ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Л.Г. Заставенко

Р-1491

# К ТЕОРИИ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ /С УЧЕТОМ САМОДЕЙСТВИЯ/

1 - одномерный случай

Дубна 1964

Л.Г. Заставенко

Р-1491



# К ТЕОРИИ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ /С УЧЕТОМ САМОДЕЙСТВИЯ/

## 1 - одномерный случай

Направлено в ЖЭТФ



Дубна 1964

1.1. Хорошо известно, что существующая /классическая/ теория взаимодействия частиц с полем является логически незамкнутой. Например, функционал действия

$$\int ds\,(m - g\phi) + \int dx\; dt\; \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_a} \right)^2 + \phi^2 \right]$$

приводит обычным образом к следующим "уравнениям движения":

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{dx_k}{ds} (m - g\phi) \right] = g \frac{\partial \phi}{\partial x_k}, \qquad /1/$$

$$\left( - \frac{\partial^2}{\partial x_a^2} + 1 \right) \phi = g \sqrt{1 - \dot{x}^2(t)}\; \delta(x - x(t)). \qquad /2/$$

Из /2/ следует, что функция $\frac{\partial \phi}{\partial x_k}$ при $x = x(t)$ претерпевает скачок, поэтому значение $\frac{\partial \phi}{\partial x_k}$ при $x = x(t)$ не определено: между тем именно эта неопределенная величина входит в уравнение /1/. Таким образом, система уравнений /1/,/2/ недостаточна для определения входящих в нее функций.

В случае большей размерности трудность усугубляется тем, что поле принимает на траектории бесконечное значение.

Указанная трудность, как отмечено выше, хорошо известна. Хорошо известно также, что она является истоком трудностей с расходимостями в квантовой теории поля.

Менее хорошо известно, что уже давно дан логически безукоризненный путь преодоления этой трудности /в классике/ /Дирак[9]/. Судя по тому, как делаются ссылки на работу[9], этот достигнутый Дираком прогресс остался не понятым /см. например[6,7,8]/. В серии статей, которая начинается настоящей работой, мы намерены: А/ повторить рассмотрения[9] более подробным и формальным образом, что и само по себе кажется целесообразным ввиду важности полученного в[9] результата; в частности, мы улучшим рассмотрение, данное в приложении[9], и докажем высказанное в[9], на наш взгляд, без доказательства, утверждение о независимости результата от формы трубки; Б/ подробно рассмотреть вопрос о законах сохранения и классе допустимых уравнений: уравнение, полученное в[9], является простейшим, но отнюдь не единственно возможным; мы более внимательно просмотрим весь класс допустимых уравнений, с тем чтобы выяснить, нет ли среди этих уравнений более приемлемого, чем взятое Дираком.

1.2. В настоящей работе мы ограничиваемся одномерным случаем. В этом случае простейшее уравнение /19/ из полученного нами класса допустимых уравнений /см. п. 2.8/ обладает тем свойством, что оно не имеет других решений для свободного движения частицы, кроме равномерных и прямолинейных движений. Приведенное в п. 2.9 исследование приводит к предположению, что /19/ – единственное уравнение из числа допустимых, обладающее этим свойством. Полностью доказать это предположение нам не удалось.

1.3. С точки зрения физической интерпретации, данной в /9/, уравнение /19/, в отличие от уравнения, рассмотренного в /9/, описывает точечную частицу.

1.4. Дадим формулировку задачи "регуляризации" уравнения движения и попутно поясним содержание статьи.

а/ При заданном уравнении поля надо найти уравнение движения, которое обеспечивает существование у системы поле-частицы обычных интегралов движения, то есть энергии-импульса $\mathcal{P}_k$ и ковариантного момента количества движения $\mathcal{L}$. Ввиду наличия правой части в уравнении поля импульс $p_k$ и момент количества движения $\ell$ поля не сохраняются /см. /6/,/7/ и /9//; приписав системе поле-частицы, помимо полевых величин $p_k$ и $\ell$, дополнительные импульс и "момент" $q$ и $k$ /п. 2.4/ и определив полные импульс и момент, как сумму полевых и дополнительных, – обеспечиваем сохранение $\mathcal{P}_k$ и $\ell$.

Очевидно, полевые величины $p$ и $\ell$ задаются как функции предшествующего движения системы поля и частиц. Зададим еще дополнительный импульс $q_k$ как некоторую функцию предшествующего движения; тогда уравнение сохранения импульса /11/ становится уравнением движения /п. 2.7/.

