ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

З. Галясевич

Р - 1517

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА В ПРИБЛИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ДЛЯ СВЕРХТЕКУЧИХ БОЗЕ-СИСТЕМ

Дубна 1964

З. Галясевич[x/]

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА В ПРИБЛИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ДЛЯ СВЕРХТЕКУЧИХ БОЗЕ-СИСТЕМ

[x/] Постоянный адрес: Институт теоретической физики, Вроцлавский университет, Вроцлав /Польша/.

Галясевич З. P-1517.

Асимптотическое вычисление функции Грина в приближении вязкой жидкости для сверхтекучих бозе-систем.

При использовании нового метода, предложенного Н.Н.Боголюбовым для вычисления функций Грина в "приближении идеальной жидкости", на основе уравнений гидродинамики вязкой сверхтекучей жидкости как усредненных уравнений движения систем бозе-частиц и связи между средними значениями и запаздывающими функциями Грина в работе получены функции Грина в "приближении вязкой жидкости". Это приближение позволяет учесть эффекты затухания. Коэффициенты затухания выражаются через кинетические коэффициенты /обычной и второй вязкости и теплопроводности/.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна 1964.

Galasiewicz Z. P-1517

Asymptotic Calculation of the Green Function in Viscous Liquid Approximation for Superfluid Bose-Systems

The new method suggested by N.N.Bogolubov for calculating the Green functions in the "ideal liquid approximation" was used to obtain the Green functions in the "viscous liquid approximation". These functions have been obtained on the basis of hydrodynanic equations for viscous superfluid liquid as averaged equations of motion of Bose particle systems and on the basis of a relation between the mean values and the retarded Green functions. This approximation allows us to take into account the damping effects. The damping coefficients are expressed in terms of the kinetic coefficients (of the usual and second viscosity and thermal conductivity).

Preprint Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.

§ I. Введение

В работе[I] Н.Н. Боголюбов вывел уравнения гидродинамики идеальной сверхтекучей жидкости при наличии внешних источников, исходя из усредненных уравнений движения для бозе-систем. В случае малого отклонения от состояния статистического равновесия уравнения гидродинамики решаются. В частности, получена скорость движущегося конденсата. Как показано в[2], при наличии конденсата (случай сверхтекучей жидкости) среднее значение бозе-оператора $\langle\psi(t,\vec{r})\rangle$ отлично от нуля. Фаза этого среднего значения является потенциалом скоростей движения конденсата. Кроме того, известны формулы, связывающие вариацию среднего значения, происходящую из-за адиабатического включения возмущения (в данном случае возмущением является член гамильтониана с внешними источниками) с запаздывающими функциями Грина. Отсюда получаются формулы для компонент скорости движения конденсата. Они выражаются через фурье-образы запаздывающих функций Грина. Сравнивая их с решением уравнений гидродинамики для системы одинаковых частиц, получаем фурье-компоненты запаздывающих функций Грина. Это приближение названо Н.Н. Боголюбовым "гидродинамическим приближением" для функций Грина.

Целью настоящей работы является получение уравнений гидродинамики вязкой сверхтекучей жидкости и на основе их вычисления фурье-компонент запаздывающих функций Грина. В отличие от случая идеальной жидкости это дает возможность учесть эффекты затухания.

В § 2 будут выведены формулы, связывающие запаздывающие функции Грина с вариациями средних. В § 3 на основе тождеств, полученных в[1], находятся уравнения гидродинамики вязкой сверхтекучей бозе-жидкости. В § 4 получается акустическое приближение уравнений гидродинамики. § 5 посвящен вычислению функции Грина в приближении вязкой жидкости. Использование некоторых свойств реальной бозе-жидкости (гелия П) приводит к упрощению полученных формул. В опубликованной в последнее время статье[3] рассмотрена связь гидродинамических уравнений с корреляционными функциями. Как пример этого было рассмотрено уравнение диффузии спина и явлания переноса в нормальной жидкости.

§ 2. Связь запаздывающих функций Грина с вариацией средних значений

Связь запаздывающих функций Грина с вариацией средних значений была получена (см., например,[4]) при рассмотрении реакции квантово-механической системы на адиабатическое включение возмущения, другими словами, при рассмотрении влияния включения возмущения на средние значения динамических переменных.

Двухвременные запаздывающие температурные функции Грина $\langle\langle A(t); B(\tau)\rangle\rangle^r$ определяются следующим образом:

$$\langle\langle A(t); B(\tau)\rangle\rangle^r \equiv G_r(t-\tau) = -i\theta(t-\tau)\langle[A(t), B(\tau)]\rangle, \tag{2.1}$$

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

где $\langle \ldots \rangle$ означает усреднение по большому каноническому ансамблю Гиббса:

$$\langle \ldots \rangle = \frac{Sp\left(e^{-\frac{H_0}{\theta}} \ldots\right)}{Sp\left(e^{-\frac{H_0}{\theta}}\right)} \quad , \quad \theta = kT \quad ; \tag{2.2}$$

$A(t)$, $B(t)$-гейзенберговское представление операторов A, B.

Фурье-компонента (2.I) имеет вид :

$$\langle\langle A;B \rangle\rangle_E^{r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle\langle A(t), B(\tau) \rangle\rangle^{r} e^{iE(t-\tau)} d(t-\tau) \quad . \tag{2.3}$$

Пусть A - оператор, явно не зависящий от времени, $\mathcal{D}(t)$ - статистический оператор. Тогда среднее значение A равно

$$\overline{A(t)} = Sp\{\mathcal{D}(t) A\} \tag{2.4}$$

Оператор $\mathcal{D}$ находится из уравнения движения

$$i \frac{d\mathcal{D}(t)}{dt} = \left[H_0 + \delta H_t , \mathcal{D}(t)\right] \quad , \tag{2.5}$$

где H_0 - не зависящий от времени гамильтониан системы, δH_t - адиабатическое включение возмущения, такое, что

$$\delta H_{t=-\infty} = 0 \quad . \tag{2.6}$$

Начальное условие для статистического оператора $(t=-\infty)$ имеет вид:

$$\mathcal{D}(-t) = \mathcal{D} = \frac{e^{-\frac{H_0}{\theta}}}{Sp\left(e^{-\frac{H_0}{\theta}}\right)} \qquad (2.7)$$

Это означает, что при $t=-\infty$ система находится в состоянии статистического равновесия. Предполагая, что отклонение от статистического равновесия мало, будем искать $\mathcal{D}(t)$ в виде:

$$\mathcal{D}(t) = \mathcal{D} + \delta\mathcal{D}(t) \qquad (2.8)$$

Из (2.7) видно, что

$$\delta\mathcal{D}(-\infty) = 0 .$$

Подставим (2.8) в (2.5) и принебрежем произведением $(\delta\mathcal{D}.\,\delta H_t)$. Чтобы решить (2.5), вводим вспомагательный оператор

$$\delta\mathcal{D}_1 = e^{iH_0 t}\,\delta\mathcal{D}\,e^{-iH_0 t} \qquad (2.9)$$

удовлетворяющий, как легко проверить, уравнению

$$i\frac{d}{dt}\delta\mathcal{D}_1 = e^{iH_0 t}\left[\delta H_t, \mathcal{D}\right]e^{-iH_0 t} \qquad (2.10)$$

с начальным условием

$$\delta\mathcal{D}_1(-\infty) = 0 \qquad (2.11)$$

Интегрируя (2.10) при условии (2.11), находим

$$\delta\mathcal{D}(t) = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{t} e^{iH_0(\tau-t)}\left[\delta H_\tau, \mathcal{D}\right]e^{-iH_0(\tau-t)}\,d\tau \qquad (2.12)$$

Теперь, подставляя (2.8) в (2.4) (с учетом (2.12)) и используя тот факт, что под знаком $Sp\{\ \}$ возможна циклическая перестановка операторов, получаем

$$\bar{A} = Sp\{\mathfrak{D}A\} - i\int_{-\infty}^{t} \frac{Sp\{e^{-\frac{H_0}{\theta}}[A(t), \delta H_\tau(\tau)]\}}{Sp\{e^{-\frac{H_0}{\theta}}\}} d\tau = \tag{2.13}$$

$$= \langle A \rangle - i\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t-\tau)\langle [A(t), \delta H_\tau(\tau)] \rangle d\tau ,$$

где $A(t)$, $\delta H_\tau(\tau)$ – гейзенберговское представление операторов $A, \delta H_\tau$.

Если принять, что вариация гамильтониана периодически зависит от времени

$$\delta H_\tau = \sum_\Omega e^{-i\Omega\tau + \varepsilon\tau} V_\Omega , \quad (\varepsilon > 0 , \ \varepsilon \to 0) , \tag{2.14}$$

где V_Ω – оператор, не зависящий явно от времени, то для вариации $\delta\bar{A} = \bar{A} - \langle A \rangle$ получаем следующие выражение :

$$\delta\overline{A(t)} = -i\sum_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t-\tau)\langle [A(t), V_\Omega(\tau)] \rangle e^{-i(\Omega + i\varepsilon)\tau} d\tau = \tag{2.15}$$

$$= \sum_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} \langle\langle A(t); V_\Omega(\tau) \rangle\rangle^r e^{-i(\Omega + i\varepsilon)\tau} d\tau .$$

Принимая во внимание (2.3), получаем окончательно:

$$\delta\bar{A}(t) = 2\pi \sum_\Omega e^{-i\Omega t + \varepsilon t} \langle\langle A; V_\Omega \rangle\rangle^r_{E = \Omega + i\varepsilon} . \tag{2.16}$$

В частном случае одной частоты, когда $\Omega = \pm\omega$, имеем:

$$\delta\overline{A(t)} = 2\pi e^{-i\omega t + \varepsilon t} \langle\langle A; V_\Omega \rangle\rangle^r_{E = \omega + i\varepsilon} + \tag{2.17}$$

$$+ 2\pi e^{i\omega t + \varepsilon t} \langle\langle A; V_\Omega \rangle\rangle^r_{E = \omega - i\varepsilon}$$

Таким образом, мы пришли к формулам, связывающим вариацию среднего значения с функциями Грина. Если бы удалось каким-либо образом найти эту вариацию среднего значения , следовательно, и левую часть (2.17), то тем самым мы бы нашли фурье-компоненты запаздывающих функций Грина.

