

4.3.1964

С 323

К-32



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Я. Кведицкий и П. Шурань

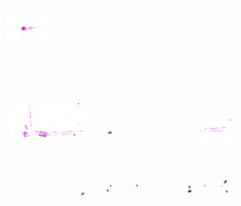
P-1533

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ АМПЛИТУДЫ  
ПИОН-ПИОННОГО РАССЕЙНИЯ  
В ПЛОСКОСТИ УГЛОВОГО МОМЕНТА

*Phys. Lett., 1964, v 9, n 3, p 283-285*

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ АМПЛИТУДЫ  
ПИОН-ПИОННОГО РАССЕЙНИЯ  
В ПЛОСКОСТИ УГЛОВОГО МОМЕНТА

2291/3 48.



В последнее время одной из самых важных проблем физики высоких энергий является существование полюсов Редже в теории поля. Эта проблема была исследована с помощью уравнения Бете-Солпитера /БС/ с простыми ядрами. В случае рассеяния скалярных частиц оказалось<sup>/1/</sup>, что в так называемом лестничном приближении асимптотическое поведение амплитуды в перекрестном канале определяется одним полюсом Редже. С другой стороны, для рассеяния псевдоскалярных частиц с гамильтонианом взаимодействия  $\phi^4(\mathbf{x})$  в "пузырьковом" приближении оказывается, что самая правая особенность - точка ветвления, не зависящая от энергии<sup>/2/</sup>. Появление разреза тесно связано с поведением ядра интегрального уравнения при больших передачах импульса. Для псевдоскалярной теории пузырьковая диаграмма как ядро, в отличие от полюсной диаграммы, не дает уравнения типа Фредгольма. Однако в принципе возможно, что точная амплитуда рассеяния двух псевдоскалярных частиц является мероморфной функцией углового момента  $\ell$ . В этой работе, используя улучшенную модель рассеяния двух частиц, мы покажем, что это в самом деле возможно. Мы используем как ядро сумму так называемых итерированных пузырьковых диаграмм<sup>/3/</sup> /рис. 1/. Эти диаграммы содержат и однопузырьковый случай, так что решение уравнения БС дает более широкий класс диаграмм, чем уравнение с однопузырьковым ядром.

Сумма диаграмм, дающих ядро, может быть выражена следующей формулой<sup>/3/</sup>:

$$K(t) = \frac{\lambda^2 D(t)}{1 - \lambda D(t)}, \quad /1/$$

• где  $\lambda$  - перенормированная константа связи и  $D(t)$  - вычтенный спектральный интеграл, соответствующий пузырьковой диаграмме:

$$D(t) = \frac{1}{16\pi} t \int_4^\infty \frac{dt'}{t'(t'-t)} \sqrt{\frac{t'-4}{t'}}. \quad /2/$$

Как это замечается в работе<sup>/3/</sup>, если  $\lambda < 0$ , амплитуда рассеяния, данная формулой /1/, имеет полюс для  $t < 0$  /призрачное состояние/. Для  $\lambda > 0$  появляется связанное состояние, если

$$\lambda > \frac{4\pi}{\int_4^\infty \frac{dt'}{t' \sqrt{t'(t'-4)}}} = \lambda_0 = 8\pi.$$

Функция  $K(t)$  может быть написана в спектральном виде:

$$K(t) = \frac{g^2(\lambda)}{t_0 - t} + \int_4^{\infty} \frac{dt' \operatorname{Im} K(t')}{t' - t},$$

где  $t_0$  - решение уравнения  $1 - \lambda D(t_0) = 0$  в области  $t_0 < 4$  и  $g^2(\lambda) = (D'(t_0))^{-1}$  для  $\lambda < 0$  и  $\lambda > \lambda_0$ , в других случаях  $g^2(\lambda) = 0$ .