б/ При $t \to \pm\infty$, когда частицы удаляются друг от друга и выходят из сферы действия поля, импульс $\mathcal{P}_k$ и момент $\mathcal{L}$ должны принимать обычный вид:

$$\mathcal{P}_k = \sum_a Z^a_k + p_{fk} \; ,$$

$$\mathcal{L} = i \sum_a \left[ Z^a_0 \, x^a_1(t) - t Z^a_1 \right] + \ell_f \; .$$

Здесь $a$ номер частицы, $x^a_1(t)$ и $v^a(t)$ – ее координаты и скорость, $z^a_0 = M_a/\sqrt{1-(v^a)^2}$, $z^a_1 = v^a z^a_0$. Импульс свободной частицы $z^a$ включает импульс "привязанного" к частице поля, наоборот, $p_f$ и $\ell_f$ суть импульс и момент свободного поля, рассеявшегося /при $t \to \pm\infty$ / во всем пространстве; они определяются согласно /3/ и /4/, если интеграл в /3/ брать по части пространства /бесконечно/ удаленной от частиц. Условие б/ существенно ограничивает первоначально весьма большую, согласно а/, свободу выбора дополнительного импульса /см. п. 2.6 и п. 2.8/.

в/ Наконец, условие отсутствия у уравнения движения без внешнего поля других решений, кроме равномерных и прямолинейных движений, согласно предположению, указанному в п. 1.2, совершенно уничтожает всякую свободу в выборе дополнительного импульса и сводит весь класс допустимых уравнений движения к единственному уравнению /19/ /п. 2.10/.

1.5. Таким образом, если верно предположение п. 1.2, линейное уравнение поля в рассмотренном нами одномерном случае в некотором смысле /см. п. 1.4/ однозначно определяет уравнение движения частиц. Уместно отметить, что такой результат противоречит распространенной точке зрения /см., например,[1], стр. 21/.

## § 2. Регуляризация уравнения /1/

2.1. Рассмотрим импульс $p_k$ и "момент" $\ell$ скалярного поля

$$p_k = i \int T_{k4}\, dx \quad , \tag{3}$$

$$\ell = i \int dx \, ( x_1 T_{44} - x_4 T_{14} ) \; . \tag{4}$$

Здесь

$$T_{ik} = - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} + ½\, \delta_{ik} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \right)^2 + \phi^2 \right] . \tag{5}$$

Поскольку уравнение поля /2/ - неоднородное, величины $p_k$ и $\ell$ меняются со временем:

$$\frac{dp_k}{dt} = - ( T_{k1} + \dot{x}(t)\, T_{k4} ) \Big|_{x(t)-\epsilon}^{x(t)+\epsilon} \tag{6}$$

и

$$\frac{d\ell}{dt} = x(t) \frac{dp_4}{dt} - i\, t \frac{dp_1}{dt} \; . \tag{7}$$

2.2. Полученные формулы требуют знания скачков производных поля на траектории частицы. Поле $\phi$ мы представим в виде $\phi = \phi_0 + \phi_1$, где $\phi_0$ - решение однородного уравнения Клейна-Гордона, а

$$\phi_1 = \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{t} ds(\tau)\, J_0 \left( \sqrt{(t-\tau)^2 - (x - x(t)^2)} \right) \eta \left[ (t-\tau)^2 - (x - x(\tau))^2 \right] , \tag{8}$$

здесь /и далее/ $ds(\tau) = d\tau \sqrt{1 - \dot{x}^2(\tau)}$ , $\eta(z)$ - функция скачка; для дальнейшего заметим соотношение: $\phi_1 [x(t), t] \to \frac{g}{2}$ при $t \to \pm \infty$ .

Разрывы производных на траектории имеет только $\phi_1$ ; из /8/ получаем

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\Big|_{x(t)-\epsilon}^{x(t)+\epsilon} = -g\, n_k \,, \qquad /8a/$$

где $n_k$ – единичный вектор нормали к траектории:

$$n_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\dot{x}^2(t)}} \,, \quad n_1 = i\, \dot{x}\,(t)\, n_4 \quad .$$

2.3. Подставив /8a/ в /6/, получим /с учетом /5//:

$$\frac{d\, p_k}{d\, s(t)} = -\, g\, \phi_k^{reg} \quad , \qquad /9/$$

здесь

$$\phi_k^{reg} = \tfrac{1}{2}\Big[\, \frac{\partial \phi}{\partial x_k}\Big|_{x(t)+\epsilon} + \frac{\partial \phi}{\partial x_k}\Big|_{x(t)-\epsilon} \,\Big] \,. \qquad /10/$$

