ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Н.И. Усюкина

Р-1525

АСИМПТОТИКА АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ КОМПТОН-ЭФФЕКТА

Дубна 1964

Н.И. Усюкина

Р-1525

АСИМПТОТИКА АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ КОМПТОН-ЭФФЕКТА

Направлено в ЖЭТФ

Дубна 1964

В [1],[2] была отмечена достаточная эффективность метода ренормализационной группы для рассмотрения асимптотик амплитуд рассеяния. Что касается квантовой электродинамики, то в [2] на примере системы электрон-позитрон было показано, что суммирование определенного класса диаграмм теории возмущений, улучшенное при помощи ренормализационной группы, в пределе больших энергий ведет к "реджевскому" поведению амплитуды рассеяния в перекрестном канале.

В настоящей работе с целью получения асимптотики при больших энергиях с той же точки зрения рассматривается другой пример квантовой электродинамики – комптон-эффект. Асимптотика рассматривается в пороговой области для позитрония $s \to 4m^2$, чтобы проверить соответствие значений энергетических уровней, полученных из выражения для показателя Редже, и значений энергетических уровней позитрония, вычисленных обычным образом.

Метод ренормализационной группы для нахождения асимптотики применяется не к инвариантным амплитудам, выбор которых произволен, а к физическим амплитудам рассеяния в синглетном и триплетном состояниях.

Проведем поэтому сначала разложение амплитуды рассеяния в низших порядках теории возмущений на инвариантные амплитуды, выделим амплитуды, соответствующие рассеянию в s канале в синглетном и триплетном состояниях, а затем применим метод суммирования при помощи ренормализационной группы.

Запишем матрицу рассеяния следующим известным образом:

$$S = 1 - i(2\pi)^{-2}\,\delta^4(q_1 + p_1 - q_2 - p_2)\,\frac{1}{\sqrt{4q_1^0\, q_2^0}}\,F\,. \tag{1}$$

Так как F билинейна по векторам поляризации, то, например, для t канала

$$\langle \gamma_2 N_2 | F | \gamma_1 N_1 \rangle = \sum_{\mu,\nu} \epsilon_{2\nu}\,\bar{u}(p_2) F_{\mu\nu}\, u(p_1)\epsilon_{1\mu}\,. \tag{2}$$

Применение общих принципов инвариантности приводит к разложеиию $F_{\mu\nu}$ на систему 6 линейно-независимых амплитуд [4]:

$$F_{\mu\nu} = \sum_i A_i\, I^i_{\mu\nu}\,. \tag{3}$$

Нормировка выполнена таким образом, чтобы в инвариантных амплитудах отсутствовали кинематические особенности.

Соответствующими простыми вычислениями можно выделить инвариантные амплитуды A_i в матричных элементах 2-го и 4-го порядков.

Во втором порядке вклад в амплитуду рассеяния дают диаграммы рис. 1, для которых:

$$F^{(2)}_{\mu\nu} = e^2\gamma_\mu \frac{\hat{p}_1+\hat{q}_1+m}{t-m^2}\gamma_\nu + e^2\gamma_\mu\frac{\hat{p}_1-\hat{q}_2+m}{u-m^2}\gamma_\nu \, . \qquad (4)$$

Для инвариантных амплитуд получаем следующее выражение:

$$A_i = R_i e^2 \left\{ \frac{1}{t-m^2} + \frac{\eta_i}{u-m^2} \right\} \; ^{*)}$$

$$\eta_i = \begin{cases} +1 & \text{для} \quad i = 1, 2, 3, 6 \\ -1 & \text{для} \quad i = 4, 5 \end{cases} , \qquad (5)$$

$$R_1 = 2m, \quad R_4 = -i,$$

$$R_2 = 0, \quad R_5 = i,$$

$$R_3 = +m, \quad R_6 = -i.$$

В 4-ом порядке существенны диаграммы рис. 2. Остальные диаграммы 4-го порядка дают вклады, не зависящие от s, и потому они, как будет видно ниже, несущественны в пороговой области.

