R$ (см. /5/). Следовательно, последовательности функций $y_{1,m}(z)$ и $y_{2,m}(z)$ есть последовательности голоморфных функций в круге $|z| < R$. Равномерная сходимость этих последовательностей внутри того же круга устанавливается по признаку Вейерштрасса при помощи мажорантного ряда (15). Поэтому применима теорема Вейерштрасса о последовательности голоморфных функций (см.[6]).

Если задана последовательность функций

$$\{ y_{i,m} (z) \}, \quad i = 1,2; \quad m = 1,2,\dots$$

голоморфных в области $\tilde{D} \; \{ |z| < R \}$, и если эта последовательность сходится равномерно внутри $\tilde{D}$, то функция

$$y_i (z) = \lim_{m \to \infty} y_{i,m} (z), \quad i = 1,2,$$

также голоморфна в $\tilde{D}$. Этот результат можно сформулировать применительно к действительной оси.

Теорема. Решение задачи Коши (5) системы (4) может быть представлено в окрестности точки $x = 0$ сходящимся степенным рядом. Поскольку решение краевой задачи (1)-(2) эквивалентно решению задачи (1)-(3), то доказана аналитичность решения задачи (2) для уравнения (1) в окрестности сингулярной точки $x = 0$.

В заключение автор благодарит Е.П. Жидкова за предложенную проблему и руководство работой и В.П. Ширикова за полезные советы.

Литература

1. Е.П. Жидков, В.П. Ширнков. Об одной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Препринт ОИЯИ Р-1319, Дубна, 1963.
2. В.Б. Гласко, Ф. Лерюст, Я.П. Терлецкий, С.Ф. Шушурин. Исследование частицеподобных решений нелинейного уравнения скалярного поля. ЖЭТФ, т.35, вып.2(8), 1958.
3. В.А. Чечик. Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью. Труды Московского математического общества, 8, Физматгиз, 1959.
4. Ф. Трикоми. Дифференциальные уравнения, ИЛ, 1962.
5. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, Физматгиз, 1959.
6. С. Стоилов. Теория функций комплексного переменного, 1, ИЛ, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 января 1964 г.