

С 345

П-38



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

Ю.А. Плис, Л.М. Сороко

Р - 1502

ДЕПОЛЯРИЗАЦИЯ ПРОТОНОВ В ИЗОХРОННЫХ ЦИКЛОТРОНАХ

Результаты данной работы были кратко изложены
на Международной конференции по ускорителям

(Дубна. 1963 г.)

Дубна 1964

Ю.А. Плис, Л.М. Сороко

P-1502

ДЕПОЛЯРИЗАЦИЯ ПРОТОНОВ
В ИЗОХРОННЫХ ЦИКЛОТРОНАХ

Результаты данной работы были кратко изложены
на Международной конференции по ускорителям
(Дубна. 1963 г.)



Дубна 1964

2299/48

Плис Ю.А., Сороко Л.М.

P - 1502

Деполаризация протонов в изохронных циклотронах.

На основании проектной топографии магнитного поля релятивистского циклотрона на энергию 700 MeV произведены расчеты максимальных искажений медвальной поверхности магнитного поля, при которых возможно ускорение поляризованных протонов без существенной деполаризации.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.

Дубна. 1964.

Plis Yu. A., Soroko L. M.

P - 1502

Proton Depolarization in Isochronous Cyclotrons.

Using the design topography of the magnetic field in a 700 MeV relativistic cyclotron, the calculations were made of the median plane distortions of the magnetic field at which it is possible to accelerate polarized protons without an essential depolarization.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna. 1964.

1. В работе^{/1/} рассмотрены эффекты деполяризации протонов и дейтронов в синхротроне Лаборатории ядерных проблем на энергию 680 Мэв. В связи с проблемой создания релятивистского циклотрона весьма интересно знать круг физических задач, которые могут быть изучены на этом ускорителе. В частности, большее значение имеет возможность получения интенсивного пучка первично-поляризованных частиц. С этой целью в настоящей работе рассмотрены основные эффекты деполяризации протонов при ускорении их в релятивистском циклотроне.

2. Исходим из топографии напряженности магнитного поля в медианной плоскости релятивистского циклотрона, которая имеет следующий вид:

$$B_z = B(r) \left[1 + \epsilon(r) \sin\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right) \right], \quad /1/$$

где $B(r) = B_0 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \right]^{-1/2}$, $B_0 = 7900$ эрстед /0,79 тл/,
 $r_0 = 396$ см, /2/

$$\epsilon \approx 0,3 \quad \lambda = 7,7 \text{ см}, \quad N = 8.$$

Энергия частицы и радиус траектории связаны при этом соотношением

$$r = \frac{m \sqrt{\gamma^2 - 1}}{e B_0 \gamma}, \quad /3/$$

где $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$, а v - скорость протона, $c = 1$.

Выразим радиальные и азимутальные составляющие B_ρ и B_θ на высоте z над медианной плоскостью при смещении ρ действительной орбиты относительно равновесной.

$$B_\rho = z \frac{\partial B_z}{\partial r} + z\rho \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} =$$

$$= z \left\{ \frac{dB_z}{dr} \left[1 + \epsilon \sin\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right) \right] + B_z \frac{d\epsilon}{dr} \sin\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right) + B(r) \frac{\epsilon}{\lambda} \cos\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right) \right\} + \quad /4/$$

$$+ z\rho \left\{ \frac{d^2 B_z}{dr^2} \left[1 + \epsilon \sin\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right) \right] + 2 \frac{dB_z}{dr} \frac{d\epsilon}{dr} \sin\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right) + \frac{\epsilon}{\lambda} \cos\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right) \right\} +$$

$$+ [B(r) \frac{d^2 \epsilon}{dr^2} \sin(\frac{r}{\lambda} - N\theta) - B(r) \frac{\epsilon}{\lambda^2} \sin(\frac{r}{\lambda} - N\theta) + 2B(r) \frac{d\epsilon}{dr} \frac{1}{\lambda} \cos(\frac{r}{\lambda} - N\theta)] ; \quad /4/$$

