

1493

ЭКЗ ЧИТ. ЗАПА

ЛНФ



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

---

А.Т. Филиппов

v

P-1493

О ПОСТРОЕНИИ  
КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Дубна 1964

А.Т. Филиппов

P-1493

О ПОСТРОЕНИИ  
КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
В ТЕОРИИ ПОЛЯ

ЛНД

Дубна 1964

ОИИ  
БИБЛИОТКА

В предыдущей работе <sup>/1/</sup> был дан общий рецепт построения квазипотенциала и устранения расходимостей из него (см. также <sup>/2/</sup>). Здесь мы рассмотрим низшие приближения для квазипотенциала в  $\lambda\phi^3$ - и  $g\phi^4$ -теориях<sup>x)</sup>.

В  $\lambda\phi^3$ -теории  $V^+ = \lambda^2 V_2^+ + \lambda^4 V_4^+ + \dots$ , а  $V_n^- \equiv 0$ . Нетрудно найти, что диаграммам рис. 1а) соответствует потенциал

$$V_2^+ = [T_2^+] = - \frac{2\lambda^2}{m^2 + (\vec{p} - \vec{p}')^2}, \quad (1)$$

а диаграммам рис. 1 б), в), г) - потенциал

$$V_4^+ = [T_4^+] - [V_2^+ \times V_2^+] = \int_{p^2=p'^2=k^2} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dt'}{t'-t} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'-s} [\rho(s', t') - \rho(s', t'; s)] + (2)$$

$$+ \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dt'}{t'-t} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'+t'+s-4m^2} \rho(s', t')$$

где

$$\rho(s', t') = \frac{-16\pi\lambda^4 \theta[(s'-4m^2)(t'-4m^2)-4m^4]}{\sqrt{s't'[(s'-4m^2)(t'-4m^2)-4m^4]}}, \quad (3)$$

$$\rho(s', t'; s) = \frac{-16\pi\lambda^4 \theta[(s'-4m^2) \{t'-4m^2+s - \frac{(s+s'-4m^2)^2}{4(s'-4m^2)}\}]}{\sqrt{s'(s'-4m^2) \{t-4m^2+s - \frac{(s+s'-4m^2)^2}{4(s'-4m^2)}\}}}, \quad (4)$$

и мы опустили вклад в  $V_4^+$  диаграмм 4-го порядка, зависящих лишь от  $t$ .

Легко видеть, что для потенциала  $V_4^+(s, t)$  представление Мандельштама несправедливо. Он содержит как раз такую лишнюю особенность, которая компенсирует ближайшую дополнительную особенность <sup>/3/, /4/</sup> в квазипотенциальной амплитуде рассеяния (содержащуюся в  $V_2^+ \times V_2^+$ ). Из самого способа построения квазипотенциала следует, что с ростом числа учтенных порядков теории возмущений в потенциале будут возникать такие особенности, что дополнительные особенности в квазипотенциальной амплитуде смогут появляться лишь в области достаточно больших  $|k^2|$ .

Найдем при  $t \rightarrow \infty$  асимптотику членов борновского ряда для квазипотенциаль-

x) Обозначения см. в <sup>/1/</sup>.

ной амплитуды  $T = V_2 + V_2 \times V_2 + V_2 \times V_2 \times V_2 + \dots$ . Эти члены соответствуют "лестничным" диаграммам Фейнмана. Например,  $V_2 \times V_2 \times V_2$  соответствует лестничным диаграммам 6-го порядка. Нетрудно найти, что

$$[V_2 \times V_2 \times \dots \times V_2]_{t \rightarrow \infty} = \frac{2\lambda^2 [\beta(s) \log \frac{t}{m^2}]^{n-1}}{t^{n-1}}, \quad (5)$$

где

$$\beta(s) = 8\pi\lambda^2 \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} \frac{1}{\sqrt{s'(s' - 4m^2)}}. \quad (6)$$

Асимптотика каждого члена совпадает, таким образом, с асимптотикой соответствующей лестничной диаграммы Фейнмана<sup>/5/, /6/</sup>, а суммирование приводит к результату  $T_{t \rightarrow \infty} = 2\lambda^2 t^{\alpha(s)}$  (где  $\alpha(s) = -1 + \beta(s)$ ), совпадающему с результатом работы<sup>/6/</sup>. Анализ двухчастичных диаграмм Фейнмана более общего вида показывает, что учет какой-либо неприводимой диаграммы в потенциале позволяет получить асимптотику лестничной диаграммы, составленной из этой неприводимой с помощью итераций квазипотенциального уравнения. В этом смысле квазипотенциальные уравнения эквивалентны уравнению Бете-Солпитера.

