VEREINIGTES INSTITUT FÜR KERNFORSCHUNG

Laboratorium für Theoretische Physik

P - 150

von G. Heber*

MESSPROZESS UND ALGEBRAISCHE EIGENSCHAFTEN DER FELDGRÖSSEN IN EINER EINFACHEN MODELL-FELDTHEORIE

Nuovo cim., 1958, v 8, p 327.

1 9 5 8

* Jena, Theoretisch-Physikalisches Institut der Universität.

Z u s a m m e n f a s s u n g:

Es wird versucht, die bei der Ausmessung eines bestimmten Feldes mit realen Probekörpern auftretenden Messbarkeits-Beschränkungen organisch in den feldtheoretischen Formalismus einzubauen. Hierzu werden aus den Vertauschungsregeln zwischen Ort und Impuls eines Probekörpers Vertauschungsregeln zwischen Feldgrössen und dem Ort, an dem diese Feldgrössen herrschen, abgeleitet und diskutiert.

I. E i n f ü h r u n g

Angesichts der gegenwärtigen Situation auf dem Gebiete der quantisierten Feldtheorien hält es der Autor für nützlich, sich über die empirischen Grundlagen des Feldbegriffs Klarheit zu verschaffen. Fur das elektromagnetische Feld würde dies in einer früheren Untersuchung des Verf. angestrebt [1]. Das wesentliche Resultat jener Arbeit war, dass bei Verwendung von in der Natur wirklich vorkommenden Probekörpern die Feldgrössen des elektromagnetischen Feldes nicht beliebig genau ausgemessen werden können. Für diese Messbarkeits-Beschränkungen wurden Unschärfe-Relationen abgeleitet. Die in |1| enthaltenen Überlegungen lassen sich unter geringfügigen Änderungen auf alle diejenigen Felder übertragen, deren Feldgrössen in linearer Weise mit Kraftwirkungen zusammenhängen.

Die vorliegende Untersuchung schliesst insofern direkt an |1| an, als hier versucht wird, die in |1| abgeleiteten Unbestimmtheitsrelationen durch die Einführung passender Vertauschungsrelationen zwischen den in Frage kommenden Grössen zu erfüllen.

Die erhaltenen Vertauschungsregeln werden dann diskutiert, insbesondere hinsichtlich ihrer physikalischen Bedeutung und ihrer formalen Struktur.

Um möglichst einfache Verhältnisse zu haben, wurde allerdings hier ein anderes Feld untersucht als in [1]. Jedoch lassen sich alle wesentlichen Resultate dieser Untersuchung auf den Fall des elektromagnetischen Feldes übertragen.

II. Unser Modell-Feld

Das einfachste Modell einer Feldtheorie, welches sich denken lässt, ist in der klassischen Theorie charakterisiert durch die Gleichung:

$$\Box U(X) = 0 , \tag{1}$$

wo $U(X)$ eine skalare, reelle Grösse sein soll.*

Man kann dieses Feld entweder als vereinfachtes Modell der Elektrodynamik oder als spezielles Mesonfeld auffassen. Wir wollen ihm physikalisch keinerlei reele Bedeutung beilegen, sondern studieren es nur seiner Einfachkeit wegen. Man findet Bemerkungen über dieses Modell z.B. an verschiedenen Stellen von [2].

Will man dieses Feld $U(X)$ ausmessen, so muss man Probekörper in das Feld setzen, auf die das Feld wirkt, und muss diese Wirkungen des Feldes auf die Probekörper beobachten. Wir wissen, dass auf Quellen des feldes (1) eine Kraft ausgeübt wird. Diese

---

* X ist natürlich als Abkürzung des Koordinaten-Vierervektors X_ν zu verstehen.

Kraft wollen wir zur Feldmessung verwenden. Dazu wird ein Probekörper bestimmter räumlicher Ausdehnung der Quelldichte des u-Feldes eine bestimmte (möglichst kurze) Zeit in der Umgebung des Punktes x_μ in das Feld gebracht. Der Probekörper erzeugt eine skalar vorausgesetzte Quelldichte $\varphi(x)$ des u-Feldes, so dass statt (1) zu schreiben wäre:

$$\Box u(x) = \varphi(x). \qquad (1a)$$

Aus dem bekannten Energie-Impuls-Tensor des Feldes folgt dann, dass die Dichte k_ν der auf die Quelle φ wirkenden Kraft gegeben ist durch:

$$k_\nu(x) = \varphi(x) f_\nu(x), \qquad (2)$$

mit

$$f_\nu(x) = -\partial_\nu u(x) \qquad (\text{vgl. z. B. } [2]).$$

Direkt messbar ist also hier nicht u, sondern der Gradient f_ν von u. Deshalb ist es evtl. nützlich, (1a) zu ersetzen durch Gleichungen in f_ν. Diese lauten (vgl. [2])

$$\partial_\mu f_\nu(x) - \partial_\nu f_\mu(x) = 0; \quad \partial_\mu f^\mu(x) = \varphi(x). \qquad (3)$$