Уравнение Б.С. для парциальной амплитуды рассеяния  $T_\ell$  в обозначениях работы /1/ имеет следующий вид /следуя Вику /4/, мы совершили поворот пути интегрирования/:

$$\begin{aligned} T_\ell(p, p_0; q, q_0; s) &= B_\ell(p, p_0; q, q_0; s) + \\ &+ \int_0^{\infty} dp' \int_{-\infty}^{+\infty} dp'_0 K_\ell(p, p_0; p', p'_0) \frac{1}{F(p', p'_0; s)}, \\ &\times T_\ell(p', p'_0; q, q_0; s), \end{aligned} \quad /4/$$

где

$$\begin{aligned} K_\ell(p, p_0; q, q_0) &= B_\ell(p, p_0; q, q_0) = \\ &= \frac{g^2(\lambda)}{(2\pi)^4 \pi} Q_\ell\left(\frac{p^2 + q^2 + t_0 + (p_0 - q_0)^2}{2pq}\right) + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^4 \pi} \int_4^{\infty} dt' \operatorname{Im} K(t') Q_\ell\left(\frac{p^2 + q^2 + t' + (p_0 - q_0)^2}{2pq}\right). \end{aligned}$$

$$a \quad F(p, p_0; s) = [p^2 + m^2 + (p_0 - i\frac{\sqrt{s}}{2})^2][p^2 + m^2 + (p_0 + i\frac{\sqrt{s}}{2})^2].$$

После длинных, но простых вычислений можно проверить, что наше ядро из-за поведения  $\operatorname{Im} K(t)$  в бесконечности является ядром типа Фредгольма. Из выражения /1/ следует, что  $\operatorname{Im} K(t) \sim (\log t)^{-2}$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Сейчас мы хотим получить поведение ведущей траектории Редже для малых значений  $\lambda$ . Сначала займемся случаем  $\lambda < 0$ . Мы покажем, что соответствующий полюс не стремится к какому-то целому значению углового момента  $\ell$  при  $\lambda \rightarrow -0$ , а остается больше нуля. По теории Фредгольма для малых значений  $|\lambda|$  мы должны вычислить след ядра. Тогда приближенное уравнение для траектории имеет следующий вид:

$$1 - T_r \left[ K_\rho \frac{1}{F} \right] = 0, \quad /5/$$

где

$$T_r \left[ K_\rho \frac{1}{F} \right] = \frac{1}{(2\pi)^4 \pi} \int_0^\infty dp \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \{ g^2(\lambda) Q_\rho \left( 1 + \frac{t_0}{2p^2} \right) + \int_4^\infty dt \operatorname{Im} K(t) Q_\rho \left( 1 + \frac{t}{2p^2} \right) \} \frac{1}{F(p, p_0; s)}. \quad /6/$$

Интегрирование по  $p_0$  может быть проведено точно<sup>/1/</sup>, и мы получим следующее выражение для  $T_r \left[ K_\rho \frac{1}{F} \right]$ :

$$T_r \left[ K_\rho \frac{1}{F} \right] = \frac{1}{(2\pi)^3 \pi} \int_0^\infty \frac{dp}{\sqrt{p^2 + m^2} (4(p^2 + m^2) - s)} \times \left[ g^2(\lambda) Q_\rho \left( 1 + \frac{t_0}{2p^2} \right) + \int_4^\infty dt \operatorname{Im} K(t) Q_\rho \left( 1 + \frac{t}{2p^2} \right) \right]. \quad /7/$$

Вычислим поведение двух членов /7/ независимо.

Чтобы получить поведение первого члена, нам нужно поведение  $g^2(\lambda)$  и  $t_0$  для малых значений  $|\lambda|$ ,  $\lambda < 0$ . Величина  $t_0$  определяется из уравнения:

$$1 - \lambda \frac{1}{16\pi} t_0 \int_4^\infty \frac{dt}{t(t-t_0)} \sqrt{\frac{t-4}{t}} = 0. \quad /8/$$

Интеграл в уравнении /8/ вычисляется точно, однако для  $\lambda \rightarrow -0$  нам нужен только его асимптотический вид при  $t_0 \rightarrow -\infty$ . Используя асимптотическую форму, получаем:

$$t_0 = -e^{\frac{16\pi}{|\lambda|}}$$

и

$$g^2(\lambda) = \frac{1}{D'(t_0)} \approx 16\pi e^{\frac{16\pi}{|\lambda|}}.$$

После замены  $p = x \sqrt{t_0}$  в правой стороне уравнения /7/ получим для малых значений  $|\lambda|$  ( $t_0 \rightarrow -\infty$ ), что  $T_r \left[ K_\rho \frac{1}{F} \right]$  стремится к конечному пределу:

$$\lim_{\lambda \rightarrow -0} T_r \left[ K_\rho \frac{1}{F} \right] = \left( \frac{1}{2\pi^2} - \frac{1}{2\pi^2} \right) \frac{1}{\ell(\ell+1)} \rightarrow 0 \quad /9/$$

Можно проверить, что члены высшего порядка разложения определителя Фредгольма имеют то же самое поведение, именно: они не исчезают при  $\lambda \rightarrow -0$ .