Уравнения гидродинамики дают возможность вычислить средние значения, существенные для систем одинаковых частиц с парным взаимодействием (а именно $\delta\langle\psi(t,\vec{r})\rangle$). В следующем параграфе мы перейдём к выводу уравнений гидродинамики вязкой жидкости, исходя из уравнений движения для систем одинаковых бозе-частиц.

§ 3. Уравнения гидродинамики для вязкой сверхтекучей бозе-жидкости

Рассматривается система одинаковых бозе-частиц с парным взаимодействием, гамильтониан которой в представлении вторичного квантования имеет вид:

$$
\begin{aligned}
H = \frac{1}{2m}\int \nabla\psi^{+}(t,r)\nabla\psi(t,r)\,d\vec{r} - \lambda\int\psi^{+}(t,r)\psi(t,r)\,d\vec{r} +\\
+\frac{1}{2}\int\Phi(r-r')\,\psi^{+}(t,r)\,\psi^{+}(t,r')\,\psi(t,r')\,\psi(t,r)\,d\vec{r}\,d\vec{r}' +\\
+\int\{\eta(t,r)\,\psi^{+}(t,r)+\eta^{+}(t,r)\,\psi(t,r)\}\,d\vec{r} = H_0+\delta H_t
\end{aligned}
\qquad (3.1)
$$

здесь λ - постоянная $\psi^{+}(t,r)$, $\psi(t,r)$ - бозе-операторы в представлении Гейзенберга (под знаком функциональной зависимости мы пишем вместо $\vec{r}$ просто r ; $\hbar = 1$).

В методе, предложенном Н.Н. Боголюбовым /1/, кроме обычных членов, содержатся ещё дополнительные члены гамильтониана с "источниками частиц" $\eta(t,r)$, $\eta^{+}(t,r)$, которые являются заданными - функциями. Введение внешних источников (адиабатическое включение возмущения) нужно для того, чтобы брать по ним вариации от обычных гидродинамических средних и таким образом получить выражения для функций Грина. Эти средние, взятые с некоторым, вообще говоря, неравновесным статистическим оператором, будем обозначать $\langle \ldots \rangle$.

Для получения уравнений гидродинамики в [I] выведен ряд тождеств, выражающих производные по времени от средней плотности числа частиц ρ, среднего потока $\vec{j}$ и средней плотности энергии $\rho\varepsilon$ (ε - энергия на одну частицу) для системы с гамильтонианом (3.I). Мы выпишем эти тождества, так как они также необходимы для получения уравнения гидродинамики в приближении вязкой жидкости:

$$m\frac{\partial \rho(t,r)}{\partial t} + \nabla \vec{j}(t,r) = im\left[\eta^*(t,r)\varphi(t,r) - \eta(t,r)\varphi^+(t,r)\right], \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial j_\alpha}{\partial t} &= \frac{1}{4m}\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\Delta\rho - \frac{1}{2m}\sum_\beta \frac{\partial}{\partial r_\beta}\left\langle \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial r_\beta} - \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial \psi}{\partial r_\alpha}\right\rangle - \\ &- \frac{1}{2}\int \frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\alpha}\left\{\mathcal{D}_t(r,-R) + \mathcal{D}_t(r-R,R)\right\} d\vec{R} + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial r_\alpha}\eta + \frac{\partial \varphi}{\partial r_\alpha}\eta^+ - \varphi^*\frac{\partial \eta}{\partial r_\alpha} - \varphi\frac{\partial \eta^+}{\partial r_\alpha}\right),\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} &= \frac{i}{8m^2}\Delta\langle(\Delta\psi^+)\psi - \psi^+(\Delta\psi)\rangle + \sum_\beta \int \frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\alpha}\left\{G_t^{(\beta)}(r,-R) + G_t^{(\beta)}(r-R,R)\right\} d\vec{R} + \\ &+ \sum_\beta \frac{\partial}{\partial r_\beta}\left\{\frac{i}{4m^2}\left\langle \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\beta}\Delta\psi - (\Delta\psi^+)\frac{\partial \psi}{\partial r_\beta}\right\rangle + \int \Phi(R)G_t^{(\beta)}(r,R)\,d\vec{R}\right\} + \\ &+ \frac{i}{2}\int \Phi(r-r')\Big[\eta^*(t,r)\langle\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle + \eta^*(t,r')\langle\psi^+(t,r)\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle - \\ &- \eta(t,r')\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r)\rangle - \eta(t,r)\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\rangle\Big] d\vec{r}\,' + \\ &+ \frac{i}{4m}\left(\eta\Delta\varphi^* - \eta^*\Delta\varphi + \varphi^*\Delta\eta - \varphi\Delta\eta^*\right),\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\varrho(t,r)=\langle\psi^{+}(t,r)\psi(t,r)\rangle\,,\qquad \varphi(t,r)=\langle\psi(t,r)\rangle\,,$$

$$j_{\alpha}(t,r)=\frac{i}{2}\left\langle\frac{\partial\psi^{+}(t,r)}{\partial r_{\alpha}}\psi(t,r)-\psi^{+}(t,r)\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial r_{\alpha}}\right\rangle,\quad(\alpha=1,2,3)\,,$$

$$\varrho(t,r)\varepsilon(t,r)=-\tfrac{1}{2}\langle(\Delta\psi^{+}(t,r)\psi(t,r)+\psi^{+}(t,r)(\Delta\psi(t,r))\rangle+\frac{1}{2}\int\Phi(r'-r)\mathcal{D}_{t}(r,r'-r)\,d\vec{r}^{\,\prime},$$

$$\mathcal{D}_{t}(r,r'-r)\equiv\langle\psi^{+}(t,r)\psi^{+}(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle=\mathcal{D}_{t}(r',r-r')=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\mathcal{D}_{t}(r',r-r')+\mathcal{D}_{t}(r,r'-r)\right\},\tag{3.5}$$

$$G_{t}^{(\beta)}(r,r'-r)\equiv\frac{i}{4m}\left\langle\psi^{+}(t,r')\left(\psi^{+}(t,r)\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial r_{\beta}}-\frac{\partial\psi^{+}(t,r)}{\partial r_{\beta}}\psi(t,r)\right)\psi(t,r)\right\rangle,$$

$$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}\,.$$

Сверхтекучая бозе-жидкость характеризуется наличием $\langle\psi(t,r)\rangle\equiv\varphi(t,r)=a\exp(i\chi)\neq0$, где $\frac{1}{m}\chi=\vartheta$ – потенциал сверхтекучей скорости $\vec{v}_s$ движения конденсата. Для функции χ и a в работе /I/ получены следующие уравнения

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}=\lambda+\frac{\Delta a}{2ma}-\frac{1}{m}(\nabla\chi)^{2}-\frac{1}{2a}(\mathcal{J}^{*}+\mathcal{J})-$$
$$-\frac{1}{2a^{2}}\int\Phi(R)\left\{X_{t}(r,R)+X_{t}^{*}(r,R)\right\}d\vec{R}\,,\tag{3.6a}$$

$$i\frac{\partial a^{2}}{\partial t}=-\frac{i}{m}\left\{a^{2}\Delta\chi+2a\,\nabla\chi\cdot\nabla a\right\}+$$
$$+\int\Phi(R)\left[X_{t}(r,R)-X^{*}(r,R)\right]d\vec{R}+a(\mathcal{J}-\mathcal{J}^{*})\,,\tag{3.6b}$$

где

$$X_{t}(r,r'-r)=\langle\psi^{+}(t,r)\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle\varphi^{*}(t,r)\,,$$

$$\mathcal{J}(t,r)=\eta(t,r)\,e^{-i\chi(t,r)}$$

$$\mathfrak{Z}(t,r) = \eta(t,r)e^{-i\mathfrak{K}(t,r)} \quad . \tag{3.7}$$

Из (3.6а) получается уравнение для сверхтекучей скорости $\vec{v}_s = \frac{1}{m}\nabla\mathfrak{K}$

$$m\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} = \nabla\Big\{\frac{\Delta a}{2am} - \frac{m v_s^2}{2} - \frac{\mathfrak{Z}^* + \mathfrak{Z}}{2a} +$$

$$+ \frac{1}{2a^2}\int \Phi(R)\left[X_t(r,R) + X_t^*(r,R)\right] d\vec{R}\Big\} \quad . \tag{3.8}$$

Сверхтекучая жидкость описывается восьмью параметрами состояния. За эти параметры удобно принять: плотность числа частиц ρ , температуру θ , три слагаемые сверхтекучей скорости конденсата $\vec{v}_s$ и три слагаемые скорости "нормальной компоненты" $\vec{v}_n$. Если источники отсутствуют, то в состоянии статистического равновесия эти параметры постоянны.

В случае наличия источников $\rho = \rho(r)$, $\vec{v}_s = \vec{v}_s(r)$.

При отклонении от равновесия указанные величины считаются параметрами состояния только тогда, когда они являются медленно меняющимися функциями времени и пространства.