$$B_{\theta} = \frac{z}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + \frac{z\rho}{r} \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial \theta}$$

$$= \frac{z}{r} [-N B(r) \epsilon \cos(\frac{r}{\lambda} - N\theta)] + \frac{z\rho}{r} [-N \frac{dB(r)}{dr} \epsilon \cos(\frac{r}{\lambda} - N\theta) - N B(r) \frac{d\epsilon}{dr} \cos(\frac{r}{\lambda} - N\theta) + N B(r) \frac{\epsilon}{\lambda} \sin(\frac{r}{\lambda} - N\theta)] ; \quad /5/$$

где

$$\frac{dB(r)}{dr} = \frac{B_0}{[1 - (\frac{r}{r_0})^2]^{3/2}} \frac{r}{r_0^2} \quad /6/$$

Величина z в /4/ и /5/ включает значения свободных вертикальных колебаний и отклонения медианной поверхности от плоскости отсчета:

$$z = z_m \cos \omega_m \theta + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell} \cos \ell \theta, \quad /7/$$

где $\omega_m = 0,24\omega_c$, $\omega_c = \frac{eB(r)}{m\gamma}$ циклотронная частота. Для вычисления вектора деполяризации s' воспользуемся выражением типа /III.9/ в работе /1/, - с той только разницей, что теперь необходимо учесть зависимость $B(r)$ от радиуса.

Имеем:

$$s' = -i e^{-i\phi} \int_0^{\theta} e^{i\phi(\theta') + i\theta'} [(1+1,8\gamma) \frac{B_r}{B(r)} - 2,8i \frac{B_{\theta}}{B(r)}] d\theta', \quad /8/$$

где

$$\phi = - \int_0^{\theta} (1+1,8\gamma) [1 + \epsilon(r) \sin(\frac{r}{\lambda} - N\theta')] d\theta', \quad /9/$$

Запишем $e^{i\phi}$ приближенно в виде:

$$e^{i\phi} \approx e^{-i \int_0^{\theta} (1+1,8\gamma) d\theta'} [1 - i \int_0^{\theta} (1+1,8\gamma) \epsilon \sin(\frac{r}{\lambda} - N\theta') d\theta']. \quad /10/$$

Оценим интеграл в квадратных скобках /10/, считая постоянными величины ϵ , $\frac{dy}{d\theta}$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\theta} (1+1,8\gamma) \epsilon \sin(\frac{r}{\lambda} - N\theta') d\theta' = \epsilon (1+1,8\gamma) \frac{\cos(\frac{r}{\lambda} - N\theta)}{N - \frac{1}{\lambda} \frac{dr}{d\theta}} - \\ & - \frac{2,8\epsilon}{N - \frac{1}{\lambda} \frac{dr}{d\theta}} + \frac{\sin(\frac{r}{\lambda} - N\theta)}{(N - \frac{1}{\lambda} \frac{dr}{d\theta})^2} \epsilon (1,8 \frac{dy}{d\theta}), \end{aligned} \quad /11/$$

При этом $N \approx \frac{1}{\lambda} \frac{dr}{d\theta}$.

III. Рассмотрим условия появления возможных резонансов, не учитывая пока нелинейного члена $-z\rho$:

$$\boxed{-(1+1,8\gamma) + 1 + \ell = 0} \quad /12/$$

Возникает два резонанса:

$$\begin{aligned} \ell = 2 & , & \gamma = 1,11 & , & r = 178 & ; \\ \ell = 3 & , & \gamma = 1,67 & , & r = 315 & . \end{aligned} \quad /13/$$

Коэффициент, определяющий интенсивность этих двух резонансов, равен

$$C_{\ell}^{(1)} = \frac{a_{\ell}}{2} \left\{ \frac{1}{B(r)} \frac{dB(r)}{dr} (1 + 1,8\gamma) - i \left[\frac{1}{2} \epsilon^2 (1 + 1,8\gamma)^2 \frac{1}{\lambda N} + i \frac{2,8}{2} \frac{\epsilon^2}{r} (1 + 1,8\gamma) \right] \right\} \quad /14/$$