Для малых положительных значений  $\lambda$ ,  $g^2(\lambda) = 0$ , так что достаточно

оценить только поведение спектрального члена. После интегрирования по  $p_0$  получаем для  $T_r [K_\ell \frac{1}{F}]$  выражение того же типа, что и второй член соотношения /7/.

Разделяя области интегрирования на две части ( $0 < p < N$ ,  $N < p < \infty$  и  $A < t < M$ ,  $M < t < \infty$ ), найдем, что вклады от низкоэнергетических областей пропорциональны  $\lambda^2$  для малых  $\lambda$  и таким образом пренебрежимы по сравнению с главным членом ( $N < p < \infty$ ,  $M < t < \infty$ ), для вычисления которого можно использовать асимптотическую форму функции  $\text{Im } K(t)$  и пренебречь массой  $m$ . После этих приближений мы приходим к следующему интегралу:

$$T_r [K_\ell \frac{1}{F}] = \frac{16}{(2\pi)^3 \pi} \int_N^\infty \frac{dp}{p} - \frac{1}{4p^2 - s} \int_M^\infty dt Q_\ell (1 + \frac{t}{2p^2}) \frac{1}{(\frac{16}{\lambda} + \frac{1}{\pi} \log t)^2 + 1}.$$

Если теперь положим  $s = 0$ , то этот интеграл может быть вычислен следующим образом: вычисляем сначала интеграл по  $p$  от нуля до бесконечности, а затем вычитаем из него интеграл от  $0$  до  $N$ , причем выбираем  $N$  и  $M$  таким образом /их величина пока произвольная!/, что  $\frac{M}{2N^2} \gg 1$ , так что в интеграле по  $p$  от  $P$  до  $N$  можно использовать асимптотическую форму  $Q_\ell$ . Таким образом, мы получаем:

$$T_r [K_\ell \frac{1}{F}] = \frac{4}{(2\pi)^3 \ell} \frac{\lambda}{16} - \frac{4}{(2\pi)^3} \frac{1}{\ell} \frac{\lambda}{16} - \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \ell^{\frac{\pi \ell}{\lambda}} E_1(-\pi \ell \frac{16}{\lambda}) = - \frac{1}{(2\pi^2)^3} e^{\frac{\pi \ell}{\lambda}} E_1(-\pi \ell \frac{16}{\lambda}). \quad /10/$$

В выражении  $T_r [K_\ell \frac{1}{F}]$  первый член возникает из интеграла в пределах  $0 < p < \infty$ , а остальные два члена из-за интегрирования в пределах  $0 < p < N$ .

Выражение  $T_r [K_\ell \frac{1}{F}]$  для больших значений  $|s|$  ( $\log|s| - O(\frac{1}{\lambda})$ ) получается заменой  $\frac{16}{\lambda}$  на  $\frac{16}{\lambda} + \frac{i}{\pi} \log(-s)$  в уравнении /10/.

Используя теперь соотношения /5/ и /10/, находим уравнение для асимптотического поведения ведущей траектории Редже:

$$1 = - \frac{1}{2\pi^2} \ell^{\frac{\pi \ell (16 + \frac{i}{\pi} \log(-s))}{\lambda}} E_1(-\pi \ell [\frac{16}{\lambda} + \frac{i}{\pi} \log(-s)]). \quad /11/$$

Из уравнения /11/ видно, что, если  $\lambda \rightarrow 0$  или  $s \rightarrow \infty$ , то  $\ell \rightarrow 0$ . Уравнение /11/ является трансцендентным уравнением по переменной  $x = \pi \ell (\frac{16}{\lambda} + \frac{i}{\pi} \log(-s))$ :

$$1 + \frac{1}{2\pi^2} e^{x_0} E_1(-x_0) = 0 \quad /12/$$

с приближенным решением:

$$x_0 = 3.10.$$

Так что для траектории Редже получаем следующее выражение:

$$\ell(s) \sim \frac{x_0}{\frac{16\pi}{\lambda} + \log(-s)} \quad , \quad /13/$$

Очевидно, что высшие члены в разложении функции  $\text{Det} \left[ 1 - K_\ell \frac{1}{F} \right]$  привели бы нас к другой функции от  $x$ . Решение уравнения /12/ сильно зависит от коэффициента при  $e^{x_0} E_i(-x_0)$ . Например, если бы он был порядка единицы вместо  $\frac{1}{2\pi^2}$ , то мы бы имели разумное значение для  $x_0$ . Итак, единственно, что мы можем сказать о поведении ведущей траектории для малых значений  $\lambda$  (и/или больших значений  $|s|$ ), это то, что оно определяется выражением типа /13/ с некоторым значением  $x_0$ .