Durch Integration von (2) über eine raumartige Hyperfläche erhielte man die Kraft auf den Probekörper; durch weiteres Integration über die Zeit ergibt sich der Impuls,* der vom Feld auf den Probekörper übergegangen ist, während er dem Feld ausgesetzt war:

$$\int f_\nu(x)\varphi(x)\,d^4x \equiv F_\nu[\varphi] \equiv P_{\nu_E} - P_{\nu_A}; \qquad (4)$$

hier ist $F_\nu[\varphi]$ eine Abkürzung für das linksstehende Integral;

---

* Es sei darauf hingewiesen, dass F_ν natürlich nur dann einer Impulsdifferenz gleich ist, wenn φ, wie oben erklärt, die einem bewegten Teilchen zugeordnete Quelldichte ist.

$p_{\nu E}$, $p_{\nu A}$ sind die Viererimpulse des Probekörpers zu Ende bzw. Angang der Messung.

III. Messungen mit 1 Probekörper

Neben F_ν bzw. p_ν ist für uns von Interesse der Vierervektor ξ_μ des "Schwerpunktes" der Quellverteilung des Probekörpers. Er ist definiert durch:

$$\xi_\mu[\varphi] \equiv \frac{\int x_\mu \varphi(x)\, d^4x}{\int \varphi(x)\, d^4x} \tag{5}$$

$\xi_\mu[\varphi]$ ist offensichtlich diejenige Stelle, in deren Umgebung das Feld $f_\nu(x)$ (bzw. $F_\nu[\varphi]$) ausgemessen wird.

Bisher haben wir uns sowohl das Feld als auch den Probekörper als durchaus klassische Gebilde vorgestellt. Jetzt jedoch wollen wir uns überlegen, was geschieht, wenn wir den Probekörper der gewöhnlichen Quantenmechanik unterwerfen, aber noch keine eigentliche Feldquantelung vornehmen*. Es wird sich zeigen, dass dies zu charakteristischen Begrenzungen der Lokalisierbarkeit des Feldes führt.

Falls also unser Probekörper der Quantenmechanik gehorcht, dann befriedigen die Vierervektoren seines Impulses p_ν und seines Ortes ξ_μ die bekannten Relationen:**

---

* Man bemerke, dass dies dem Übergang von makroskopischen zu mikroskopischen Probekörpern entspricht. Fragt man nach der Stärke des Feldes an einem bestimmten Raum-Zeit-Punkt oder nach dem Mittelwert des Feldes über ein sehr kleines Raum-Zeit-Gebiet, so kommt man bei Verwendung von in der Natur existirenden Probekörpern notwendig zu diesem Grenzübergang.

** Man beachte, dass der Probekörper nur in der Umgebung des Zeitpunktes ξ_0 dem Felde ausgesetzt wird. Zum Zeitpunkt ξ_0 wird also die Energie p_0 mit dem Felde ausgetauscht.

$$[p_\nu, \xi_\mu] = -i\hbar\,\delta_{\nu\mu}\,, \tag{6}$$

mit $\delta_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ 0 & & & +1 \end{pmatrix}$ Aus (4) und (6) folgt aber sofort:

$$[F_\nu[\varphi], \xi_\mu[\varphi]] = -i\hbar\,\delta_{\nu\mu}. \tag{7}$$

Dh. $F_\nu[\varphi]$ und $\xi_\mu[\varphi]$ sind gleichzeitig nicht genau messbar; sie haben keine gemeinsamen Eigenfunktionen. Wann man also die Impulsdifferenz (4), aus der man auf das Feld* schliessen könnte, exakt gemessen hat, bleibt ξ (das ist die Stelle, an der das Feld herrscht), völlig unbestimmt. Umgekehrt schliesst exakte Kenntnis von ξ_ν jede Kenntnis von F_ν aus. Unser Feld ist also nicht lokalisierbar. Man wird zweckmässig nur solche Zustände des Feldes betrachten, in denen sowohl ξ als auch F entsprechend unscharf sind. Selbstverständlich steckt in (7) ein ernster Widerspruch zu jeder lokalen Feldtheorie. Er scheint aber unvermeidlich zu sein. Denn für die möglichst genaue Ausmessung eines Feldes in möglichst kleinen Raum-Zeit-Gebieten stehen uns nur Atome, Atomkerne, Nukleonen usw, zur Verfügung, die gewiss die Regeld (6) befolgen. Im Gedankenexperiment könnte man allerdings mit fiktiven Probekörpern arbeiten, die eine unendlich grosse Ladung tragen und vielleicht sogar punktförmig sein mögen. Dann könnte man die Ladung in (7) nach rechts werfen und F_ν würde mit ξ_μ tatsächlich kommutieren. Aber entsprechend einem in ausgesprochenen Prinzip wollen wir solche fiktiven Pro-

---

* Der Kürze halber nennen wir in Zukunft meist die $F_\nu[\varphi]$ "Feldgrössen."

bekörper nicht zulassen, sondern nur mit realen Probekörpern arbeiten.