Значения отдельных слагаемых в фигурных скобках /14/ равны соответственно:

$$\begin{aligned} \text{при } \ell = 2 & \quad 4,3 \cdot 10^{-3}, & 6,6 \cdot 10^{-3}, & 2,1 \cdot 10^{-1}; \\ \text{при } \ell = 3 & \quad 22,5 \cdot 10^{-3}, & 11,7 \cdot 10^{-3}, & 1,6 \cdot 10^{-3}. \end{aligned} \quad /15/$$

Модуль коэффициента

$$\kappa_{\ell}^{(1)} = \frac{2 C_{\ell}^{(1)}}{a_{\ell}}$$

равен:

$$\begin{aligned} \text{при } \ell = 2 & \quad |\kappa_2^{(1)}| = 9,1 \cdot 10^{-3}; \\ \ell = 3 & \quad |\kappa_3^{(1)}| = 27 \cdot 10^{-3}. \end{aligned} \quad /16/$$

Определим ширину резонанса как

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2\pi}{1,8 \frac{dy}{d\theta}}} \quad /17/$$

$$\text{где } \frac{dy}{d\theta} = \frac{2eV_0}{2\pi m} = \frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^9} = 3,2 \cdot 10^{-5}, \quad \text{откуда} \quad \Gamma = 3,3 \cdot 10^{-2} \quad /18/$$

Таким образом, ширина резонанса, благодаря высоким значениям V_0

оказывается достаточно узкой по сравнению с шириной резонанса в синхротроне.

Оценим величину деполяризации

$$|s'| = \left| \kappa \left| \frac{a}{2} \Gamma \right| \right| \quad /19/$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \ell = 2 & \quad |s_2^{(1)}| = \left| \kappa_2^{(1)} \left| \frac{a_2}{2} \Gamma \right| \right| = 1,5 a_2; \\ \ell = 3 & \quad |s_3^{(1)}| = 4,5 a_3. \end{aligned}$$

Для выполнения условий $|s_2^{(1)}| < 1$ и $|s_3^{(1)}| < 1$, необходимо, чтобы

$$a_2 < 0,67 \text{ см} \quad , \quad a_3 < 0,22 \text{ см} \quad /20/$$

Посмотрим, каким напряженностям B_ρ соответствуют эти допуски по a_ℓ . Поскольку

$$B_{\rho\ell} = \frac{r B_0 a_\ell}{r_0^2 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad /21/$$

то

$$\begin{aligned} B_{\rho_2} &= 12,5 a_2, & r &= 178 \text{ см}, & B_{\rho_2} &< 8,4 \text{ эрстед}; \\ B_{\rho_3} &= 75 a_3, & r &= 315 \text{ см}, & B_{\rho_3} &< 16,5 \text{ эрстед}. \end{aligned} \quad /22/$$

Аналогичные резонансы появляются на тех же радиусах при $\ell = 5$ и $\ell = 6$. Коэффициент, определяющий интенсивность этих резонансов, равен

$$C^{(2)} = \frac{a_\ell}{2} \left\{ \frac{(1 + 1,8 \gamma)}{2} \frac{\epsilon}{\lambda} + i \frac{2,8}{2} \frac{\epsilon}{r} \right\} \quad /23/$$

$\ell = 5,6/$, откуда находим

$$\kappa_\ell^{(2)} = \frac{2 C_\ell^{(2)}}{a_\ell}$$

$$\begin{aligned} \text{при } \ell = 5, & \quad \gamma = 1,67, & r &= 315 \text{ см} \\ & |\kappa_5^{(2)}| = |0,078 + i 0,009| = 0,08; & & /24/ \\ \text{при } \ell = 6, & \quad \gamma = 1,11, & r &= 178 \text{ см} \\ & |\kappa_6^{(2)}| = 0,07. & & \end{aligned}$$