Средние для состояния статистического равновесия обозначим $\langle \ldots \rangle_{\rho,\theta,v_s,v_n}$. В дальнейшем нам придется иметь дело со средними типа

$$\mathfrak{A}_n = \left\langle (\mathcal{D}_1\gamma(t,r_1)), \ \ldots \ (\mathcal{D}_n\gamma(t,r_n))\right\rangle_{\rho,\theta,v_s,v_n} =$$

$$= \mathfrak{A}_n(r_2 - r_1, \ldots, r_n - r_1 \,|\, \rho, \theta, v_s, v_n) \ , \tag{3.9a}$$

где

$$\gamma(t,r_j) = \psi(t,r_j)\,,\ \psi^{+}(t,r_j) \ ,$$

а $\mathcal{D}_\gamma$- линейные комбинации из постоянных и операторов дифференцирования по пространственным переменным (см., например, выражения для функции $\mathcal{D}_t$, $G_t^{(\alpha)}$, X_t).

Перейдём сейчас к рассмотрению изучаемых в гидродинамике неравновесных процессов, для которых неравновесные величины типа

$$\mathfrak{A}_n=\langle(\mathcal{D}_1\gamma(t,r_1)\ldots(\mathcal{D}_n\gamma(t,r_n))\rangle=\mathfrak{A}_n(t,r_1,r_2-r_1,\ldots r_n-r_1) \tag{3.9в}$$

меняются достаточно медленно при временных и пространственных трансляциях

$$t\to t+t_0\ ,\ r_j\to r_j+r_0\ ,\ |t|\approx T\ ,\ |r_0|\approx l\ ,$$

где T время релаксации, а l - длина свободного пробега. В окрестности каждой точки $(t,\vec{r})$ имеются лишь малые отклонения от "локального статистического равновесия", описанного через локальные величины $\varrho(t,r)$, $\theta(t,r)$, $v_s^{(\alpha)}(t,r)$, $v_m^{(\alpha)}(t,r)$. (Мы предполагаем, что отклонения от статистического равновесия асимптотически затухают, так что можно определить, хотя бы по порядку величины T и l). Естественно мы будем считать, что градиенты по t и $\vec{r}$ первого порядка будут малыми первого порядка, а градиенты второго порядка будут малыми второго порядка и т.д. Чтобы технически сформулировать это предположение, в /6/ и/1/ введен некоторый параметр малости μ , характеризующий малость градиентов. Пользуясь этим параметром, напишем (3.9в) в виде:

$$\mathfrak{A}_n(t,r_1,r_2-r_1,\ldots r_n-r_1)=\tilde{\mathfrak{A}}_n(\mu t,\mu r_1,r_2-r_1,\ldots r_n-r_1;\mu)=$$

$$=\tilde{\mathfrak{A}}_n(\tau,\xi_1,R_{21},\ldots,R_{n1};\mu)\ ,$$

$$\tau=\mu t\ ,\ \vec{\xi}_1=\mu\vec{r}_1\ ,\ \vec{R}_{j1}=\vec{r}_j-\vec{r}_1\ ,$$

причем

$$\tilde{\mathfrak{A}}_n(\tau, \xi_1, R_{21}, \dots R_{n1}; \mu) = \tilde{\mathfrak{A}}_n^{(0)}(\tau, \xi_1, R_{21}, \dots, R_{n1}) + $$
$$+ \mu \tilde{\mathfrak{A}}_n^{(1)}(\tau, \xi_1, R_{21}, \dots R_{n1}) + \mu^2 \tilde{\mathfrak{A}}_n^{(2)}(\tau, \xi_1, R_{21}, \dots, R_{n1}) + \dots, \quad (3.9c)$$

где $\tilde{\mathfrak{A}}_n^{(0)}$ получается заменой в (3.9) неравновесных средних $\langle .. \rangle$, соответствующими средними $\langle .. \rangle_{\varrho, \theta, v_s, v_n}$, $\tilde{\mathfrak{A}}_n^{(1)}$ должно быть линейной формой по отношению к градиентам ϱ , θ , $v_s^{(\alpha)}$, $v_n^{(\alpha)}$ и т.д.

Заметим, что такая ситуация обычно возникает при выводе уравнений нормальной жидкости из кинетического уравнения, когда мы ищем его решение, близкое к "локально равновесному", и разлагаем по "степеням градиентов".

Используя введенный нами малый параметр μ , перейдем теперь к нахождению уравнений гидродинамики сверхтекучей жидкости с учётом вязкости. Мы будем иметь дело с функциями $\mathcal{D}_t$, $G_t^{(\alpha)}$, принадлежащими к типу $\mathfrak{A}_n$. Из уравнений (3.2)-(3.4) получим

$$m \frac{\partial \tilde{\varrho}(\tau, \xi)}{\partial \tau} + \sum_\beta \frac{\partial \tilde{j}_\beta(\tau, \xi)}{\partial \xi_\beta} = i a m (\zeta^+ - \zeta),$$

$$\frac{\partial \tilde{j}_\alpha}{\partial \tau} = -\sum_\beta \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \Big\{ \frac{1}{2m} \Big\langle \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial r_\beta} + \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial r_\alpha} \Big\rangle +$$
$$+ \frac{1}{2} \int \frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\alpha} R_\beta \tilde{\mathcal{D}}_\tau^{(0)}(\xi, R) d\vec{R} + \frac{1}{2} \int \frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\alpha} R_\beta \tilde{\mathcal{D}}_\tau^{(1)}(\xi, R) d\vec{R} \Big\} + \quad (3.10)$$

$$+iam(\gamma^*-\gamma)v_s^{(\alpha)}+\mu(\gamma^*+\gamma)\frac{\partial a}{\partial\xi_\alpha} \quad . \tag{3.11}$$

Или

$$\frac{\partial\tilde{j}_\alpha}{\partial\tau}=\sum_\beta\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial\xi_\beta}+iam(\gamma^*-\gamma)v_s^{(\alpha)}+\mu(\gamma^*+\gamma)\frac{\partial a}{\partial\xi_\alpha}\ , \tag{3.12}$$

где

$$T_{\alpha\beta}=T^{(0)}_{\alpha\beta}+\mu T^{(1)}_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2m}\left\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}+\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}\right\rangle+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\alpha}R_\beta\tilde{D}^{(0)}_\tau(\xi,R)d\vec{R}+\mu\frac{1}{2}\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\alpha}R_\beta\tilde{D}^{(1)}_\tau(\xi,R)d\vec{R}\ . \tag{3.13}$$

Как показано в /I/

$$T^{(0)}_{\alpha\beta}=-\delta_{\alpha\beta}\mathcal{P}(\varrho,\theta)-m\varrho_s v_s^{(\alpha)}v_n^{(\beta)}-m\varrho_n v_n^{(\alpha)}v_n^{(\beta)}\ ,$$

$$\varrho_s=\frac{1}{m}\varrho\frac{\partial F(\varrho,\theta,u)}{\partial u}\ ,\quad \varrho_n=\varrho-\varrho_s\ ,\quad u=\frac{(v_s-v_n)^2}{2}\ , \tag{3.14}$$

где $\mathcal{P}$ - давление, F - свободная энергия, ϱ_s - плотность конденсата, ϱ_n - плотность нормальной компоненты. Находим далее

$$\frac{\partial(\varrho\varepsilon)}{\partial\tau}=\sum_\beta\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}\Big\{\Big[\frac{i}{4m^2}\left\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}(\Delta\psi)-(\Delta\psi^+)\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}\right\rangle+$$

$$+\int\Phi(R)\tilde{\tilde{G}}^{(0)(\beta)}_\tau(\xi,R)d\vec{R}-\sum_\alpha\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\alpha}R_\beta\tilde{\tilde{G}}^{(0)(\alpha)}_\tau(\xi,R)\,d\vec{R}\ \Big]+$$

$$+\mu\Big[\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}\frac{i}{8m^2}\langle(\Delta\psi^+)\psi-\psi^+(\Delta\psi)\rangle+\int\Phi(R)\tilde{\tilde{G}}^{(1)(\beta)}_\tau(\xi,R)d\vec{R}-\sum_\alpha\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\alpha}R_\beta\tilde{\tilde{G}}^{(1)(\alpha)}_\tau(\xi,R)d\vec{R}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\gamma,\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi_\gamma}\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\alpha}R_\beta R_\gamma\overset{(0)}{\tilde{G}}{}_\tau^{(\alpha)}(\xi,R)d\vec{R}\Big]\Big\}+\frac{i}{a}\Big(\zeta^*\int\Phi(R)X(\xi,R)d\vec{R}-$$

$$-\zeta\int\Phi(R)\overset{*}{X}(\xi,R)d\vec{R}\Big)+ia(\zeta^*-\zeta)\frac{mv_s^2}{2}+\mu\frac{1}{2}(\zeta^*+\zeta)\vec{v}_s\nabla_\xi a\quad,\tag{3.15}$$

или

$$\frac{\partial(\varrho\varepsilon)}{\partial\tau}=\sum_\beta\frac{\partial I_\beta}{\partial\xi_\beta}+\frac{i}{a}\Big(\zeta^*\int\Phi(R)X(\xi,R)d\vec{R}-\zeta\int\Phi(R)\overset{*}{X}(\xi,R)d\vec{R}\Big)+$$

$$+ia(\zeta^*-\zeta)\frac{mv_s^2}{2}+\mu\frac{1}{2}(\zeta^*+\zeta)\vec{v}_s\nabla_\xi a\quad,\tag{3.16}$$

где

$$I_\beta=I_\beta^{(0)}+\mu I_\beta^{(1)}=\Big[\frac{i}{4m^2}\Big\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}(\Delta\psi)-(\Delta\psi^+)\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}\Big\rangle+$$

$$+\int\Phi(R)\overset{(0)}{\tilde{G}}{}_\tau^{(\beta)}(\xi,R)d\vec{R}-\sum_\alpha\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\alpha}R_\beta\overset{(0)}{\tilde{G}}{}_\tau^{(\alpha)}(\xi,R)d\vec{R}\Big]+$$

$$+\mu\Big[\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}\frac{i}{8m^2}\big\langle(\Delta\psi^+)\psi-\psi^+(\Delta\psi)\big\rangle+\int\Phi(R)\overset{(1)}{\tilde{G}}{}_\tau^{(\beta)}(\xi,R)d\vec{R}-\tag{3.17}$$

$$-\sum_\alpha\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\alpha}R_\beta\overset{(1)}{\tilde{G}}{}_\tau^{(\alpha)}(\xi,R)d\vec{R}+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\gamma}\frac{\partial}{\partial\xi_\gamma}\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\alpha}R_\beta R_\gamma\overset{(0)}{\tilde{G}}{}_\tau^{(\alpha)}(\xi,R)d\vec{R}\Big]\,.$$

В /I/ показано, что

$$I_\beta^{(0)}=-\Lambda(\varrho,\theta,\mu)\varrho_s(v_s^{(\beta)}-v_n^{(\beta)})-m\varrho_s(v_s^{(\beta)}-v_n^{(\beta)})\Big(\vec{v}_s\vec{v}_n-\frac{v_n^2}{2}\Big)-$$

$$-v_n^{(\beta)}\Big[\varrho\varepsilon+\mathcal{P}+\frac{mv_n^2}{2}\varrho+m\varrho_s\vec{v}_n(\vec{v}_s-\vec{v}_n)\Big]\quad,\tag{3.18}$$

где Λ - химический потенциал.