Для диаграммы 4-го порядка 2а имеем:

$$F^{a(4)}_{\mu\nu} = \frac{e^4}{(2\pi)^4 i} \sum_n g^{nn} \int d^4k \, \gamma_n (\hat{p}_2 - \hat{k} + m)\gamma_\mu (\hat{p}_1 + \hat{q}_1 - \hat{k} + m) \times \qquad (6)$$

$$\times \, \gamma \, (\hat{p}_1 - \hat{k} + m)\gamma_n \Phi(p_1, p_2, p_1 + q_1, k),$$

(16a)

$$\Phi(p_1, p_2, p_1 + q_1, k) = \frac{1}{(k^2-\lambda^2)[(p_1-k)^2+m^2][(p_2-k)^2-m^2][(p_1+q_1-k)^2-m^2]}$$

При проектировании на инвариантные амплитуды необходимо будет вычислить следующие интегралы:

$$I_0 = \frac{1}{\pi^2 i}\int d^4k \, \Phi(p_1, p_2, p_1+q_1, k),$$

$$I_\alpha = \frac{1}{\pi^2 i}\int d^4k \, k_\alpha \Phi(p_1, p_2, p_1+q_1, k), \qquad (7)$$

$$I_{\alpha\beta} = \frac{1}{\pi^2 i}\int d^4k \, k_\alpha k_\beta \Phi(p_1, p_2, p_1+q_1, k),$$

$$I_{\alpha\beta} = \frac{1}{\pi^2 i}\int d^4k \, k_\alpha k_\beta k_\gamma \Phi(p_1, p_2, p_1+q_1, k) \, .$$

В асимптотической области $t \to \infty$ имеем:

$$I_0 = -2\frac{\ln t}{t} f(s), \qquad (8)$$

где

$$f(s) = \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds'}{(s'-s)\sqrt{s'(s'-4m^2)}} \qquad (9)$$

$$s < 4m^2, \quad 4m^2 - s \ll m^2, \qquad (10)$$

$$f(s) = \frac{\pi}{\sqrt{s(4m^2-s)}} \, .$$

Из (10) видно, что члены, пропорциональные I_0, имеют особенность в пороговой области $s \to 4m^2$, а из этого следует, что вклады от диаграмм, не зависящих от s, в пороговой области несущественны.

Учет главных членов в пороговой области дает для I_α, $I_{\alpha\beta}$, $I_{\alpha\beta\gamma}$.

$$I_\alpha = I_0 P_\alpha, \quad I_{\alpha\beta} = I_0 P_\alpha P_\beta, \quad I_{\alpha\beta\gamma} = I_0 P_\alpha P_\beta P_\gamma, \qquad (11)$$

где

$$P_\alpha = \frac{p_{1\alpha}+p_{2\alpha}}{2} \, .$$

В результате для главных членов инвариантных амплитуд при $t \to \infty$ в пороговой области получаем следующие выражения:

$$A_1^{a(4)} = 0, \qquad A_4^{a(4)} = -\frac{4im^2 e^4}{16\pi^2} I_0,$$

$$A_2^{a(4)} = 0, \qquad A_5^{a(4)} = \frac{2im^2 e^4}{16\pi^2} I_0, \tag{12}$$

$$A_3^{a(4)} = -\frac{e^4}{16\pi^2} smI_0, \qquad A_6^{a(4)} = 0.$$

Получим теперь матричные элементы, соответствующие физическим синглетному и триплетному состояниям в s канале.