Затем определяем модуль вектора деполяризации /19/:

$$\begin{aligned} \ell = 5 & \quad |s_5^{(2)}|' = 13 a_5; \\ \ell = 6 & \quad |s_6^{(2)}|' = 11 a_6. \\ |s_5^{(2)}|' < 1, \text{ если } & a_5 < 0,074 \text{ см}; \\ |s_6^{(2)}|' < 1, \text{ если } & a_6 < 0,09 \text{ см}. \end{aligned} \quad /25/$$

Эти условия соответствуют требованиям на радиальные компоненты

$$B_{\rho_5} < 5,6 \text{ эрстед}, \quad B_{\rho_6} < 1,1 \text{ эрстед} \quad /26/$$

Найдем ограничения на 8-ю гармонику искажения медианной поверхности, которая не приводит к резонансной деполяризации.

$$\begin{aligned} |s_8^{(2)}|' &= a_8 \frac{\epsilon}{\lambda} \frac{4}{3} = 0,05 a_8; \\ |s_8^{(2)}|' < 1, \text{ если } & a_8 < 20 \text{ см}. \end{aligned} \quad /27/$$

4. Рассмотрим вопрос о том, не внесут ли дополнительных эффектов деполяризации нелинейные члены, описывающие связь вертикальных и радиальных колебаний.

Условия появления таких резонансов имеют вид:

$$\boxed{-/1 + 1,8 \gamma / + 1 \pm 0,24 \pm \omega_{\rho} = 0} \quad , \quad /28/$$

где ω_{ρ} изменяется в пределах от 1 до 1,7 за время ускорения, так что отсюда видно, что резонанс связи не может осуществляться.

5. Учет влияния вынужденных радиальных колебаний. Как известно^{1,2}, амплитуда этих колебаний ρ_k связана с коэффициентами b_k при соответствующей гармонике азимутальной асимметрии следующим соотношением:

$$\rho_k = \frac{b_k}{(k^2 + \omega_{\rho}^2 - 1)} r, \quad /29/$$

где

$$B_{\rho} = B(r) [1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(k\theta + \alpha_k)] . \quad /30/$$

Резонанс возможен при $k = 2$;

$$\boxed{-/1 + 1,8 \gamma / + 1 + 0,24 + 2 = 0} \quad ; \quad /31/$$

$$\gamma = \frac{2,24}{1,8} = 1,24; \quad r = 235 \text{ см.}$$

Расчет показывает, что деполяризация оказывается пренебрежимо малой.

6. Рассмотрим резонанс, обусловленный связью между радиальными колебаниями и искажениями медианной поверхности.

$$B_{\rho} = \frac{\partial B_{\rho}}{\partial r} z + \frac{\partial^2 B_{\rho}}{\partial r^2} \rho z, \quad /32/$$

$$B_{\theta} = \frac{\partial B_{\theta}}{\partial \theta} \frac{z}{r} + \frac{\partial^2 B_{\theta}}{\partial r \partial \theta} \frac{z \rho}{r},$$

где

$$B_{\rho}(r) = B(r) + B_s(r) \sin\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right), \quad /33/$$

$$B_s(r) = B(r) \epsilon(r) .$$

Нас интересуют вторые слагаемые, пропорциональные ρz . Интенсивность резонансов определяется коэффициентом при ρz :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_{\rho}}{\partial r^2} &= \frac{d^2 B(r)}{dr^2} + \frac{d^2 B_s}{dr^2} \sin\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right) + \frac{2}{\lambda} \frac{dB_s}{dr} \cos\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right) - \\ &- \frac{1}{\lambda^2} B_s \sin\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right); \end{aligned} \quad /34/$$

$$\frac{d^2 B_z}{dr d\theta} \frac{1}{r} = -\frac{N}{r} \frac{dB_z}{dr} \cos\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right) + \frac{N}{r} \frac{B_z}{\lambda} \sin\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right);$$

где

$$\frac{d^2 B(r)}{dr^2} = -\frac{B_0}{r_0^2} \frac{i + 2\left(\frac{r}{r_0}\right)^2}{\left|1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right|^{5/2}} \quad /35/$$

Возможные резонансы определяются соотношением

$$\left[-\frac{1}{1 + 1,8 \gamma} \frac{1}{r} \pm \frac{1}{\rho} \pm \omega \rho - 0 \right], \quad /36/$$

где $\omega = \frac{1}{r}$.