Необходимо помнить, что в последнем члене формулы (3.15), которая была получена из (3.4) в обозначениях (3.7)

$$\tilde{X}_\tau(\xi,R)=\tilde{X}_\tau^{(0)}(\xi,R)+\mu\tilde{X}_\tau^{(1)}(\xi,R)+\qquad.$$

Из-за присутствия в (3.4) членов, в которые входит $X(\xi-\mu R, R)$, после разложения в ряд по μ появляются члены типа $\mu \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \int \Phi(R) \tilde{X}^{(0)}(\xi, R) R_\alpha \, d\vec{R}$. Они равны нулю, потому что $\tilde{X}^{(0)}$ является четной функцией $\vec{R}$. При получении (3.II) мы использовали тот факт, что $\tilde{\mathcal{D}}_\tau^{(0)}$ является четной функцией $\vec{R}$.

Заметим, что формы $T_{\alpha\beta}$, I_β составленны из величин типа $\mathfrak{A}_{m\lambda}$ и потому мы воспользовались для них разложением (3.9с). Выписаны только члены нулевого и первого порядка по μ.

Учёт членов нулевого порядка

$$T_{\alpha\beta} = T^{(0)}_{\alpha\beta} \quad , \quad I_\beta = I^{(0)}_\beta$$

приводит к уравнениям гидродинамики идеальной сверхтекучей жидкости /I/.

Следующий порядок по μ

$$T_{\alpha\beta} = T^{(0)}_{\alpha\beta} + \mu T^{(1)}_{\alpha\beta} \quad , \quad I_\beta = I^{(0)}_\beta + \mu I^{(1)}_\beta$$

приводит к уравнениям гидродинамики сверхтекучей жидкости с учётом вязкости. Получение этих уравнений является целью дальнейших вычислений.

Итак, мы выделили в $T_{\alpha\beta}$ и I_β члены $T^{(1)}_{\alpha\beta}$, $I^{(1)}_{\alpha\beta}$, которые должны быть линейными формами по отношению к градиентам ϱ, θ, $v_s^{(\alpha)}$, $v_n^{(\alpha)}$, (а также по отношению к η, η^*, которые, как видно из (3.2), порядка малости этих градиентов). Предположим, что линейные формы имеют вид:

$$T_{\alpha\beta}^{(1)} = \delta_{\alpha\beta}\left\{C_1 \operatorname{div}_\xi \vec{v}_s + C_2 \operatorname{div}_\xi \vec{v}_n + C_5 \eta + C_5^* \eta^*\right\} +$$

$$+ C_3\left(\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial v_s^{(\beta)}}{\partial \xi_\alpha}\right) + C_4\left(\frac{\partial v_n^{(\alpha)}}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial v_n^{(\beta)}}{\partial \xi_\alpha}\right) \tag{3.19}$$

и

$$I_\beta^{(1)} = \mathcal{D}_1 \frac{\partial \rho}{\partial \xi_\beta} + \mathcal{D}_2 \frac{\partial \theta}{\partial \xi_\beta}, \tag{3.20}$$

где C_i, $\mathcal{D}_i$ – некоторые коэффициенты, характеризующие сверхтекучую жидкость ($\mathcal{D}_1$ – коэффициент диффузии, $\mathcal{D}_2$ – теплопроводности, C_4 – коэффициент обычной вязкости, а C_1, C_2 – коэффициенты так называемой второй вязкости). Другие коэффициенты B_1, B_2, B_3, B_3^* будут введены при рассмотрении уравнения (3.8), причем B_1 и B_2 будут также коэффициентами второй вязкости. Введенные нами коэффициенты мы будем считать заданными величинами. В случае слабого взаимодействия между частицами, они в принципе могли бы быть вычислены при помощи кинетического уравнения. В случае же произвольного взаимодействия их надо взять из эксперимента.

Из условия статистического равновесия в работе /I/ получено на основе уравнений (3.6а,в)

$$\frac{1}{a^2}\int \Phi(R)\tilde{X}^{(0)} d\vec{R} = \frac{1}{a^2}\int \Phi(R)\tilde{X}^{(0)*} d\vec{R} =$$

$$= \Lambda(\rho, \theta, \mu) - \frac{m(v_s - v_n)^2}{2} \tag{3.21}$$

Предположим, что члены высшего порядка по μ имеют вид:

$$\mu\left\{\frac{1}{a^2}\int \Phi(R)\tilde{X}(\xi,R)^{(1)}d\vec{R} + \frac{1}{a^2}\int \Phi(R)\tilde{X}(\xi,R)^{(1)*}d\vec{R}\right\} =$$

$$= -\mu\left[B_1 \, div_\xi \vec{v}_s + B_2 \, div_\xi \vec{v}_n + b_1\eta + b_1^*\eta^*\right] - \mu\frac{\mathfrak{I}^* + \mathfrak{I}}{2a} \quad . \qquad (3.22)$$

Тогда из (3.22) и (3.6в) получим, что

$$\frac{2\mu}{a^2}\int \Phi(R)\tilde{X}(\xi,R)^{(1)}d\vec{R} = -\mu\left[B_1 \, div_\xi \vec{v}_s + B_2 \, div_\xi \vec{v}_n + b_1\eta + b_1^*\eta^*\right] +$$

$$+\mu\frac{\mathfrak{I}^* - 3\mathfrak{I}}{2a} \quad . \qquad (3.23)$$

Используя теперь (3.2I), (3.22), мы найдем, что в принятом нами приближении формула (3.8) имеет вид:

$$m\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left[\Lambda(\xi,\theta,\mu) + \frac{m v_s^2}{2} - \frac{m}{2}(v_s - v_n)^2\right] +$$

$$+\mu\left[B_1\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} div\,\vec{v}_s + B_2\frac{\partial}{\partial \xi} div\,\vec{v}_n + b_1\frac{\partial \eta}{\partial \xi_\alpha} + b_1^*\frac{\partial \eta^*}{\partial \xi_\alpha}\right] - \qquad (3.24)$$

$$-\mu\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left(\frac{\mathfrak{I}^* + \mathfrak{I}}{2a}\right) \quad .$$

На основании определения энтропии в виде

$$S = -\frac{\partial F}{\partial \theta}$$

(F - свободная энергия), в работе /I/ было получено уравнение для плотности энтропии. После аналогичных преобразований, но с учётом формул (3.20), (3.22) и (3.23) получим для случая вязкой жидкости

$$
\frac{\partial(\rho S)}{\partial \tau} + \sum_{\beta} \frac{\partial(\rho v_n^{(\beta)} S)}{\partial \xi_\beta} = \frac{\mu}{\theta}\Big[\mathcal{D}_1 \Delta_\xi \rho + \mathcal{D}_2 \Delta_\xi \theta +
$$
$$
+ ia(\zeta^* - \zeta)\Big(-B_1 \operatorname{div}_\xi \vec{v}_s - B_2 \operatorname{div}_\xi \vec{v}_n - b_1 \eta - b_1^* \eta^* - \frac{\zeta^* + \zeta}{2a}\Big) +
$$
$$
+ (\zeta^* + \zeta)\Big(\frac{\eta^* - \eta}{2a}\Big) + \frac{1}{2}(\zeta^* + \zeta)\vec{v}_s \nabla_\xi a\Big] \quad . \tag{3.25}
$$

После того, как в уравнениях гидродинамики члены, пропорциональные η, η^* и градиентам ρ, θ, $v_s^{(\alpha)}$, $v_n^{(\alpha)}$, были выделены и учтены, в уравнениях (3.10), (3.12), (3.24), (3.25) следует перейти от вспомогательных переменных $\tau, \vec{\xi}$ к первоначальным переменным t, $\vec{r}$. В результате мы получим уравнения гидродинамики для вязкой бозе-жидкости