Wir wollen also (7) ernst nehmen und möchten gern eine konsequente Feldtheorie unter Berücksichtigung von (7) aufbauen. Dh. wir möchten die Feldtheorie gern so formulieren, dass sie keine unbeobachtbaren Züge enthalt. Von diesem Ziel sind wir allerdings noch weit entfernt. Zunächst müssen wir beachten, dass zur Ermittlung des Feldzustandes natürlich 1 Probekörper nicht ausreicht. Vielmehr muss man unendlich viele Probekörper einsetzen. Bei der Aufstellung von Vertauschungsrelationen zwischen unseren F und ξ genügt es jedoch, das Verhalten von 2 Probekörpern zu studieren.

IV. Messungen mit 2 Probekörpern

Wird der eine Probekörper durch die Quelldichte $\varphi(x)$, der andere durch $\varphi'(x)$ charakterisiert, so ist eine für das algebraische Verhalten von F und ξ entscheidende Grösse:

$$[F_\nu[\varphi], \xi_\mu[\varphi']] = -i\hbar\, G_{\nu\mu}[\varphi, \varphi'] \tag{8}$$

Anschaulich misst $G_{\nu\mu}[\varphi, \varphi']$ die unkontrollierbare Störung, die durch eine Ortsmessung am Probekörper φ' bei der Feldmessung mittels des Probekörpers φ entsteht und umgekehrt. Von $G_{\nu\mu}$ wissen wir bisher nur aus (7):

$$G_{\nu\mu}[\varphi, \varphi] = \delta_{\nu\mu}.$$

Unser Ziel ist es zunächst, das Funktional $G_{\nu\mu}$ etwas genauer kennenzulernen. Dazu müssen wir freilich die in (8) zugelassen φ stark einschränken.

Die Vorschrift, durch die wir die zugelassenen φ charakterisieren wollen, sei folgende: Alle zugelassenen $\varphi(x)$ lassen sich durch Translationen aus einer willkürlich wählbaren Grundfunktion $\varphi_0(x)$ herstellen. Dh. wir fordern für ein beliebiges $\varphi(x)$ die Existenz eines Vierervektors y_ν mit der Eigenshaft:

$$\varphi(x) \equiv \varphi_0(x-y) \tag{9}$$

Man kann die Parameter y_ν zur Kennzeichnung einer bestimmten Struktur-Funktion verwenden und schreiben: $\varphi_y(x) \equiv \varphi_0(x-y)$ $\varphi_0(x)$ muss natürlich die in der Fussnote zu (4) erwähnte Bedingung erfüllen, ist sonst aber weitgehend willkürlich. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass das Zentrum von $\varphi_0(x)$ der Punkt $x=0$ ist. Die Quellfunktion $\varphi_y(x)$ bedeutet dann klassisch-anschaulich, dass sich ein durch die Quelldichte φ_0 gekennzeichneter Probekörper an der Stelle y befindet*. Das für alle y gleiche φ_0 heisst, alle Messungen werden nur mit einer Sorte von Teilchen, sagen wir mit irgendwelchen "idealen Probekörpern" ausgeführt. Wir werden also in dieser Arbeit nicht das an sich reizvolle Problem der Abhängigkeit von $G_{\nu\mu}$ usw. von φ_0 diskutieren.

Man kann jedoch die Frage aufwerfen, welche y_0 man in (9) zulassen solte. Homogenität und Isotropie des Raumes scheinen zu verlangen, dass y in keiner Weise eingeschränkt werde. Wir wollen in dieser Arbeit auch dementsprechend verfahren.

---

* In der klassischen Theorie wäre natürlich gemäss (5) $\xi_\mu = y_\mu$. Aber in der Quantentheorie braucht diese Relation nicht notwendig zu gelten. Vgl. hierzu die Ausführungen im nächsten Abschnitt!

Trotzdem mochte der Autor an dieser Stelle darauf hinweisen, dass dies vielleicht nicht unbedingt notwending ist, die y_ν sind ja zunächst nur Parameter; der wirkliche physikalische Raum wird durch die Observablen ξ_μ aufgespannt; nur für die ξ_μ Eigenwerte sollten streng genommen obige Forderungen erhoben werden*.

Unter den in obigen Zeilen enthaltenen Voraussetzungen über die zugelassenen φ können wir also schreiben:

$$F_\nu[\varphi_y] \equiv F_\nu(y)^{**)} \; , \; \xi_\mu[\varphi_{y'}] \equiv \xi_\mu(y') \; ;$$

$$G_{\nu\mu}[\varphi_y, \varphi_{y'}] \equiv G_{\nu\mu}(y-y').$$

Letzteres muss wegen der Invarianz von (8) gegenüber gemeinsamen Translationen gelten. Die Abhängigkeit dieser Grössen von φ_0 unterdrücken wir programmgemäss.