2.4. Если мы хотим, чтобы система поля и взаимодействующих с ним частиц – сингулярностей имела сохраняющиеся величины импульса и "момента", нам следует приписать этой системе, помимо полевых величины $p_k$ и $\ell$, также дополнительные импульс и "момент", $q_k$ и $k$, изменение которых вдоль траектории согласно /9/ и /7/ определено формулами:

$$q_k\,(2) - q_k(1) = g \int_1^2 ds \;\; \phi_k^{reg} \quad , \qquad /11/$$

$$k(2) - k(1) = g \int_1^2 ds\, [\, x_1\, \phi_4^{reg} - x_4\, \phi_1^{reg}\, ] \;. \qquad /12/$$

Определив полные импульс и "момент" $\mathcal{P}_k$ и $\mathcal{L}$ как сумму $p_k$ и $q_k$, $\ell$ и $k$, очевидно, будем иметь

$$\frac{d\, \mathcal{P}_k}{d\, t} = 0 \,, \qquad \frac{d\, \mathcal{L}}{d t} = 0 \,.$$

2.5. Ввиду слабой сингулярности поля на траектории в рассматриваемом нами одномерном случае методом, изложенным в [2] на стр. 30, легко показать, что величины $p_k$ и $\ell$ обладают трансформационными свойствами вектора и скаляра, соответственно.

Это обеспечивает должные трансформационные свойства $\mathcal{P}_k$ и $\mathcal{L}$.

2.6. Рассмотрим траекторию $x_k\,(s)$, имеющую асимптоты при $t \to \pm\infty$

Физически такая траектория соответствует движению частицы, которая при $t\to\pm\infty$ находится в области пространства, свободной от внешних полей.

Импульс поля $P_k$ при $t\to\pm\infty$ распадается на две части:

а/ часть, связанную со свободным полем, рассеявшимся в пространстве;

б/ часть, связанную с полем, "привязанным" к сингулярности.

Из уравнения /2/ и соображений п. 2,5 следует, что часть б/ импульса поля пропорциональна $\frac{dx_k}{ds}$, причем коэффициент пропорциональности один и тот же при $t\to+\infty$ и $t\to-\infty$.

Полный вклад частицы в импульс рассматриваемой системы /такой вклад, разумеется, может быть однозначно выделен лишь при $t\to\pm\infty$ / складывается из части б/ импульса поля и дополнительного импульса /11/; чтобы этот вклад обладал обычными свойствами импульса свободной частицы, необходимо принять его равным $M\frac{dx_k}{ds}$ с коэффициентом пропорциональности $M$, одним и тем же при $t\to+\infty$ и $t\to-\infty$. Отсюда следует, что дополнительный импульс $q_k$ стремится к $m\frac{dx_k}{ds}$ при $t\to\pm\infty$ опять-таки с коэффициентом $m$, одним и тем же при $t\to+\infty$ и $t\to-\infty$.

Это и есть условие, ограничивающее траектории, по которым может двигаться частица /из /11/ ясно, что это условие выполнено отнюдь не для всех траекторий/.

2.7. Не составляет труда получить класс уравнений движения, совместных с условием п. 2.6. Так как векторы $\frac{dx_k}{ds}$ и $\frac{d^2x_k}{ds^2}$ ортогональны, то вектор $q_k$ можно представить в виде:

$$q_k = F_1\frac{dx_k}{ds} + F_2\frac{d^2x_k}{ds^2}. \qquad /13/$$

Согласно /11/ $\frac{dq_k}{ds} = g\,\phi_k^{reg}$, отсюда

$$\frac{dx_a}{ds}\frac{dq_a}{ds} = \frac{dx_a}{ds}\phi_a^{reg}.$$

Из /8/ и /9/ следует важное соотношение

$$\frac{dx_a}{ds}\phi_a^{reg} = \frac{d\phi}{ds}, \qquad /14/$$

с помощью которого из /13/ находим

$$F_2 \left[ \frac{d^2 x_a}{ds^2} \right]^2 = - \frac{d}{ds} ( F_1 + g\phi ) . \qquad /15/$$

Таким образом, /13/ можно переписать в виде:

$$\frac{d}{ds} \left[ (m - g\phi) \frac{dx_k}{ds} \right] = g\phi_k^{ret} + \frac{d_k}{ds} \left[ F \frac{dx_k}{ds} - \frac{d^2 x_k}{ds^2} \frac{1}{\omega^2} \frac{dF}{ds} \right] \qquad /16/$$

/Мы переопределили $F_1$ и обозначили $\omega^2 = \left( \frac{d^2 x_i}{ds^2} \right)^2$ / .