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_\alpha \frac{\partial(\rho_s v_s^{(\alpha)} + \rho_n v_n^{(\alpha)})}{\partial r_\alpha} = ia(\zeta^* - \zeta) \quad , \tag{3.26}
$$

$$
m\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s v_s^{(\alpha)} + \rho_n v_n^{(\alpha)}) = \sum_\beta \frac{\partial}{\partial r_\beta}\Big\{\delta_{\alpha\beta}\big[-\mathcal{P} + C_1 \operatorname{div}\vec{v}_s + C_2 \operatorname{div}\vec{v}_n + C_5 \eta + C_5^* \eta^*\big] -
$$
$$
- m\rho_s v_s^{(\alpha)} v_s^{(\beta)} - m\rho_n v_n^{(\alpha)} v_n^{(\beta)} + C_3\Big(\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial r_\beta} + \frac{\partial v_s^{(\beta)}}{\partial r_\alpha}\Big) + C_4\Big(\frac{\partial v_n^{(\alpha)}}{\partial r_\beta} + \frac{\partial v_n^{(\beta)}}{\partial r_\alpha}\Big)\Big\} +
$$
$$
+ iam(\zeta^* - \zeta)v_s^{(\alpha)} + (\zeta^* + \zeta)\frac{\partial a}{\partial r_\alpha} \quad , \tag{3.27}
$$

$$
m\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\Big[\Lambda(\rho, \theta, \mu) + \frac{m v_s^2}{2} - \frac{m}{2}(v_s - v_n)^2\Big] +
$$
$$
+ \Big[B_1 \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\operatorname{div}\vec{v}_s + B_2 \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\operatorname{div}\vec{v}_n + b_1 \frac{\partial \eta}{\partial r_\alpha} + b_1^* \frac{\partial \eta^*}{\partial r_\alpha}\Big] -
$$
$$
- \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\Big(\frac{\zeta^* + \zeta}{2a}\Big) \quad , \tag{3.28}
$$

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t}+\sum_\beta\frac{\partial(\rho v_n^{(\beta)}S)}{\partial r_\beta}=\frac{1}{\theta}\Big[\mathcal{D}_1\Delta\rho+\mathcal{D}_2\Delta\theta+$$
$$+ia(\mathcal{J}^*-\mathcal{J})\left(-B_1\operatorname{div}\vec v_s-B_2\operatorname{div}\vec v_n-b_1\eta-b_1^*\eta^*-\frac{\mathcal{J}^*+\mathcal{J}}{2a}\right)+$$
$$+(\mathcal{J}^*+\mathcal{J})\frac{(\eta^*-\eta)}{2a}+\frac{1}{2}(\mathcal{J}^*+\mathcal{J})\vec v_s\nabla a\Big]. \qquad (3.29)$$

В формулах (3,26), (3,27)

$$\vec j=(\rho_s\vec v_s+\rho_n\vec v_n). \qquad (3.30)$$

§ 4. Уравнения гидродинамики для сверхтекучей жидкости с учётом вязкости в акустическом приближении

Рассмотрим теперь с помощью (3.26)-(3.29) случай бесконечно малого отклонения от статистического равновесия покоящейся жидкости.

Положим

$$\rho=\rho^\circ+\delta\rho,\ S=S^\circ+\delta S,\ \theta=\theta^\circ+\delta\theta,\ \vec v_s=\delta\vec v_s,$$
$$\vec v_n=\delta\vec v_n,\ \eta=\delta\eta.$$

Тогда с точностью до величины второго порядка малости

$$\eta=\mathcal{J}.$$

Мы переходим, таким образом, от уравнений гидродинамики к линеаризованным "акустическим уравнениям". Это означает, что в уравнениях (3.26)-(3.29) мы пренебрегаем членами пропорциональными $\vec v_s^{\,2}$, $\vec v_n^{\,2}$, $\vec v_s\vec v_n$, $\mathcal{J}^2$ и величиной $\mathcal{J}$, умноженной на градиенты.

Надо подчеркнуть, что "акустическое" приближение является приближением совсем другого рода, чем разложение по малому параметру, которое ведёт к гидродинамике идеальной или вязкой жидкости. Акустическое приближение состоит в линеаризации полученных уравнений и может быть применено как к уравнениям идеальной жидкости, так и к уравнениям вязкой жидкости.

Принимая во внимание, что $\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial r_\beta} = \frac{\partial v_s^{(\beta)}}{\partial r_\alpha}$, получаем линеаризованные уравнения вязкой бозе-жидкости в виде (верхний индекс у ρ, θ, S опускается):

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_s \operatorname{div}\vec{v}_s + \rho_n \operatorname{div}\vec{v}_n = i\sqrt{\rho_0}\,(\eta^* - \eta), \tag{4.1}$$

$$m\rho_s \frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t} + m\rho_n \frac{\partial v_n^{(\alpha)}}{\partial t} = -\frac{\partial \delta P}{\partial r_\alpha} + C_1 \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\operatorname{div}\vec{v}_s + C_2 \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\operatorname{div}\vec{v}_n +$$
$$+ 2C_3 \Delta v_s^{(\alpha)} + C_4 \sum_\beta \frac{\partial}{\partial r_\beta}\left(\frac{\partial v_n^{(\alpha)}}{\partial r_\beta} + \frac{\partial v_n^{(\beta)}}{\partial r_\alpha}\right) +$$
$$+ C_5 \frac{\partial \eta}{\partial r_\alpha} + C_5^* \frac{\partial \eta^*}{\partial r_\alpha}, \tag{4.2}$$

$$m\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t} = -\frac{\partial \Omega}{\partial r_\alpha} + B_1 \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\operatorname{div}\vec{v}_s + B_2 \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\operatorname{div}\vec{v}_n +$$
$$+ B_3 \frac{\partial \eta}{\partial r_\alpha} + B_3^* \frac{\partial \eta^*}{\partial r_\alpha}, \tag{4.3}$$

$$\varrho\frac{\partial\delta S}{\partial t}+S\frac{\partial\delta\varrho}{\partial t}+\varrho S\,\mathrm{div}\,\vec{v}_n=$$

$$=\frac{1}{\theta}\left(\mathcal{D}_1\Delta\delta\varrho+\mathcal{D}_2\Delta\delta\theta\right); \qquad (4.4)$$

здесь

$$B_3=b_1+\frac{1}{2a}, \quad B_3^*=b_1^*+\frac{1}{2a}, \quad a\cong\sqrt{\varrho_0},$$

$$\delta\Lambda=\frac{\partial\Lambda}{\partial\varrho}\delta\varrho+\frac{\partial\Lambda}{\partial\theta}\delta\theta=-S\delta\theta+\frac{1}{\varrho}\delta\mathcal{P},$$

$$\mathcal{P}=\varrho^2\frac{\partial F(\varrho,\theta,u)}{\partial\varrho}, \quad \Lambda=F+\varrho\frac{\partial F(\varrho,\theta,u)}{\partial\varrho}, \quad S=-\frac{\partial F}{\partial\theta},$$

$$\mathcal{E}=F(\varrho,\theta,u)-\theta\frac{\partial F(\varrho,\theta,u)}{\partial\theta}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\varrho=\frac{\theta}{c_v}, \qquad (4.5)$$

где ϱ_0 плотность в состоянии статистического равновесия.

Уравнения (4.I) - (4.4) в случае, когда $\eta=0$ были получены И.М. Халатниковым[7], исходя из феноменологических соображений. В полученные нами уравнения акустического приближения для вязкой жидкости входит десять коэффициентов, причем два из них комплексные, то есть практически двенадцать коэффициентов. Чтобы получить некоторые связи между ними, рассмотрим случай статистического равновесия, когда η является данной функцией $\vec{r}$

$$\eta=\eta(r), \quad \varrho=\varrho(r), \quad \theta=\mathrm{const}, \quad \vec{v}_s=\vec{v}_s(r), \quad \vec{v}_n=0 .$$

Тогда (4.I)-(4.4) (после учёта в (4.3) соотношения (4.5)) переходят в уравнения

$$\varrho_s\,\mathrm{div}\,\vec{v}_s=i\sqrt{\varrho_0}\left(\eta^*-\eta\right), \qquad (4.\mathrm{Ia})$$

$$-\frac{\partial \delta \varphi}{\partial r_\alpha} + C_1 \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \operatorname{div} \vec{v}_s + C_5 \frac{\partial \eta}{\partial r_\alpha} + C_5^* \frac{\partial \eta^*}{\partial r_\alpha} + C_3 \Delta v_s^{(\alpha)} = 0, \tag{4.2a}$$

$$-\frac{\partial \delta \varphi}{\partial r_\alpha} + \rho B_1 \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \operatorname{div} \vec{v}_s + \rho B_3 \frac{\partial \eta}{\partial r_\alpha} + \rho B_3^* \frac{\partial \eta^*}{\partial r_\alpha} = 0, \tag{4.3a}$$

$$\mathcal{D}_1 \Delta \rho = 0. \tag{4.4a}$$

Сравнивая (4.2а) с (4.3а) , получаем

$$C_1 = \rho B_1, \quad C_5 = \rho B_3, \quad C_5^* = \rho B_3^*, \quad C_3 = 0. \tag{4.6}$$

Из (4.4а) следует, что в нашем приближении

$$\mathcal{D}_1 = 0. \tag{4.7}$$

Следовательно, из двенадцати коэффициентов, описывающих вязкую бозе-жидкость, остаётся семь. Если теперь учесть (4.6) и (4.7), тогда уравнения (4.I)- (4.4) принимают окончательный вид:

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_s \operatorname{div} \vec{v}_s + \rho_n \operatorname{div} \vec{v}_n = i \sqrt{\rho_0} (\eta^* - \eta), \tag{4.8}$$

$$m \rho_s \frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t} + m \rho_n \frac{\partial v_n^{(\alpha)}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)_\rho \frac{\partial \delta \theta}{\partial r_\alpha} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)_\theta \frac{\partial \delta \rho}{\partial r_\alpha} +$$

$$+ \rho B_1 \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \operatorname{div} \vec{v}_s + (C_2 + C_4) \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \operatorname{div} \vec{v}_n + C_4 \Delta v_n^{(\alpha)} +$$

$$+ \rho B_3 \frac{\partial \eta}{\partial r_\alpha} + \rho B_3^* \frac{\partial \eta^*}{\partial r_\alpha}, \tag{4.9}$$

$$m\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t}=\left[S-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right)_\rho\right]\frac{\partial \delta\theta}{\partial r_\alpha}-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_\theta\frac{\partial \delta\rho}{\partial r_\alpha}+$$

$$+B_1\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\operatorname{div}\vec{v}_s+B_2\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\operatorname{div}\vec{v}_n+B_3\frac{\partial \eta}{\partial r_\alpha}+B_3^*\frac{\partial \eta^*}{\partial r_\alpha}, \tag{4.10}$$

$$\rho\frac{\partial \delta S}{\partial t}+S\frac{\partial \delta\rho}{\partial t}+\rho S\operatorname{div}\vec{v}_n=\frac{1}{\theta}\mathcal{D}_2\Delta\delta\theta. \tag{4.11}$$

§ 5. Решение уравнений в акустическом приближении и вычисление функции Грина

Задачей этого параграфа является выражение $v_s^{(\alpha)}(t,r)$ $(\alpha=1,2,3)$ через фурье-компоненты функции Грина на основе § 2 и вычисление $v_s^{(\alpha)}$ из (4.8)- (4.II).