(8) lautet in den neuen Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} &[F_\nu(y), \xi_\mu(y')] = -i\hbar\, G_{\nu\mu}(y-y') \, , \\ &\quad + G_{\nu\mu}(0) = \delta_{\nu\mu}^{***} . \end{aligned} \tag{8a}$$

Um über $G_{\nu\mu}$ auch für $y \neq y'$ etwas aussagen zu können, mussen wir uns physikalisch klarzumachen suchen, ob und wie die

---

* Auch experimentelle Verfahren der Feldmessung arbeiten ja praktisch nie mit kontinuierlich verteilten Probekörpern!

** Wir wollen jedoch nicht vergessen, dass $F_\nu(y)$ nicht etwa das Feld am Orte y ist, sondern der mit Hilfe des dem geometrischen Parameter y zugeordneten Probekörpers gemessene Feld (mittel)wert. Die Observable "Ort des y - Probekörpers" ist $\xi_\mu(y)$.

*** Diese Beziehung wird übrigens weiter unten eine grosse Rolle spielen!.

Messungen $\xi_\mu(y')$ und $F_\nu(y)$ aufeinander einwirken.

Damit die durch die Messungen verursachten Störungen möglichst klein bleiben, wird es zweckmässig sein, die Probekörper wirklich nur während der Zeitdauer der Messung dem Felde auszusetzen. Die Probekörper sollen also zu Beginn der Messung durch eine geeignete Vorrichtung in das Feld gebracht und am Ende der Messung durch eine passende Apparatur aus dem Felde genommen werden.

Den Prozess der Injektion eines Teilchens kann man sicher so ausbilden, dass er gleichzeitig als Vorrichtung zur Messug des Vierer-Ortes ξ_μ und des Anfangs-Viererimpulses $P_{\nu A}$ des Probekörpers dient.

Natürlich wäre es unsachgemäss, diese Vorrichtung so zu konstruieren, dass entweder ξ_ν oder $P_{\nu A}$ genau bekannt wird, weil ja die beiden Grössen komplementär zueinander sind. Man muss die Injektion deshalb so vornehmen, dass $\xi_\nu(y)$ irgendwo im Intervall $\left[\left(y_\nu - \frac{\Delta\xi_\nu}{2}\right) \dots \left(y_\nu + \frac{\Delta\xi_\nu}{2}\right)\right]$ liegt und $P_{\nu A}$ soll sich zweckmässig im Intervall $\left[\left(-\frac{\Delta P_\nu}{2}\right) \dots \left(+\frac{\Delta P_\nu}{2}\right)\right]$ befinden. Dabei wird man bei optimaler Konstruktion des Injektions-Apparates für jede Komponente $\Delta\xi_\nu \, \Delta P_\nu \approx \hbar$ erreichen können. - Man bemerke, dass hierdurch 4 freie Parameter in die Theorie kommen, etwa die $\Delta\xi_\nu$ Oft wird es zweckmässig sein, alle 4 $\Delta\xi_\nu$ einander gleich zu setzen, aber das ist keineswegs notwending!

Wegen der Unschärfe ΔP_ν von $P_{\nu A}(y)$ wird natürlich auch bei noch so genauer Messung von $P_{\nu E}(y)$ die Differenz $P_{\nu E}(y) - P_{\nu A}(y) \equiv F_\nu(y)$ um eben die Grösse ΔP_ν unsicher.

Wie aber wird durch die oben skizzierte Methode der Messung von $\xi_\mu(y)$ die Messung von $F_\nu(y')$ für $y' \neq y$ beeinflusst?

Verfasser sieht hierfür 3 Mechanismen:

a) Direkte Wechselwirkung bei Überlappung von Probekörpern;

b) Austauscheffekte;

c) Strahlungswechselwirkung.

Allen 3 Mechanismen ist gemeinsam, dass sie trivialerweise höchstens die ganze bei $y = y'$ auftretende Störung, meist aber weniger vom Probekörper $\varphi_y(x)$ auf $\varphi_{y'}(x)$ übertragen; d.h. es gilt:

$$G_{\nu\mu}(y-y') \leqq \delta_{\nu\mu} = G_{\nu\mu}(0) \tag{10}$$

Ferner kann man folgendes über diese 3 Mechanismen sagen:

Zu a): Wenn sich φ_y und $\varphi_{y'}$ im x - Raum teilweise überlappen, d.h. wenn die beiden Probekörper teilweise den gleichen Raum erfüllen, werden sie natürlich irgendwie direkt miteinander wechselwirken. Allerdings ist es sehr schwer, ohne genaue Kenntnis der Natur der Probekörper etwas über die Stärke dieser Wechselwirkung zu sagen. Man kann ohne solche besonderen Kenntnisse nur gewiss sein, dass (10) erfüllt ist. Unter geeigneten Voraussetzungen über die Ausdehnung der φ und die Grösse der $\Delta\xi_\nu$ wird jedoch dieser Effekt vom Mechanismus B) völlig überdeckt. Wir begnügen uns deshalb mit diesen wenigen Bemerkungen.