В результате получаем положения резонансов

$$\begin{array}{lll} \ell = 3, & \gamma = 1,07, & r = 144 \text{ см}; \\ \ell = 4, & \gamma = 1,43, & r = 284 \text{ см}; \\ \ell = 1, & \gamma = 1,25, & r = 235 \text{ см}. \end{array} \quad /37/$$

Интенсивность резонанса $\ell = 3$ и $\ell = 1$ определяется вкладом следующих членов:

$$C_{\ell}^{(3)} = \frac{a_{\ell}}{2} \frac{\rho_m}{2} \frac{1}{B(r)} \frac{d^2 B(r)}{dr^2} (1 + 1,8 \gamma),$$

$$C_{\ell}^{(4)} = \frac{2}{\lambda} \frac{dB_z}{dr} \frac{\epsilon}{NB(r)} (1 + 1,8 \gamma)^{1/2} \frac{a_{\ell}}{2} \frac{\rho_m}{2}, \quad /38/$$

$$C_{\ell}^{(5)} = \frac{1}{2} \frac{a_{\ell}}{2} \frac{\rho_m}{2} \frac{1}{r} \frac{dB_z}{dr} \frac{\epsilon}{B(r)} 2,8 (1 + 1,8 \gamma).$$

Интенсивность резонанса $\ell = 4$ зависит также от следующих коэффициентов;

$$C_{\ell}^{(6)} = \frac{1}{2} \frac{a_{\ell}}{2} \frac{\rho_m}{2} \frac{2}{\lambda} \frac{dB_z}{dr} \frac{1}{B(r)} (1 + 1,8 \gamma),$$

$$C_{\ell}^{(7)} = \frac{1}{2} \frac{a_{\ell}}{2} \frac{\rho_m}{2} \frac{B_z}{\lambda^2 B(r)} (1 + 1,8 \gamma),$$

$$C_{\ell}^{(8)} = \frac{1}{2} \frac{a_{\ell}}{2} \frac{\rho_m}{2} \frac{d^2 B_z}{dr^2} \frac{1}{B(r)} (1 + 1,8 \gamma), \quad /39/$$

$$C_{\ell}^{(9)} = \frac{1}{2} \frac{a_{\ell}}{2} \frac{\rho_m}{2} \frac{NB_z}{\lambda B(r)} \frac{2,8}{r},$$

$$C_{\ell}^{(10)} = \frac{1}{2} \frac{a_{\ell}}{2} \frac{\rho_m}{2} \frac{N}{r} \frac{dB_z}{dr} \frac{2,8}{B(r)}.$$

Полагая максимальную амплитуду радиальных колебаний равной 5 см, находим вектор деполяризации:

$$\begin{array}{ll}
 \ell = 3 & |s'_3| = 10^{-2} a_3, \\
 \ell = 1 & |s'_1| = 1,4 \cdot 10^{-1} a_1, \\
 \ell = 4 & |s'_4| = 3,5 a_4.
 \end{array} \quad /40/$$

Члены, аналогичные /39/, дают кроме этого следующие резонансы:

$$\begin{array}{ll}
 \ell = 5 & |s'_5| = 2,8 a_5, \quad r = 144 \text{ см}; \\
 \ell = 7 & |s'_7| = 3,6 a_7, \quad r = 235 \text{ см}.
 \end{array}$$