Считая в /16/ $F$ заданной инвариантной функцией предшествующего движения частицы и значений поля в части $t' < t$ светового конуса с вершиной в точке $t, x(t)$, можем рассматривать /16/ как уравнение движения x/.

При таком понимании /16/ определяет /весьма обширный/ класс уравнений движения частиц, которые совместно с уравнением поля /2/ обеспечивают сохранение энергии и импульса системы поля и частиц.

Дополнительный импульс, соответствующий уравнению /16/, есть

$$q_k = \frac{dx_k}{ds} ( m - g\phi - F_1 ) + \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 x}{ds^2} \frac{dF}{ds} \qquad /17/$$

/см. /13//.

Класс допустимых функций $F$ в /16/ уменьшается условием п. 2.6, которое можно свести к требованию стремления $F$ к нулю при $t \to \pm\infty$ .

2.8. Более тяжелое ограничение на класс функций $F$ следует из условия, которое получается заменой в рассуждении п. 2.6 импульса "моментом". Это условие можно сформулировать в виде: $k - x_1 q_4 + x_4 q_1 \to 0$ при $t \to \pm\infty$ . Отсюда, подставив /16/ в /12/ и проинтегрировав по частям, получим:

$$\int \frac{ds}{\omega^2} \frac{dF}{ds} \left[ \frac{dx_1}{ds} \frac{d^2 x_4}{ds^2} - \frac{dx_4}{ds} \frac{d^2 x_1}{ds^2} \right] = 0 . \qquad /18/$$

Согласно определению $\omega^2$ , данному в п. 2.7, здесь $[\ldots] = \omega$ , поэтому условию /18/ удовлетворяет любая функция $F$ , зависящая только от аргумента $\omega$ . Это вместе с требованием, чтобы функции $F$ и $\frac{1}{\omega} \frac{dF}{ds}$

x/ /16/ является системой двух уравнений с одной неизвестной функцией $x(t)$; соотношение /15/ обеспечивает совместность этих уравнений.

обращались в нуль при $\omega = 0$, то есть для свободного движения /см.п.2.7/, определяет /возможно, не полностью/ класс уравнений движения частиц /16/, совместных с уравнением поля /2/ /и условиями, связанными с существованием сохраняющихся импульса и "момента" системы поля и частиц – см. п. 2.6/.

Из соображений инвариантности при несобственных преобразованиях Лоренца мы будем считать $F(-\omega) = F(\omega)$. Кроме того, мы будем предполагать $F(\omega)$ аналитической при $-\infty < \omega < +\infty$.

2.9. Наконец, привлечение динамических соображений позволяет еще более сузить класс допустимых уравнений движения.

а/ Поскольку частица отрицательной массы может, излучая, ускоряться, то мы ограничимся рассмотрением лишь частиц с положительной массой: $m' + \frac{g^2}{4} > 0$; $\frac{g^2}{4}$ – полевая масса, $m' = m - \frac{g^2}{2}$ – см. п. 2.2.

б/ Пусть коэффициент $A$ разложения $F(\omega) = A\omega^2 + \dots$ отличен от нуля и положителен. Тогда линеаризация уравнения /16/ дает:

$$m'\ddot{x} - A x^{(IV)} + \frac{g^2}{2} \int_0^\infty \frac{J_1(z)}{z} dz \, [x(t-z) - x(t) + \dot{x}(t)] = 0$$

/ср. п. 2.11/; это уравнение при $A > 0$, $m' + \frac{g^2}{4} > 0$ имеет решение $x(t) \approx e^{\lambda t}$, $\lambda > 0$.

Таким образом, случай $A > 0$ мы можем исключить на том основании, что частица в отсутствие внешнего поля может совершать движение, отличное от равномерного и прямолинейного /более точно– движение $x(t) = 0$ при $A > 0$ неустойчиво/.

в/ При $A < 0$ ситуация сложнее; уравнение

$$m'\lambda^2 - A\lambda^4 + \frac{g^2}{2}\left(\sqrt{1+\lambda^2} - 1\right) = 0$$

для определения характеристического показателя $\lambda$ положительных корней не имеет; однако если величина $|A|$ не слишком велика, $|A| < |A_0|$ /и $m' + \frac{g^2}{4} > 0$/ это уравнение имеет пару комплексно-сопряженных корней в правой полуплоскости.