Так как в  $\lambda\phi^3$ -теории  $T_n \sim \frac{1}{t}$  (с точностью до логарифмических множителей), то из результатов работы<sup>/3/</sup> следует, что квазипотенциальная амплитуда, при учете любого конечного порядка теории возмущений в потенциале, мероморфна в области  $\text{Re} \ell > -1$  и аналитична по  $g$  при  $g = 0$ . Это не противоречит тому, что сумма диаграмм, рассмотренных в работе<sup>/7/</sup>, может иметь ветвления при  $\ell = 2\alpha(\frac{s}{4}) - 1$ , поскольку эти диаграммы не двухчастичны и никакое конечное приближение в квазипотенциале не позволяет получить их бесконечную сумму. Заметим, однако, что точка ветвления не попадает в область  $\text{Re} \ell > -1$ , если  $\lambda$  столь мало, что нет резонансов и связанных состояний, появляющихся лишь при  $a > 0$ . (На наш взгляд, причиной возникновения этой точки ветвления является то, что реакции могут идти с образованием в промежуточном состоянии сложных частиц).

Как легко видеть, в  $g\phi^4$ -теории метод Фредгольма<sup>/3/</sup> неприменим. Рассмотрим вклад простейших диаграмм рис. 2 в квазипотенциал. Здесь также  $V_n \equiv 0$ . Низшее приближение для потенциала (рис. 2а) есть

$$V_2^+ = (t - 4m^2) \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dt'}{t' - t} \frac{(-8\pi g^2)}{\sqrt{t'(t' - 4m^2)}} = 8\pi g^2 \log \frac{t}{m^2}. \quad (7)$$

Асимптотика  $V_2^+$  при  $t \rightarrow \infty$  имеет вид:

$$V_2^+ = 32\pi^2 g^3 \left(\log \frac{t}{m^2}\right)^2 = (t - 4m^2) \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dt'}{t' - t} \frac{(-64\pi^2 g^3)}{\sqrt{t'(t' - 4m^2)}}. \quad (8)$$

Вообще спектральная функция  $n$ -го приближения  $r^{(n)}$  имеет асимптотику  

$$r^{(n)} \underset{\nu \rightarrow \infty}{\sim} a^{(n)} + b^{(n)} \log\left(\frac{\nu}{m^2}\right) + \dots$$

Уравнение для волновой функции

$$(k^2 - p^2) \phi_\ell(p) = \int_0^\infty \frac{2\pi dq}{\sqrt{q^2 + m^2}} F_\ell(p, q; k^2) \phi_\ell(q) \quad (9)$$

в случае  $g\phi^4$  теории сводится к задаче  $\phi = \hat{K}\phi$  с симметричным, но не вполне непрерывным оператором  $\hat{K}$ , так что применение теории Фредгольма приводит к расходящимся рядам. Можно, однако, показать, что при  $Re\ell > 0$  оператор  $\hat{K}$  — ограниченный карлемановский оператор. Заметим, далее, что  $\hat{K} = \hat{K}_0 + \hat{K}'$  где  $\hat{K}_0 = \hat{K} | \frac{1}{\sqrt{q^2 + m^2}}$  а  $\hat{K}'$  вполне непрерывный оператор, и поэтому непрерывный спектр для  $\hat{K}_0$  и  $\hat{K}$  один и тот же.  $\hat{K}_0$  может иметь полюса при  $\ell = 0, -2, \dots$ , причем при  $\ell = 0$  потенциал  $\frac{1}{\sqrt{q^2 + m^2}}$  дает полюс первого порядка, а  $\frac{1}{V_3}$  — полюс второго порядка. Положим  $\hat{K}_0 = \frac{g}{\ell} \hat{K}_1 + \frac{g^3}{\ell^2} \hat{K}_2 + g^2 \hat{K}_3$ , где  $\hat{K}_{1,2,3}$  — ограниченные карлемановские операторы и  $\hat{K}_3$  не имеет особенностей в окрестности точки  $\ell = 0$ . При достаточно малых  $g$  уравнение  $\phi = \hat{K}_0 \phi$  может иметь решение лишь в малой окрестности точки  $\ell = 0$ . Положим поэтому,  

$$\Lambda = \frac{\ell}{g}$$
 Тогда

$$\Lambda \phi = g \left( \hat{K}_1 + \frac{\hat{K}_2}{\Lambda} \right) \phi + g^2 \Lambda \hat{K}_3 \phi \quad (10)$$