Итак, дополнительными условиями, которые необходимо выполнить, для получения малой деполяризации, являются

$a_4 < 0,28 \text{ см}$ $a_5 < 0,35 \text{ см}$ $a_7 < 0,28 \text{ см}$	при	$r = 284 \text{ см};$ $r = 144 \text{ см};$ $r = 235 \text{ см};$	$B_{\rho_4} < 11,6 \text{ э}$ $B_{\rho_5} < 3,15 \text{ э}$ $B_{\rho_7} < 6,3 \text{ э}$	/41/
---	-----	---	--	------

7. До сих пор мы не учитывали, что орбита движения протонов вследствие азимутальной вариации магнитного поля не является окружностью. Отклонения от окружности можно рассматривать как вынужденные радиальные колебания. Согласно /28/

$$\rho_s = b_s \frac{r}{54 + \omega^2 - 1} = 4,7 \cdot 10^{-3} r. \quad /42/$$

Радиальные колебания с такой частотой могут дать резонансы связи со второй и третьей гармониками искажений medianной поверхности. Интенсивность резонансов определяется в основном коэффициентом

$$C_{\ell}^{(11)} = \frac{\rho_s}{2} \frac{a_{\ell}}{2} \frac{c}{\lambda^2} /1 + 1,8 \gamma / . \quad /43/$$

В результате получаем:

$$\begin{array}{ll}
 \text{При } \ell = 2 & |s_2^{(11)}| = a_2, \\
 \text{при } \ell = 3 & |s_3^{(11)}| = 2,5 a_3.
 \end{array} \quad /44/$$

Требование малой деполяризации $|s| < 1$ удовлетворяется при условии:

$$\begin{array}{ll}
 a_2 < 1 \text{ см} & \text{при } r = 178 \text{ см}, \\
 a_3 < 0,4 \text{ см} & \text{при } r = 315 \text{ см}.
 \end{array} \quad /45/$$

Видно, что эти условия слабее, чем требование /20/.

8. Мы не рассмотрели детально деполяризацию, вызванную электрическим ускоряющим полем. Однако оценки показывают, что деполяризация электрическим полем оказывается незначительной.

Деполяризация при выводе из ускорителя не рассматривается ввиду отсутствия данных о конструкции выводной системы.

9. В таблицах 1 и 2 суммированы основные результаты данных расчетов.

Т а б л и ц а 1

Происхождение резонанса	Радиус равновесной орбиты, r				
	144 см	178 см	235 см	284 см	315 см
Искажение медианной поверхности		$a_2 < 0,67$ см $a_6 < 0,09$ см		$a_3 < 0,22$ см $a_8 < 0,074$ см	
Свободные вертикальные колебания	нерезонансная деполяризация				
Связь радиальных и вертикальных колебаний	нерезонансная деполяризация				
Вынужденные радиальные колебания	$b_2 < 1$				
Связь радиальных колебаний с искажениями медианной поверхности	$a_5 < 0,35$ см	$a_2 < 1$ см	$a_4 < 7$ см $a_7 < 0,28$ см ⁴	$a < 0,28$ см ³	$a < 0,4$ см

Т а б л и ц а 2

r см	144	178	235	284	315
a см					
a_1			< 7		
a_2		$< 0,67$			
a_3					$< 0,22$
a_4				$< 0,28$	
a_5	$< 0,35$				$< 0,074$
a_6		$< 0,09$			
a_7			$< 0,28$		
a_8	нерезонансная				

В заключение авторы выражают благодарность В.П. Дмитриевскому и В.В.Кольге за полезные замечания.

Л и т е р а т у р а

1. Ю.А. Плис, Л.М. Сороко. Деполяризация протонов при ускорении в синхротроне. Препринт ОИЯИ, Р-1449, Дубна, 1963.
2. Л.Л. Гольдин, С.В. Скачков, К.Н. Шорин. Магнитные измерения в ускорителях заряженных частиц. Госатомиздат, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 декабря 1963 г.