Вариацию гамильтониана (I.I)

$$\delta H_\tau=\int\left\{\psi(\tau,r')\eta^*(\tau,r')+\psi^+(\tau,r')\eta(\tau,r')\right\}d\vec{r}\,' \tag{5.1}$$

включаем адиабатически, для чего необходимо положить

$$\eta(\tau,r')=e^{-i\omega\tau+\varepsilon\tau+i\vec{k}\vec{r}\,'}\eta_k+e^{i\omega\tau+\varepsilon\tau-i\vec{k}\vec{r}\,'}\eta_{-k},$$

$$\eta^*(\tau,r')=e^{-i\omega\tau+\varepsilon\tau+i\vec{k}\vec{r}\,'}\eta_{-k}^*+e^{i\omega\tau+\varepsilon\tau-i\vec{k}\vec{r}\,'}\eta_k^*, \tag{5.2}$$

где $\varepsilon>0$, $\varepsilon\to 0$. Из этого следует наличие в (2.I4) одной лишь частоты: $\Omega=\pm\omega$.

Поэтому

$$\delta H_\tau=e^{-i\omega\tau+\varepsilon\tau}V_\omega+e^{i\omega\tau+\varepsilon\tau}V_{-\omega}, \tag{5.3}$$

где
$$V_{+\omega}=\int e^{i\vec{k}\vec{r}'}\left[\psi(\tau,\vec{r}')\eta^*_{-k}+\psi^+(\tau,\vec{r}')\eta_k\right]d\vec{r}',$$

$$V_{-\omega}=\int e^{-i\vec{k}\vec{r}'}\left[\psi(\tau,\vec{r}')\eta^*_{k}+\psi^+(\tau,\vec{r}')\eta_{-k}\right]d\vec{r}'. \qquad (5.4)$$

Рассмотрим вариацию $\delta\langle\psi(t,r)\rangle$. Используя (2.17) и (5.4) получаем

$$\delta\langle\psi(t,r)\rangle=\delta\varphi(t,r)=\int e^{i\vec{k}\vec{r}'}d\vec{r}'\Big\{\int\Big[\langle\langle\psi(t,r);\psi(\tau,r')\rangle\rangle^r\eta^*_{-k}+$$
$$+\langle\langle\psi(t,r);\psi^+(\tau,r')\rangle\rangle^r\eta_k\Big]\,e^{-i\omega\tau+\varepsilon\tau}d\tau\Big\}+$$
$$+\int e^{-i\vec{k}\vec{r}'}d\vec{r}'\Big\{\int\Big[\langle\langle\psi(t,r);\psi(\tau,r')\rangle\rangle^r\eta^*_k+\langle\langle\psi(t,r);\psi^+(\tau,r')\rangle\rangle^r\eta_{-k}\Big]e^{i\omega\tau+\varepsilon\tau}d\tau\Big\}=$$
$$=e^{-i\omega t+\varepsilon t}\,2\pi\int e^{i\vec{k}\vec{r}'}\Big[\langle\langle\psi(r);\psi(r')\rangle\rangle^r_{\omega+i\varepsilon}\eta^*_{-k}+\langle\langle\psi(r);\psi^+(r')\rangle\rangle^r_{\omega+i\varepsilon}\eta_k\Big]d\vec{r}'+$$
$$+e^{i\omega t+\varepsilon t}\,2\pi\int e^{-i\vec{k}\vec{r}'}\Big[\langle\langle\psi(r);\psi(r')\rangle\rangle^r_{\omega-i\varepsilon}\eta^*_k+\langle\langle\psi(r);\psi^+(r')\rangle\rangle^r_{\omega-i\varepsilon}\eta_{-k}\Big]d\vec{r}'.$$

(5.5)

Если положить

$$\delta\varphi(t,r)=e^{-i\omega t+\varepsilon\tau+i\vec{k}\vec{r}}\delta\varphi_k+e^{i\omega t+\varepsilon t-i\vec{k}\vec{r}}\delta\varphi_{-k},$$
$$\delta\varphi(t,r)=e^{-i\omega t+\varepsilon\tau+i\vec{k}\vec{r}}\delta\varphi^*_{-k}+e^{i\omega t+\varepsilon t-i\vec{k}\vec{r}}\delta\varphi^*_k, \qquad (5.6)$$

то

$$\delta\varphi_k = 2\pi\left\{\langle\langle a_k; a_{-k}\rangle\rangle_E^r \eta^*_{-k} + \langle\langle a_k; a_k^+\rangle\rangle_E^r \eta_k\right\},$$

$$\delta\varphi^*_{-k} = 2\pi\left\{\langle\langle a^+_{-k}; a_{-k}\rangle\rangle_E^r \eta^*_{-k} + \langle\langle a^+_{-k}; a^+_k\rangle\rangle_E^r \eta_k\right\}, \tag{5.7}$$

где $\langle\langle a_q; a_{-q}\rangle\rangle_E^r$ и т.д. обозначают фурье-компоненты соответствующих запаздывающих функций Грина, например,

$$\langle\langle \psi(r); \psi(r')\rangle\rangle_E^r = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \langle\langle a_q; a_{-q}\rangle\rangle_E^r e^{i\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}')} d\vec{q}\,. \tag{5.8}$$

На основе равенств

$$v_s^{(\alpha)}(t,r) = \frac{i}{2m\sqrt{\rho_0}}\left(\frac{\partial\,\delta\varphi^*(t,r)}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial\,\delta\varphi(t,r)}{\partial r_\alpha}\right),$$

$$\delta a = \frac{1}{2}\left[\delta\varphi^*(t,r) + \delta\varphi(t,r)\right] \tag{5.9}$$

в работе [1] получены формулы, связывающие гидродинамические величины, найденные из уравнений (4.I)-(4.4), с функциями Грина

$$\sum_{(\alpha)} k^{(\alpha)} v_s^{(\alpha)}(k) = \frac{\pi}{m\sqrt{\rho_0}} k^2 \left\{\langle\langle a_k - a^+_{-k}; a_{-k}\rangle\rangle_E^r \eta^*_{-k} + \langle\langle a_k - a^+_{-k}; a^+_k\rangle\rangle_E^r \eta_k\right\}, \tag{5.10a}$$

$$\delta a_k = \pi\left\{\langle\langle a_k + a^+_{-k}; a_{-k}\rangle\rangle_E^r \eta^*_{-k} + \langle\langle a_k + a^+_{-k}; a^+_k\rangle\rangle_E^r \eta_k\right\}. \tag{5.10в}$$

Из (5.I0a) видно, что если из уравнений (4.8)-(4.II) мы найдем $\sum_\alpha k^{(\alpha)} v_s^{(\alpha)}(k)$, как функцию η_k, η^*_{-k}, то, подставляя затем результат (5.I0a) и сравнивая коэффициенты при η_k, η^*_{-k}, найдем тем самым выражения для соответствующих фурье-компонент запаздывающих функций Грина. Теперь напишем уравнения (4.8)-(4.II) в фурье-компонентах

$$-E\delta\rho(k) + \rho_s \sum_\beta k^{(\beta)} v_s^{(\beta)}(k) + \rho_n \sum_\beta k^{(\beta)} v_n^{(\beta)}(k) = \sqrt{\rho_0}\,(\eta_{-k}^{*} - \eta_k), \tag{5.II}$$

$$Em\left[\rho_s v_s^{(\alpha)}(k) + \rho_n v_n^{(\alpha)}(k)\right] = k^{(\alpha)}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_\theta \delta\rho(k) + \left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right)_\rho \delta\theta(k)\right] -$$
$$- i C_4 k^2 v_n^{(\alpha)}(k) - i\rho B_1 k^{(\alpha)} \sum_\beta k^{(\beta)} v_s^{(\beta)}(k) - i(C_2 + C_4) k^{(\alpha)} \sum_\beta k^{(\beta)} v_n^{(\beta)}(k) -$$
$$- \rho k^{(\alpha)} (B_3 \eta_k + B_3^{*} \eta_{-k}^{*}), \tag{5.I2}$$

$$E\left\{\left[\rho\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)_\theta + S\right]\delta\rho(k) + \left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)_\rho \delta\theta(k)\right\} = \rho S \sum_\beta k^{(\beta)} v_n^{(\beta)}(k) -$$
$$- i\frac{\mathcal{D}_2}{\theta} k^2 \delta\theta(k), \tag{5.I3}$$

$$E m v_s^{(\alpha)}(k) = k^{(\alpha)}\left\{\left[-S + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right)_\rho\right]\delta\theta(k) + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_\theta \delta\rho(k)\right\} -$$
$$- iB_1 k^{(\alpha)} \sum_\beta k^{(\beta)} v_s^{(\beta)}(k) - iB_2 k^{(\alpha)} \sum_\beta k^{(\beta)} v_n^{(\beta)}(k) - k^{(\alpha)}(B_3 \eta_k + B_3^{*} \eta_{-k}^{*}). \tag{5.I4}$$