Учитывая ограниченность операторов  $\hat{K}_{1,2,3}$ , мы предположим, что спектральное множество  $\hat{K}_0$  расположено в окрестности точки  $\Lambda = 1$ . В этом случае вторым членом в правой части (10) можно при  $g \rightarrow 0$  пренебречь. Выберем теперь операторы  $\hat{K}_1$  и  $\hat{K}_2$  (к ним можно добавлять выражения, равные нулю при  $\ell = 0$ ) так, чтобы привести уравнение (10) к импульсному представлению обычного дифференциального уравнения Шредингера. Для этого в формулу (11) работы [1] подставим асимптотическое разложение  $Q_\ell(z) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\ell + 1)}{\Gamma(\ell + 3/2)(2z)^{\ell+1}} + \dots$  и, заменив  $(p^2 + q^2 + \nu)^{-1/2}$  на  $\nu^{-1/2} + O(\nu^{-3/2})$ , вновь вернемся к  $Q_\ell$  с помощью асимптотического разложения. В результате найдем для  $\phi = \frac{\phi}{\sqrt{p}}$  уравнение

$$(k^2 - p^2) \bar{\phi}_\ell(p) = \int_0^\infty dq \int_{-m^2}^\infty d\nu r(\nu, k^2) \frac{2\pi\gamma(\ell)}{\sqrt{\nu}} Q_{\ell-1/2} \left( \frac{p^2 + q^2 + \nu}{2pq} \right) \bar{\phi}_\ell(q), \quad (11)$$

где  $\gamma(\ell) = \frac{[\Gamma(\ell + 1)]^2}{(\ell + 1/2)[\Gamma(\ell + 1/2)]}$ . Для волновой функции  $\bar{u}_\ell(r) = \int_0^\infty dp \bar{\phi}_\ell(p) J_{\ell-1/2}(pr)$  в  $r$ -пространстве находим

$$\bar{u}_\ell''(r) + \left[ k^2 - \frac{\ell^2 - 1/4}{r^2} \right] \bar{u}_\ell(r) = \bar{V}(r, k^2) \bar{u}_\ell(r), \quad (12)$$

где

$$\bar{V}(r, k^2) = 2\pi^2 \gamma(\ell) \int_{4m^2}^{\infty} d\nu \frac{r(\nu, k^2) \cdot e^{-\sqrt{\nu} r}}{\sqrt{\nu} r}, \quad (13)$$

$$r(\nu, k^2) = (\nu - 4m^2) \sigma(\nu, k^2) \underset{\nu \rightarrow \infty}{=} -8\pi g^2 - 64\pi^2 g^3 \log\left(\frac{\nu}{m^2}\right), \quad (14)$$

$$\bar{V}(r, k^2) \underset{r \rightarrow 0}{=} -\frac{(8\pi g)^2}{r^2} + 2(8\pi g)^3 \frac{\log(2\pi r)}{r^2}. \quad (15)$$

Учитывая первый член в (15), найдем, что  $\bar{u}_\ell(r) = r$ , так что амплитуда рассеяния содержит точки ветвления  $\ell = \pm (8\pi g) + O(g^2)$  (ср. /8/). Поэтому асимптотика ее при  $t \rightarrow \infty$  будет  $-\frac{t^{|\ell|}}{(\log \frac{t}{m^2})^{3/2}}$ , что соответствует результатам, найденным в случае уравнения Бете-Солпитера значительно более сложным способом /9/. В работе /10/ показано, что учет второго члена в (15) приводит к неаналитической зависимости от  $g$ .

Автор благодарен Б.А. Арбузову, Н.Н. Боголюбову, А.В. Ефремову, А.А. Логунову, Р.М. Мурадян, А.Н. Тавхелидзе, Р.Н. Фаустову и О.А. Хрусталеву за весьма ценные обсуждения.