Как известно[5], возможны следующие состояния системы электрон-позитрон с определенной четностью и моментом:

$$\begin{aligned}
&|j\tfrac12\tfrac12> - |j-\tfrac12-\tfrac12>, \quad p=(-1)^{j+1}, \quad s=0\\
&|j\tfrac12-\tfrac12> - |j-\tfrac12\tfrac12>, \quad p=(-1)^{j+1}, \quad s=1\\
&\left.\begin{aligned}&|j\tfrac12-\tfrac12> + |j-\tfrac12\tfrac12>\\ &|j\tfrac12\tfrac12> + |j-\tfrac12-\tfrac12>\end{aligned}\right\} \quad p=(-1)^{j}, \quad s=1
\end{aligned} \tag{13}$$

и, соответственно, состояния системы $\gamma\gamma$:

$$\begin{aligned}
&|j11> + |j-1-1>, \quad p=(-1)^j,\\
&|j11> - |j-1-1>, \quad p=(-1)^{j+1},\\
&|j1-1> - |j-11>, \quad p=(-1)^{j+1},\\
&|j1-1> + |j-11>, \quad p=(-1)^{j}.
\end{aligned}$$

В силу сохранения четности между этими состояниями возможны переходы, соответствующие следующим спиральным амплитудам[5]:

синглетная амплитуда:

$$\phi^{J}_{00+} - \phi^{J}_{00-}, \tag{14a}$$

триплетные амплитуды:

$$\phi^{J}_{12} - \phi^{J}_{1-2}, \quad \phi^{J}_{10}, \quad \phi^{J}_{00+} + \phi^{J}_{00-}, \quad \phi^{J}_{02}, \quad \phi^{J}_{12} + \phi^{J}_{1-2}. \tag{14б}$$

Введем далее систему 6 независимых спиральных амплитуд и, записав явный вид представления, включая спиноры, сведем эти спиральные амплитуды к инвариантным[4].

Из этих формул и из (14а) видно, что в матричный элемент перехода в синглет-

ном состоянии при данном выборе структур дает вклад только инвариантная амплитуда A_3.

Таким образом, для матричного элемента перехода в синглетном состоянии получена следующая асимптотика в пороговом приближении:

$$M^0 = +\frac{e^2 m}{t}\{1 + \frac{e^2}{2\pi^2} m^2 \ln t\, I(s) + \dots\} + \frac{e^2 m}{u}\eta_1 \{1 + \frac{e^2}{2\pi^2} m^2 I(s) \ln u\}. \tag{15}$$

Суммируя этот ряд при помощи ренормализационной группы, получаем "реджевскую" асимптотику:

$$M^0 = +e^2 m t^{-1 + \frac{e^2 m^2 I(s)}{2\pi^2}} + \eta_1 e^2 m u^{-1 + \frac{e^2 m^2}{2\pi^2} I(s)} \tag{16}$$

и уравнение для определения связанных состояний в области $0 < 4m^2 - s \ll 4m^2$:

$$\ell = -1 + \frac{e^2}{2\pi} m^2 \frac{1}{\sqrt{s(4m^2 - s)}}, \quad \ell = 0, 1, \dots \tag{17}$$

которое в нерелятивистском приближении ($m \to \infty$) переходит в уравнение кулоновских уровней системы электрон-позитрон с радиальным квантовым числом 0.

$$\ell = -1 + a\sqrt{\frac{m}{-2E}}. \tag{18}$$

Итак, как и в статье[2], амплитуда рассеяния в синглетном состоянии в пороговой области в s канале имеет "реджевскую" асимптотику по t, которая дает возможность определить энергетические уровни.

Как видно, в пороговой области разложение ряда теории возмущений проводится по $\frac{a}{\sqrt{-2E}}$, что в данном приближении соответствует получению энергетических уровней вплоть до e^2. В этом порядке спиновые эффекты не дают вклада в энергию, и потому в пороговой области можно было бы надеяться получить для триплетных состояний выражения с той же асимптотикой, что и для синглетного состояния. Однако эта надежда, как следует из (5), (12), (15б) и из вышеупомянутых формул[4], для триплетного состояния не оправдывается, по крайней мере, при рассмотренном способе суммирования ряда.

Я выражаю благодарность Соловьеву Л.Д. за полезные дискуссии и постоянное внимание к работе.

Литература

1. Б.А. Арбузов, Л А.А.Логунов, А.Н. Тавхелидзе, Р.Н.Фаустов. Phys. Lett, 2, 150 (1962).
2. А.А.Логунов, Нгуен Ван Хьеу, А.Н.Тавхелидзе, О.А.Хрусталев. Nucl. Phys., 44, 275 (1963).