Умножая (5.I2) и (5.I4) на $k^{(\alpha)}$ и суммируя по α, после введения обозначений

$$\sum_\beta k^{(\beta)} v_s^{(\beta)} = X, \quad \sum_\beta k^{(\beta)} v_n^{(\beta)} = Y$$

систему уравнений (5,11)-(5,14) можем написать в виде:

$$\rho_s X + \rho_n Y - E\delta\rho + 0\cdot\delta\theta = \sqrt{\rho_0}\,(\eta_{-k}^{*} - \eta_k), \tag{5.I5}$$

$$(Em\rho_s + i\rho B_1 k^2)X + (Em\rho_n + i(C_2+2C_4)k^2)Y -$$
$$-k^2\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_\theta \delta\rho - k^2\left(\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)_\rho \delta\theta = -\rho k^2(B_3\eta_k + B_3^*\eta_{-k}^*), \tag{5.16}$$

$$(Em\rho + i\rho B_1 k^2)X + i\rho B_2 k^2 Y - k^2\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_\theta \delta\rho + k^2\left[\rho S - \left(\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)_\rho\right]\delta\theta =$$
$$= -k^2\rho\,(B_3\eta_k + B_3^*\eta_{-k}^*), \tag{5.17}$$

$$0.X - \rho S Y + E\left(\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta + S\right)\delta\rho + \left[E\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho + i\frac{\mathcal{D}_2}{\theta}k^2\right]\delta\theta = 0. \tag{5.18}$$

Мы получим, таким образом, систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Отсюда мы можем прямо найти $X = \sum_\alpha k^{(\alpha)} v_s^{(\alpha)}$ как функцию η_k, η_{-k}^+ и использовать формулу (5.10). Если детерминант системы уравнений (5.15) -(5.18) обозначим через $\mathcal{D}(E)$, а детерминант, в котором первый столбец заменяется правой стороной уравнений (5.15)-(5.18), - через $\mathcal{D}_X$, то

$$X = \sum_\alpha k^{(\alpha)} v_s^{(\alpha)}(k) = \frac{\mathcal{D}_X}{\mathcal{D}(E)}. \tag{5.19}$$

Рассмотрим сначала два предельных случая, а затем общий.

a) $E = 0$.

Тогда

$$X = \frac{\sqrt{\rho_0}\,(\eta_{-k}^* - \eta_k)}{\rho_s}. \tag{5.20}$$

Этот результат точно совпадает с результатом, полученным в /I/ для случая идеальной жидкости и тогда

$$\langle\langle a_k ; a_{-k} \rangle\rangle^r_{E=0} = \frac{1}{k^2} \frac{m\rho_0}{2\pi\rho_s} ,$$

$$\langle\langle a_k ; a_k^+ \rangle\rangle^r_{E=0} = -\frac{1}{k^2} \frac{m\rho_0}{2\pi\rho_s} \tag{5.21}$$

приводит к " теореме о $1/k^2$ " (особенность типа $1/k^2$ в окрестности $k \sim 0$ /2/).

в) $\theta = 0$.

Тогда $\rho_s = \rho$, $\rho_n = 0$, $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} = 0$. (Необходимо отметить, что уравнения гидродинамики при $\theta = 0$, могут иметь только формальный смысл, так как времена релаксации становятся очень большими. Мы рассмотрим этот случай формально, чтобы посмотреть, что дают наши формулы в пределе при $\theta \to 0$). В этом случае

$$\mathcal{D}_X = k^2 \left[E m\rho + i(C_{24} - \rho B_2)k^2\right]\left[(mc^2\sqrt{\rho_0} - E\rho B_3)\eta_k - \right.$$
$$\left. -(mc^2\sqrt{\rho_0} + E\rho B_3^*)\eta^*_{-k}\right] , \tag{5.22а}$$

$$\mathcal{D}(E) = m^2\rho^2\left[E^3 + iA_2k^2E^2 - A_1k^2E - iA_0k^4\right] , \tag{5.22в}$$

где

$$A_2 = \frac{1}{m\rho}\left[\rho(B_1 - B_2) + C_{24}\right] , \quad A_1 = c^2 + \frac{B_1}{m^2\rho}(C_{24} - \rho B_2)k^2 \approx c^2 ,$$

$$A_0 = \frac{1}{m\rho}c^2(C_{24} - \rho B_2) , \quad c^2 = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_{\theta=0} , \quad C_{24} = C_2 + 2C_4 . \tag{5.23}$$

Из уравнения (5.22в) видно, что уравнение $\mathcal{D}(E) = 0$ имеет комплексные корни. Их действительная часть очень близка к корням, полученным в [I] для случая идеальной жидкости

$$E^{+} = ck = \omega_0 \quad , \quad E^{-} = -ck = -\omega_0 \tag{5.24}$$

Исходя из этих корней как первого приближения решения уравнения (полученного из требования обращения в нуль величины (5.22в)), получаем по методу Ньютона поправку (нас интересует только мнимая часть) ;

$$\mathcal{I}m\, \delta^{\pm} = -\mathcal{I}m \frac{\mathcal{D}(E^{\pm})}{\mathcal{D}'(E^{\pm})} = -\frac{B_1}{2m} k^2 = -\varepsilon < 0 \, . \tag{5.25}$$

Третий корень, чисто мнимый, равен

$$E_3 = -i \frac{1}{m\rho}\left(C_{24} - \rho B_2\right) k^2 = -i\, \varepsilon_3 \tag{5.26}$$

Чтобы он приводил к затуханию, ε_3 должно быть больше нуля, а значит, $C_{24} > \rho B_2$. Тогда знаменатель (5.22в) функции Грина имеет вид ;

$$\mathcal{D}(E) = m^2 \rho^2 (\omega + i\varepsilon - \omega_0)(\omega + i\varepsilon + \omega_0)(\omega + i\varepsilon_3) \, . \tag{5.27}$$

Из (5.25) видно, что в рассмотренном предельном случае появляется затухание колебаний с частотой $\omega_0 = ck$

с) Общий случай

Для идеальной жидкости в работе [I] получено:

$$\mathcal{D}_0(E) = \mathcal{B}\left[E^4 - (c_0^2 + c_1^2)k^2 E^2 + c_0^2 c_1^2 k^4\right] =$$
$$= (E^2 - c_0^2 k^2)(E^2 - c_1^2 k^2) = (\omega^2 - c_0^2 k^2)(\omega^2 - c_1^2 k^2) \ , \qquad (5.28)$$

где

$$c_{0,1}^2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)_S + \frac{1}{2}\,\frac{S^2 \rho_s \theta}{m \rho_n c_v} \pm$$
$$\pm \sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)_S + \frac{S^2 \rho_s \theta}{m \rho_n c_v}\right]^2 - \frac{1}{m}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)_\theta \frac{S^2 \rho_s \theta}{m \rho_n c_v}} \ , \qquad (5.29)$$

$$c_v = \theta\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_\rho \ , \qquad \mathcal{B} = m^2 \rho^2 \rho_n \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_\rho \ .$$

c_0 - (знак +) скорость, связанная с обычной скоростью звука. Она стремится к ней как при $\rho_s \to 0$, так и при $\theta \to 0$. Величина c_1 (знак -)-специфическая для сверхтекучей жидкости скорость "второго звука".

В случае рассматриваемой нами вязкой жидкости

$$\mathcal{D}(E) \cong \mathcal{B}\left[E^4 + i A_3 k^2 E^3 - (c_0^2 + c_1^2) k^2 E^2 + i A_1 k^4 E + c_0^2 c_1^2 k^4\right], \qquad (5.30)$$

где

$$A_3 = \frac{1}{m \rho_n} C_{24} + \frac{\rho_n B_1 - \rho_s B_2}{m \rho_n} + \frac{\mathcal{D}_2}{\rho c_v} \ , \qquad (5.31a)$$

$$A_1 = -\left\{\frac{\rho_s}{m^2\rho\rho_n}\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_S (C_{24} - \rho B_2) + \left[\frac{\rho_s S^2}{m^2\rho\rho_n}\left(C_{24} + \rho B_1\right) + \frac{1}{m\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_\theta \frac{\mathcal{D}_2}{\theta}\right]\frac{\theta}{C_v} - \right.$$

$$\left. - \frac{S}{m^2\rho^2\rho_n}\left[2\rho_s C_{24} - \rho(\rho_s B_2 + \rho_n B_1)\right]\left(\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)_\rho \Big/ \left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho \right\} . \qquad (5.31\text{в})$$

При получении (5.3Iв) мы использовали соотношение

$$\rho^2\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta = -\left(\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)_\rho ,$$

которое следует из (4.5).