### Л и т е р а т у р а

1. А.Т. Филиппов. Препринт ОИЯИ Р-1483, Дубна, 1983. Phys. Lett. (в печати).
2. А.А. Логунов, И.Т. Тодоров, А.Н. Тавхелидзе, О.А. Хрусталева. Nuovo Cim., 30, 134 (1963).
3. Б.А. Арбузов, А.А. Логунов, А.Т. Филиппов, О.А. Хрусталева. Препринт ОИЯИ Р-1318, Дубна, 1983; ЖЭТФ (в печати).
4. О.И. Завьялов, М.К. Поливанов, С.С. Хоружий. ЖЭТФ, 45, 1654 (1983).
5. А.В. Ефремов. Препринт ОИЯИ Р-1242, Дубна, 1983.
6. Polkinghorne. Journ. Math. Phys., 4, 503 (1963).
7. Б.А. Арбузов, А.А. Логунов, А.Н. Тавхелидзе, Р.Н. Фаустов. Phys. Lett., 2, 150 (1962).
8. S.Mandelstam. Pegge Cuts. Препринт Birmingham (1963).
9. Б.А. Арбузов, Б.М. Барбашов, А.А. Логунов, Нгуен Ван Хьеу, А.Н. Тавхелидзе, Р.Н. Фаустов, А.Т. Филиппов. Phys. Lett., 4, 272 (1963).
10. R.F.Sawyer. Complex Angular Momentum in Perturbation Theory. Препринт (1963).
11. Б.А. Арбузов, А.Т. Филиппов, О.А. Хрусталева. Препринт ОИЯИ Р-1458, Дубна (1983). Phys. Lett. (в печати).

Рукопись поступила в издательский отдел  
17 декабря 1983 г.

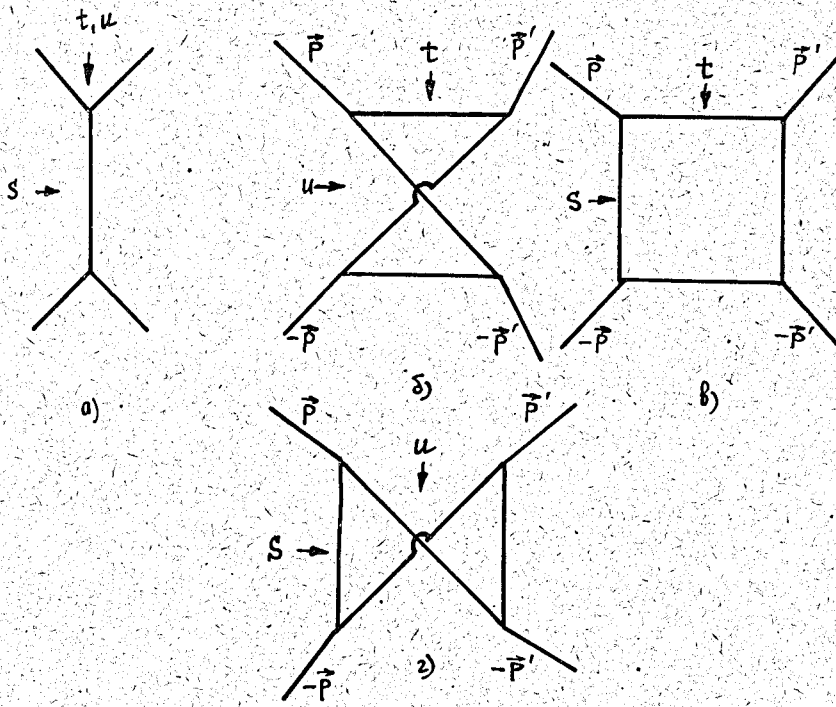


Рис. 1.

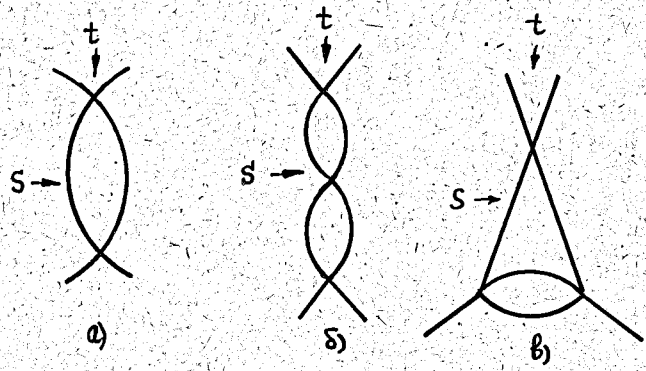


Рис. 2.