3. А.А.Логунов, Нгуен Ван Хьеу, А.Н.Тавхелидзе, О.А.Хрусталев. Препринт ОИЯИ Е-1194, Дубна, 1963.

4. A.C.Hearn, E.Leader. Phys. Rev., 126, 789(1962).

5. M.Jacob, G.C.Wick, Ann. of Phys., 7, 404 (1959).

Рукопись поступила в издательский отдел
3 января 1964 г.

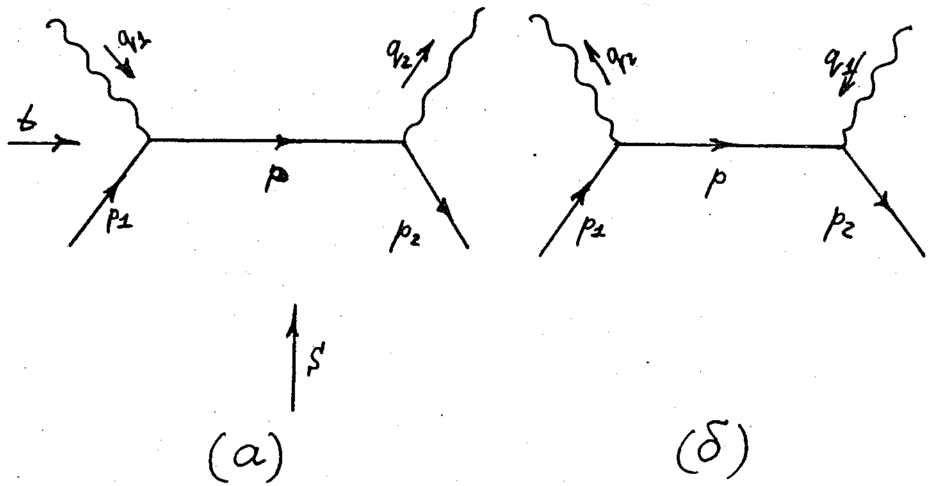

Рис. 1.

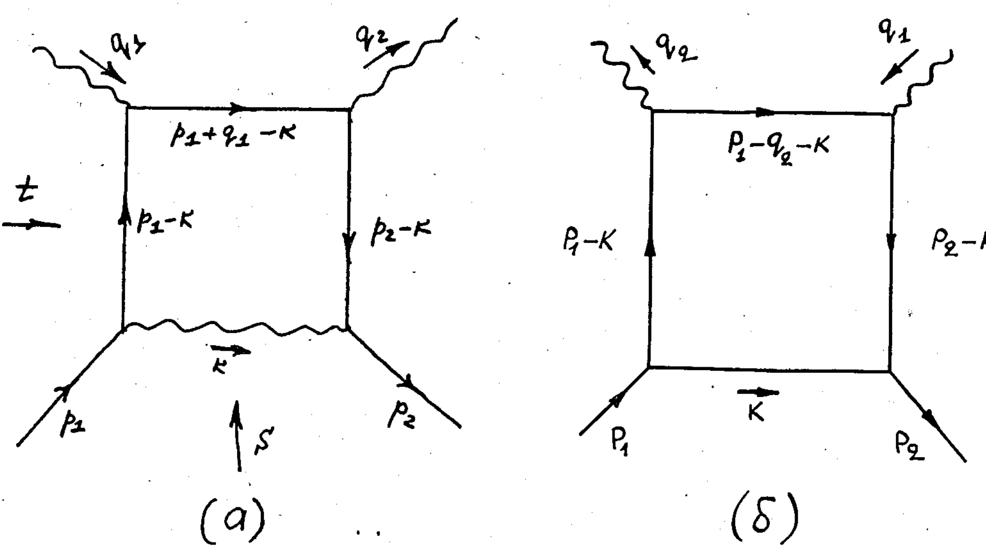

Рис. 2.