Zu b): Falls die Injektion der beiden indentischen Probekörper, die y bzw. y' zugeordnet sind, in solcher Weise erfolgt, dass sich die Spektren von $\xi(y)$ und $\xi(y')$ teilweise überlappen, wird es schwierig sein, die beiden Probekörper voneinander zu unterscheiden. Es treten die aus der Quantenmechanik wohlbekannten Austauscheffekte auf. Dies führt dazu, dass man nach Injektion 2er Probekörper mit überlappenden ξ -Spektren $\xi(y)$ und $\xi(y')$ bei einer F -Messung zunächst nicht weiss, ob man $F(y)$ oder $F(y')$ gemessen hat. Um bei diesem Sachverhalt nicht in Konflikt mit den Unschärferelationen zu gelangen, möchte man

für $(y_\nu - y'_\nu) < \frac{1}{2}(\Delta\xi_\nu(y) + \Delta\xi_\nu(y'))$ fordern:

$$[F_\nu(y), \xi_\mu(y')] = [F_\nu(y), \xi_\mu(y)] = -i\hbar\,\delta_{\nu\mu}. \qquad (11)$$

Dh.:

$$G_{\nu\mu}(y-y') = \delta_{\nu\mu} \qquad (y_\nu - y'_\nu) < \frac{1}{2}(\Delta\xi_\nu(y) + \Delta\xi_\nu(y')). \qquad (12)$$

Eine solche Relation ist aber unschön und merkwürdig, weil man erwartet, dass die rechte Seite von (8a) eine universelle Funktion ist. Das durch (12) definierte G hängt jedoch von den freien Parametern $\Delta\xi_\nu$ ab. Wir wollen deshalb folgendes vereinbaren: Die in (12) auftretenden $\Delta\xi_\nu$ sollen nicht beliebige Unschärfen von ξ_ν sein, sondern die minimal möglichen. Es ist ja zu erwarten, dass der Injektionsapparat niemals so konstruiert werden kann, dass $\Delta\xi_\nu \to 0$ erreichbar wird.

Vielmehr hält der Autor für sachgemäss, an dieser Stelle einen "kleinsten Vierervektor" η_ν einzuführen, so dass $\Delta\xi_\nu(y) \gg \eta_\nu$ und

$$G_{\nu\mu}(y-y') = \delta_{\nu\mu} \qquad \text{für} \qquad (y_\nu - y'_\nu) < \eta_\nu \qquad (12a)$$

η_ν soll durchaus universelle Bedeutung besitzen: In Abständen, die kleiner als η_ν sind, kann man prinzipiell keine gleichartigen Teilchen mehr voneinander unterscheiden.* Natürlich darf man statt der 4 η_ν eine einzige Grösse einführen, die dann die Bedeutung einer "elementaren Länge" besässe und selbstverstandlich irgend einen Wert der Grössenordnung 10^{-13} cm besitzen sollte.**

Für $(y_\nu - y'_\nu) > \eta_\nu$ gibt der gegenwärtig diskutierte Mechanismus keinen Beitrag zu $G_{\nu\mu}(y - y')$.

Die unter a) erwähnte Schwierigkeit einer quantitativen Berücksichtigung des Beitrages der direkten Wechselwirkung zu $G_{\nu\mu}$ kann umgangen werden, wenn man die Freiheit in der Wahl der Quellfunktion $\varphi_0(x)$ so ausnützt, dass jede Überlappung zweier Quellen φ_y und $\varphi_{y'}$ für $(y_\nu - y'_\nu) > \eta_\nu$ unterbleibt. Die Überlappung der φ in Gebiet $(y_\nu - y'_\nu) < \eta_\nu$ kann dann zu (12a) wegen (10) nichts mehr beitragen.

---

*. Man denke auch an die bei genügend kleinen Abständen einsetzenden starken Wechselwirkungen, die die Individualität der beteiligten Teilchen zerstören.

** Es sei erwähnt, dass wir physikalisch recht verwandte Aussagen erhalten, wenn wir nur eine diskrete Mannigfaltigkeit von y_ν zulassen, die aus den Punkten eines Raum-Zeit-Gitters mit Gitterabstand η_ν besteht. Wegen der damit verbundenen Verletzung der Homogenität und Isotropie des y-Raumes haben wir diesen Weg aber vermieden.

Zu c): Beim Prozess der Ortsmessung $\xi_\mu(y)$ (d.h. bei der entsprechenden Injektion eines Probekörpers $\varphi_y(x)$) wird natürlich eine Strahlung, d.h. eine Erregung des U -Feldes emitiert. Da wegen der Unschärferelationen (6) für den Probekörper diese Strahlung ebenfalls unscharf ist, kann sie eine spätere Feldmessung $F_\nu(y')$ in unkontrollierbarer Weise stören. Dh. falls die Strahlung von y zu y' gelangen kann, hätte man mit $[F_\nu(y'), \xi_\mu(y)] \neq 0$ zu rechnen. Man kann auch sagen: Die Strahlung hat einen Teil des durch die $\xi(y)$ -Messung unbestimmten Impulses von φ_y zum Probekörper $\varphi_{y'}$ transportiert.