Выражение для $\mathcal{D}(E)$ написано приближенно в том смысле, что мы не учитываем изменения коэффициентов, стоящих при E^4, E^2, E^0 . Изменение возникает вследствие появления в уравнениях (5.I5)-(5.I8) новых по сравнению со случаем идеальной жидкости членов. Если считать, что в случае идеальной жидкости получение двух скоростей звука соответствует проблеме колебаний, вынужденных $\delta H_\tau(\omega)$, без учёта трения (затухания), то случай вязкой жидкости соответствует проблеме вынужденных колебаний с учётом "трения". Поэтому нас интересует прежде всего коэффициент затухания, а не небольшое изменение частот колебаний (к которому приводит изменение коэффицентов при E^4, E^2, E^0).Из (5.30) видно, что уравнение

$$\mathcal{D}(E) = 0 \qquad (5.30\text{a})$$

будет иметь комплексные корни. Их действительная часть должна быть очень близка к корням (5.28) (мы принимаем, что она им равна)

$$E_0^+ = \omega_0^+ = c_0 k = \omega_0 \quad , \qquad E_1^+ = \omega_1^+ = c_1 k = \omega_1 \quad ,$$

$$E_0^- = \omega_0^- = -c_0 k = -\omega_0 \quad , \qquad E_1^- = \omega_1^- = -c_1 k = -\omega_1 \quad ,$$

$$(5.32)$$

а мнимая часть мала. Тогда, исходя из корней (5.32) как первого приближения решения уравнения (5.30а), получаем по методу Ньютона поправку (нас интересует только мнимая часть) :

$$\operatorname{Im} \delta_\alpha^{(\pm)} = -\operatorname{Im} \frac{\mathcal{D}(E_\alpha^\pm)}{\mathcal{D}'(E_\alpha^\pm)} \quad , \quad \alpha = 0, 1 \,. \qquad (5.33)$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{Im} \delta_0^\pm = -\frac{A_3 c_0^2 + A_1}{2(c_0^2 - c_1^2)} k^2 = -\varepsilon_0 \quad ,$$

$$\operatorname{Im} \delta_1^\pm = \frac{A_3 c_1^2 + A_1}{2(c_0^2 - c_1^2)} k^2 = -\varepsilon_1 \quad , \qquad (5.34)$$

где A_1 , A_3 даны формулой (5.31а,в), а c_0 , c_1 – формулой (5.29)
Из (5.29) следует, что $c_0^2 - c_1^2 > 0$, так, что знак δ_α зависит от знака числителя.

Формулы (5.34) соответствуют теоретической бозе- жидкости. Чтобы определить знак δ_α используем свойства реальной бозе--жидкости, гелия П. Последний член формулы (5.31в) пропорционален

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right)_\rho \Big/ \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_\rho = \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_\rho \sim \sqrt{c_p - c_v} \simeq 0 \quad . \qquad (5.35)$$

Из (5.35) следует, что

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_\theta - \left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)_\theta \left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right)_\rho \Big/ \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_\rho \cong \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_\theta \quad . \qquad (5.36)$$

Учитывая (5.36) в (5.29), получим :

$$c_0^2 \approx \frac{1}{m}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \quad , \quad c_1^2 \approx \frac{S^2 \rho_s \Theta}{m \rho_n c_v} \quad . \tag{5.37}$$

Формула (5.3Iв) упрощается, если использовать (5.37) и неравенство $C_0 \gg C_1$ справедливо для гелия II.

Между коэффицентами второй вязкости И.М. Халатниковым [7] найдена добавочная связь, которую в наших обозначениях можно записать

$$\rho_s B_2 = C_1 - \rho_s B_1 \; . \tag{5.38}$$

Рассматривая случай статистического равновесия, мы получим в § 4, что $C_1 = \rho B_1$ (формулы (4.6)). Тогда из четырех коэффицентов второй вязкости только два независимы. Из (4.6) и (5.38) вытекает

$$\rho_n B_1 = \rho_s B_2 \tag{5.39}$$

Мы приходим к выводу, что вязкая сверхтекучая жидкость описывается шестью коэффициентами. Применение (5.39) упрощает формулу (5.3Iа).

После учёта свойств гелия II для коэффициентов A_3, A_I, заданные формулой (5.3Iа,в), получаем следующие выражения:

$$A_3 = \frac{1}{m\rho_n}\dot{C}_{24} + \frac{\mathcal{D}_2}{\rho C_v},$$

$$A_1 = -\left\{\frac{\rho_s}{m\rho_n}(C_{24}-\rho B_2) + \frac{\mathcal{D}_2}{\rho C_v}\right\} C_0^2 \qquad (5.40)$$

Тогда

$$\operatorname{Im}\delta_0^{\pm} = -\frac{1}{2}\left(A_3 + \frac{A_1}{C_0^2}\right)k^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m\rho}C_{24} + \frac{1}{m}B_1\right]k^2 = -\varepsilon_0 < 0,$$

$$\operatorname{Im}\delta_1^{\pm} = \frac{1}{2}\frac{A_1}{C_0^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\rho_s}{m\rho_n}(C_{24}-\rho B_2) + \frac{\mathcal{D}_2}{\rho C_v}\right]k^2 = -\varepsilon_1 < 0. \qquad (5.41)$$

Пользуясь (5.34) или в частном случае (5.41), можно написать

$$\mathcal{D}(E) = B(\omega+i\varepsilon_0-\omega_0)(\omega+i\varepsilon+\omega_0)(\omega+i\varepsilon_1-\omega_1)(\omega+i\varepsilon_1+\omega_1) \cong$$

$$\cong (\omega^2-\omega_0^2+2i\omega\varepsilon_0)(\omega^2-\omega_1^2+2i\omega\varepsilon_1) \qquad (5.42)$$

Вычисляя $\mathcal{D}_X$ в самом низшем порядке по k, получаем, что

$$\sum_\alpha k^{(\alpha)} v_s^{(\alpha)} = \frac{k^2\left[\Delta(k,E)\sqrt{\rho_0} + \Delta_1(k,E)B_3^*\right]}{m(\omega^2-\omega_0^2+2i\omega\varepsilon_0)(\omega^2-\omega_1^2+2i\omega\varepsilon_1)}\eta^*_{-k} -$$

$$-\frac{k^2\left[\Delta(k,E)\sqrt{\rho_0} - \Delta_1(k,E)B_3\right]}{m(\omega^2-\omega_1^2+2i\omega\varepsilon_0)(\omega^2-\omega_1^2+2i\omega\varepsilon_1}\eta_k, \qquad (5.43)$$

где

$$\Delta(k,E) = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)_\theta k^2\frac{S^2\theta}{\rho_n C_v} - E^2\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)_S - \left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho S)\right)_\theta\frac{\theta}{\rho C_v}\right],$$

$$\Delta_1(k,E) = -E^3 + Ek^2 S\left(\varrho\left(\frac{\partial S}{\partial \varrho}\right)_\theta - S\,\frac{\varrho_s}{\varrho_n}\right)\frac{\theta}{c_v} \quad . \tag{5.44}$$

Как видно, при малых k $\Delta \sim k^2$, $\Delta_1 \sim k^3$, поэтому мы можем пренебречь Δ_1 по сравнению с Δ .

В работе/I/ показано, что

$$\langle\langle a_k ; a_{-k} \rangle\rangle^r_{E=0} = -\langle\langle a^+_{-k} ; a_{-k} \rangle\rangle^r_{E=0} ,$$

$$\langle\langle a_k ; a^+_k \rangle\rangle^r_{E=0} = -\langle\langle a^+_{-k} , a^+_k \rangle\rangle^r_{E=0} \quad . \tag{5.45}$$

Следуя этой работе, мы принимаем, что равенства (5.45) имеют место в низшем порядке и в нашем случае. Тогда из (5.I0), (5.43) и (5.45) получаем для фурье-компонент запаздывающих функций Грина

$$\langle\langle a_k ; a_{-k} \rangle\rangle^r_{\omega+i\varepsilon} \approx \frac{\Delta(k,E)\varrho_0}{4\pi\omega_0\omega_1(\omega+2i\varepsilon_0-\omega_0)(\omega+2i\varepsilon_1-\omega_1)} ,$$

$$\langle\langle a_k ; a^+_k \rangle\rangle_{\omega+i\varepsilon} \approx -\frac{\Delta(k,E)\varrho_0}{4\pi\omega_0\omega_1(\omega+2i\varepsilon_0-\omega_0)(\omega+2i\varepsilon_1-\omega_1)} . \tag{5.46}$$

Из формул (5.46), (5.33), (5.34), (5.4I) видно, что при рассмотрении сверхтекучей жидкости с учётом вязкости появляется затухание колебаний δH_τ (поглощение первого и второго звука). Мнимые части корней запаздывающих функций Грина дают коэффиценты поглощения первого и второго звука в сверхтекучей бозе-системе. Они зависят от коэффицентов обычной и второй вязкости и от коэффициента теплопроводности. В связи с получением нами членов затухания, которые выражаются через кинетические коэффициенты, заметим следующее.

В случае, когда взаимодействие между частицами $\Phi(R)$ пропорционально некоторому малому параметру ε, основной член кинетического уравнения (отвечающий за соударения) порядка ε^2. Отсюда следует, что кинетические коэффиценты ,выступающие в дальнейших членах уравнения, будут величинами порядка $1/\varepsilon^2$. Поэтому выражения для рассматриваемых функций Грина G и их массовых операторов G^{-1}, очевидно, не будут аналитичными функциями ε в окрестности $\varepsilon=0$, поэтому использование для их вычисления обычных методов теории возмущения может вызвать серьёзные сомнения.

Автор выражает глубокую благодарность акад. Н.Н. Боголюбову за предложение темы настоящей работы и за многочисленные дискуссии в процессе работы.

Литература

I. Н.Н. Боголюбов, К вопросу о гидродинамике сверхтекучей жидкости . Препринт ОИЯИ, Дубна, (I96I).

2. Н.Н. Боголюбов. Квазисредние в задачах статистической механики. Препринт ОИЯИ, Дубна, I96I .

3. Kadanoff L.P. and Martin P.C. Ann.Phys. (N.Y.), 24 , 419 (1963).

4. Д.Н. Зубарев, УФН, 7I, 7I (I960).

5. Chapman S. and Cowling T.G. The Mathematical Theory of Non-uniform Gases, Cambridge at the University Press (1952).
Русский перевод, И.Л., Москва, I960.

6. Н.Н. Боголюбов. Проблемы динамической теории в статистической физике. Гостехиздат, М.-Л., I946.

7. И.М. Халатников, ЖЭТФ, 20, 243 (I950); 23, 265 (I952).