Сравнивая значения  $\ell$ , полученные из уравнения /9/ и /13/, можно наблюдать качественное различие между поведением траектории для  $\lambda \rightarrow -0$  и  $\lambda \rightarrow +0$ . Это означает, что решение интегрального уравнения обладает особенностью по  $\lambda$  в точке  $\lambda=0$ , именно, траектория связанного состояния имеет скачок по  $\lambda$ .

Физически это поведение совершенно понятно, поскольку эти два случая существенно различны: когда  $\lambda \rightarrow -0$ , диаграммы, соответствующие ядру, содержат различное состояние, которого нет в случае  $\lambda \rightarrow +0$ .

Если сравнить поведение траектории, полученное из уравнения /13/, с траекторией для потенциала Юкавы<sup>/5/</sup> или для теории типа  $g\phi^3$ , видно, что наша траектория имеет намного более слабую зависимость от  $s$ . Возможно, что это может объяснить экспериментальное положение в опытах упругого рассеяния, где наблюдаемая граница сжатия дифракционного пика много меньше значения, предсказанного в упомянутых теориях<sup>/1,5/</sup>.

Наконец, сделаем небольшое замечание: в ядре интегрального уравнения мы заменили простую однопузырьковую диаграмму более сложной, которая включает, однако, и однопузырьковую как частный случай. При этом оказалось, что в противоположность результатам работы<sup>/2/</sup> асимптотическое поведение в перекрестном канале определяется одним ведущим полюсом Редже. Это дает надежду на возможность построения точной амплитуды рассеяния шагами, в которых мы всегда будем иметь дело с ядрами типа Фредгольма, дающими решения с ведущим полюсом Редже.

После окончания этой работы мы узнали о работе Пака<sup>/8/</sup>, посвященной той же самой проблеме. Мы заметим, однако, что в этой работе используется асимптотическая формула для функции Лежандра  $Q_\rho$ , что недопустимо, потому, что, как мы показали, главный вклад к определителю Фредгольма  $\text{Det} \left( 1 - K_\ell \frac{1}{F} \right)$  получается из интегралов по области, где аргумент функции  $Q_\rho$  может быть близким к единице.

Автору благодарны Г. Домокошу за ценные дискуссии.

Л и т е р а т у р а

1. B.W. Lee and R.F. Sawyer. Phys.Rev., 127, 2266 (1962).
2. R.F. Sawyer. Phys.Rev., 131, 1384 (1963); P. Suranyi. Phys.Lett., 6, 59 (1963). G. Domokos and P. Suranyi. Препринт ОИЯИ Е-1400, Дубна, 1963; Nucl. Phys. (в печати).
3. W. Thirring. Лекция о связанных системах в книге Theoretical Physics, IAEA, Вена, 1963.
4. G.C. Wick. Phys.Rev., 96, 1124 (1952).
5. A. Ahmadzadch, P.G. Burke and C. Tate. Phys.Rev., 131, 1315 (1963).
6. P.Y. Pac. Progr. Theor. Phys., 30, 201 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел  
16 января 1964 г.

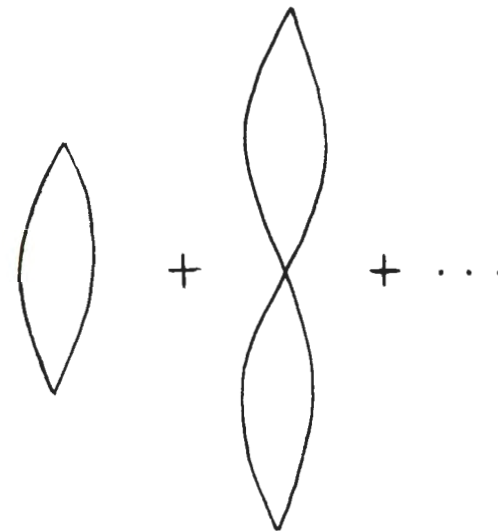


Рис. 1.