An dieser Stelle taucht jedoch folgende Schwierigkeit auf: Eine Vertauschungsrelation der Form

$$[F(y'), \xi(y)] = G(y-y').$$

bedeutet ja immer, dass nicht nur die F -Messung durch die ξ -Messung gestört wird, sondern dass (bei Vertauschung von y und y') auch die ξ -Messung durch die F -Messung genau ebenso stark gestört wird. Unsere Verabredungen über die Art der ξ -Messung lassen aber keinen Mechanismus für diesen reziproken Störprozess erkennen. Das liegt vor allem daran, dass das ξ - Spektrum unserer Ansicht nach durch die Konstruktion des Injektions-Apparates Bestimmt werden kann. Der Operator ξ -nimmt also in gewisser Weise eine Zwischenstellung ein; er steht seiner Natur nach zwischen dem Feldoperator F und der Koordinaten-c-Zahl x der konventionellen, lokalen Feldtheorien. Diese Zwischenstellung scheint dem Autor notwendig zu sein, weil ξ als Ortsoperator des Probekörpers kein völlig freier Operator sein darf. Der Probekörper muss von aussen in gewissen Umfange dirigiert werden; aber seine quantenmechanische Natur darf man nach Meinung des Autors nicht völlig vernachlässigen.

Wegen dieser Unsymmetrie zwischen ξ und F neigt der Autor dazu, die Strahlungswechselwirkungen lieber überhaupt nicht in G aufzunehmen; eine solche Unsymmetrie der Wechselbeziehungen lässt sich offenbar nicht mit Relationen vom Typ (8a) beschreben.

Wie dem auch sei, auf jeden Fall muss, wie oben betont, die Funktion $G_{\nu\mu}(y-y')$ die Eigenschaften (10) besitzen.

Sie kann also keine Pole und dgl. besitzen. Das ist die wichtigste Erkenntnis diess Abschnittes, die bei unseren weiteren Überlegungen wesentlich sein wird. Die explizite Gestalt von $G_{\nu\mu}$ benötigen wir im Augenblick nicht unbedingt. Doch wollen wir zusammenfassend hervorheben, dass unter vernünftigen Annahmen über φ_0 die Formel (12a) eine brauchbare Näherung sein dürfte.

Bei Messungen mit 2 Probekörpern interessiert natürlich auch, wie sich 2 Ortsmessungen gegenseitig beeinflussen. Dh. man fragt nach dem Wert von $[\xi(y), \xi(y')]$. Unseren oben entwickelten Vorstellungen über den ξ-Messprozess entspricht es, wenn wir

$$[\xi_\nu(y), \xi_\mu(y')] \equiv 0 \qquad (13)$$

setzen. Denn jede Injektion ist ein von der anderen völlig unabhängiger Eingriff von aussen und kann für sich beliebig geregelt werden.

Ferner interessiert die Grösse $[F(y), F(y')]$. Hier wird in Strenge wegen des durch die Strahlung und andere Prozesse ermöglichten Impulstransportes von φ_y nach $\varphi_{y'}$, i.a. gelten:

$$[F(y), F(y')] \neq 0.$$

Aber da wir von der klassischen Feldtheorie ausgehen, möchten wir der Einfachheit wegen zunächst probieren, ob man nicht auch mit

$$[F_\nu(y), F_\mu(y')] \equiv 0 \tag{14}$$

sowie (13), (10) und (8a) eine in sich konsequente Feldtheorie aufbauen kann.

Abschliessend zu diesem Abschnitt sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die hier skizzierten Überlegungen natürlich die Form der fraglichen Vertauschungsrelationen nur plausibel machen können. Man kann nämlich prinzipiell eine Quantentheorie aus der korrespondierenden klassischen Theorie nicht streng ableiten. Man kann also nur die plausibel gemachten Vertauschungsregeln und die anderen Grundgleichungen axiomatisch an die Spitze der Theorie stellen und sehen, ob man vernünftige Folgerungen aus der Theorie erhält .

5. Einige spezielle Fragen

Der eben genannte Gesichtspunkt ist auch wichtig für die Beurteilung der Frage, ob die Gleichungen (1) bis (5) der klassischen Theorie in unsere Quantentheorie als Operatorgleichungen übernommen werden sollen.

Die Korrespondenz zur klassischen Theorie verlangt nur, dass die klassischen Relationen in Beziehungen zwischen den Erwartungswerten der betreffenden Grössen übergehen. Operatorgleichungen <u>können</u> aus klassischen Gleichungen hervorgehen, das <u>muss</u> aber nicht so sein ! Wir diskutieren hierzu 2 Beispiele

a) Offensichtlich können die Differentialgleichungen der klassischen Theorie für die $f_\nu(x)$ bzw. $F_\nu(y)$ nicht als Operatorgleichungen in ~~the~~ die Quantentheorie übernommen werden. Denn sonst würden aus (8a) entsprechende Feldgleichungen für die $\xi_\mu(y)$ folgen. Die Grössen $\xi_\mu(y)$ sind aber gar keine Feldgrössen im konventionellen Sinne (10) und es wäre nach Meinung des Autors unsachgemäss, wollte man sie einer Feldgleichung unterwerfen.

b) Wir wollen im folgenden prüfen, wozu die Übernahme von Gl. (5) in die Quantentheorie führt. Aus (5), (9) und

$$\int x\, \varphi_0(x)\, d^4x = 0$$ folgt:

$$\xi_\mu(y) \equiv \frac{\int x_\mu \varphi_y(x)\, d^4x}{\int \varphi_y(x)\, d^4x} = y_\mu \tag{15}$$

Man kann mit Hilfe von (15) die Grössen $\xi_\mu(y)$ völlig aus der Theorie eliminieren. Hiermit würde z.B (8a) übergehen in:

$$[F_\nu(y), y'_\mu] = -i\hbar G_{\nu\mu}(y-y'). \tag{8b}$$

(8b) ist eine recht interessante Relation. Zunächst ist klar, das y jetzt ein Operator geworden ist. Vordem hatten wir y als c-Zahl-Parameter angesehen, der die verschiedenen Probekörper charakterisiert. Aus (8b) folgt aber vor allem, dass $F_\nu(y)$ keine Funktion von y allein sein kann. Denn speziell für $y = y'$ lautet ja (8b):

$$[F_\nu(y), y_\mu] = -i\hbar G_{\nu\mu}(0) = -i\hbar \delta_{\nu\mu}$$

Das ist aber nicht verträglich mit der notwending gültigen Identität: $[y_\nu, y_\mu] \equiv 0$ Vielmehr muss F_ν nach von einer anderen Variablen, sagen wir η_ν abhängen:

$F_\nu = F_\nu(y, \eta)$, wobei i.a. $[\eta_\nu, y_\mu] \neq 0$

sein sollte. Damit sind wir zu einer Theorie vom bilokalen Typ gelangt (vgl. hierzu etwa |3|).

Der Autor hat jedoch einige gewichtige Bedenken gegen den durch (15) gekennzeichneten Übergang:

1) (15) verlangt die Gleicheit 2er Grössen, die wesentlich verschiedene Bedeutung haben. y hatten wir ja als Parameter zur Kennzeichnung unserer Probekörper eingeführt. Solch ein Parameter muss natürlich ein c-Zahl sein. $\xi(y)$ hingegen war als die Observable "ort des durch y gekennzeichneten Probekörpers" eingeführt worden. Die durch (15) geforderte Vereinigung von Teilchen-Indes y und dynamischer Variabler $\xi(y)$ ist deshalb höchst merkwürdig.

2) Durch (15) wird der unserer Vorstellung über die ξ -Messung, wie sie oben dargestellt wurde, adäquate mathematische Formalismus zerstört. Vorher konnten wir sagen: y charakterisiert die Einstellung des Injektions-Gerätes; $\xi(y)$ repräsentiert den wirklichen Ort des bei der Einstellung y injizierten Probekörpers. $\xi(y)$ und y sollten wegen statistischer Effekte i.a. nicht zusammenfallen. Dieser Möglichkeit sehen wir uns durch (15) beraubt.

3). Nach Einführung der Gleichung $\dot{\xi}(y) = y$ kommt ferner nicht mehr zum Ausdruck, dass wir zur vollständigen Ausmessung des Feldes unendlich viele Probekörper benötigen. Denn jedem Operator entspricht nach den bekannten Regeln der Quantentheorie gerade <u>ein</u> Messprozess. Es ist nicht zu sehen, wie man mit den 4 Operatoren y_ν die erforderliche Mannigfaltigkeit von Messprozessen darstellen kann.

4) Schliesslich hält es der Autor für etwas merkwürdig und bedenklich, dass die rechte Seite von (8b) i.a. keine c-Zahl mehr ist sondern q-Zahl-Charakter erhält. Schon die ganz allgemeine Schreibweise (8) brachte ja zum Ausdruck, dass der Kommutator von F und ξ eine c-Zahl sein sollte. Aus all diesen Gründen neigt der Autor dazu, Gl. (5) bzw. (15) nicht in die Quantentheorie zu übernehmen; statt dessen möchten wir nur fordern, dass der Erwartungswert $\overline{\xi(y)}$ von $\xi(y)$ gleich y wird:

$$\overline{\xi_\mu(y)} = y_\mu . \qquad (15a)$$

Als Abschluss dieses Abschnittes sei noch eine spezielle Methode zur Erfüllung der Vertauschungsregeln (8a), (13) und (14) angegeben. Unter Einführung des aus den konventionellen Feldtheorien gut bekannten, sehr grossen, 4-dimensionalen Normierungs- und Periodizitätsvolumens, schreibe man:

$$\left.\begin{aligned} F_\nu(y) = \sum_k P_{\nu,k}\, e^{iky}, \quad \xi_\mu(y') = \sum_k q_{\mu,k}\, e^{-iky'} \\ G_{\nu\mu}(y-y') = \sum_k g_{\nu\mu,k}\, e^{ik(y-y')} \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

und erhält sofort:

$$[P_{\nu,k}\,,\, q_{\mu,l}] = -i\hbar\,\delta_{k,l}\, g_{\nu\mu,k}$$

sowie

$$[p,p] - [q,q] \equiv 0 \qquad (17)$$

Die Relationen (17) kann man im sicher vorliegenden Fall $g_{\nu\mu,k} = \delta_{\nu\mu}\, g_k$ sofort erfüllen, indem man z.B. wie in der Wellenmechanik setzt:

$$\left.\begin{aligned} q_{\mu,l} &= q_{\mu,l} \qquad (c\text{-Zahlen}); \\ P_{\nu,k} &= \frac{\hbar}{i}\, g_k \frac{\partial}{\partial q_{\nu,k}} \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Die Relationen (17) sind besonders interessant wegen der aus (18) folgenden Eigenschaft der $g_{\nu\mu,k}$:

$$\sum_k g_{\nu\mu,k} = \delta_{\nu\mu}\,, \quad \text{d.h.: } \sum_k g_k = 1 \qquad (19)$$

Die $g_{\nu\mu,k}$ mussen also in ihrer Abhängigkeit von k eine charakteristische, starke Konvergenz zeigen. Mit $g_{\nu\mu,k} \to 0$ werden die entsprechenden p_k, q_k gemäss (17) in zunehmendem Masse klassische Grössen. Aus diesem Umstand leiten wir unsere Hoffnung darauf ab, dass eine durch (8a) modifizierte Feldtheorie gewissen Direvgenz-Schwierigkeiten der klassischen Theorie nicht enthält. Als einfachstes Beispiel kann man das Produkt der mittleren Schwankungsquadrate von $\xi(y)$ und $F(y)$ berechnen*. Eine solche Grösse ist in Theorien mit unendlich vielen Freiheitsgraden in der Regel divergent. Hier bleibt sie konvergent wegen der Eigenschaft (10) bzw. (19) unseres Kommutators.

---

* Man kann diese Rechnung bekanntlich ohne Kenntnis der Bewegungsgleichungen durchführen; es gehen nur die Vertauschungsrelationen ein !

6. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Wir haben damit gewissermassen die Kinematik unseres Modell-Feldes an die realen Mess-Möglichkeiten angepasst. Es bleiben wichtige Probleme wie das der Dynamik dieses Feldes und dass der vollständigen Quantisierung des Modelles vorläufig noch ungelöst. Besonders schwierig sind diese Probleme u.a. deshalb, weil es gar nicht trivial zu sein scheint, die Grössen $\xi_\mu(y)$ sachgemäss in eine geschlossene Feldtheorie einzubauen. - Eine andere Schwierigkeit betrifft die Quellfunktion $\varphi_0(x)$. Und zwar muss man sich überlegen, ob man Deformationen der Quelldichte bei einwirkenden Kräften zulassen will oder nicht. Dabei muss man beachten, dass in (4) implizite die Annahme eingeführt ist, dass weder Impuls noch Energie vom Feld auf die <u>inneren</u> Freiheitsgrade der Quelle übergehen können. Die Quelle besitzt nach (4) nur die Translations-Freiheitsgrade. Auch (9) wäre natürlich mit Deformationen nicht verträglich. - Diesen Schwierigkeiten könnte man natürlich entgehen, wenn man wieder punktförmige Probekörper, also $\varphi_0(x) \sim \delta^4(x)$ * einführte. Es ist möglich, dass dies keine neuen Schwierigkeiten hervorruft, solange in (12a) $\eta_\nu > 0$ gehalten wird. Diese Frage bedarf jedoch noch einer sorgfältigen Prüfung. - Verf. hofft, einige der offenen Fragen später behandeln zu können.

Der grösste Teil der vorliegenden Untersuchung wurde während des Aufenthaltes des Autors im Vereinigten Institut für

---

* Unter $\delta^4(x)$ verstehen wir wie üblich das Produkt der 4 - Diracschen Delta-Funktionen für $x_0 \cdots x_3$

Kernforschung im Dubna (UdSSR) ausgeführt. Es ist dem Autor ein aufrichtiges Bedürfnis, vielen Mitarbeitern dieses Institutes für die erwiesene Gastfreundschaft und für anregende Diskussionen zu danken. Besonders herzlichen Dank für wertvolle Anregungen bzw. Bemerkungen gilt den Herren Professoren Blochinzew und Ning Hu in Dubna.

Literatur

|1| Heber, G., Nuovo Cimento, im Druck,

|2| Hund, F., Materie als Feld, Springer-Verlag, 1954.

|3| Rayski, J., Nuovo Cimento (X) 2, 255 (55).