При $|A| \to |A_0|$ каждый из этих корней сливается с симметричным ему относительно мнимой оси корнем характеристического уравнения так, что при $-|A_0| - \epsilon < A < -|A_0|$, $\epsilon > 0$, характеристическое уравнение имеет при $Im\ \lambda > 0$ два чисто мнимых корня, скажем, $\lambda_1(A)$ и $\lambda_2(A)$; первый из которых с ростом $|A|$ движется от точки возникновения вниз, а второй вверх; корень $\lambda_1(A)$ определен, очевидно, при всех $A < -|A_0|$.

В случае чисто мнимых характеристических показателей вопрос об устойчивости не решается первым приближением. Мы рассмотрели первую поправку к линейному приближению; ее оказалось достаточно, чтобы доказать неустойчивость решения $x(t)=0$ при $-i\lambda_1(A) > ½$ ; при $-i\lambda_1(A) < ½$ становится необходим учет поправок более высокого порядка; мы этого не делали. Таким образом, есть основания ожидать, что случай $A<0$ исключается по той же причине, что случай $A>0$.

г/ Пусть теперь $A=0$, так что $F(\omega)=B\omega^{2n}+\dots$ где $B\neq 0$, $n\geq 2$ / $n$ – целое/. Выписанное выше линеаризованное уравнение при $A=0$, $m'+\frac{\varepsilon^2}{2}>0$, $m'<0$ имеет решение $e^{\lambda t}$, $\lambda>0$, поэтому мы ограничимся случаем $m'>0$ /оставив без рассмотрения возможность $m'=0$ /. Итак, пусть $m'>0$ и $B\neq 0$. Вместо линеаризованного уравнения мы получаем:

$$m'\ddot{x} - B\frac{d^2}{dt^2}(\ddot{x})^{2n-1} + \text{интегральный член} = 0.$$

Обращение в нуль коэффициента при старшей производной создает возможность неединственности решения. Эта возможность реализуется при $B>0$, когда выписанное уравнение допускает решение: $x(t)=0$ при $t<t_0$, $x(t)=C(t-t_0)^a+\dots$ при $t>t_0$; здесь $a=2+\frac{1}{n-1}$, $BC^{2(n-1)}[a(a-1)]^{2n-1}=m'$. Собственно говоря, от таких "лишних" решений свободного уравнения можно избавиться, потребовав непрерывности всех производных функции $x(t)$; однако это требование заведомо не выполнимо для движения во внешнем поле, которое само может не иметь непрерывных производных: взяв внешнее поле с "разрывом" вида

$\phi_0(x,t)=(t-x)^{a-1}+\dots$ при $t>x$, $\phi_0(x,t)=0$

при $t<x$,

получаем решение $x(t)$ указанного выше вида; для определения $C$ на этот раз получаем уравнение, которое имеет два разных корня. Итак, случай $B>0$ нехорош тем, что при наличии "разрывов" определенного рода во внешнем поле, уравнения движения в этом случае не дают возможности однозначно определить траекторию.

Случай $B<0$ наиболее сложен, и нам не удалось достоверно выявить присущего этому случаю дефекта; обратив, однако, внимание на то, что уравнение

$$m'\ddot{x} + |B|\frac{d^2}{dt^2}(\ddot{x})^{2n-1} = 0$$

имеет периодические решения, частота которых неограниченно растет при стремлении амплитуды к нулю, естественно предположить, что наше уравнение при $B<0$ допускает решение в виде колебаний, амплитуда и период которых стремится к нулю при $t\to-\infty$. Поскольку главная часть интегрального члена для колебаний большой частоты есть $\frac{\varepsilon^2}{2}\ddot{x}$, то уравнение для предполагаемого нами решения есть $m'\dddot{x} + |B| \frac{d^2}{dt^2} (\ddot{x})^{2n-1} + \frac{g^2}{2} \dot{x} = 0$.

Нам не удалось установить, имеет ли это уравнение решение с интересующими нас свойствами.

д/ к обсуждавшимся выше недостаткам уравнений /16/ с нетривиальным выбором $F(\omega)$ можно добавить еще следующий: пусть $F(\omega) \approx \omega^p$ при $\omega \to \infty$. Тогда уравнение /16/, по-видимому, имеет решения с асимптотикой $x(t) = t - at^{1-2a} + \ldots$ при $t \to -\infty$ ; здесь $a = \frac{p}{p-1}$ и $a \neq 0$. /Обоснование состоит в том, что указанная выше функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{ds} \left[ (m' + F) \frac{dx}{ds} - \frac{1}{\omega^2} \frac{dF}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} \right] = 0$$

и подстановка этой функции в интегральный член дает вклад более высокого порядка малости/.

2.10. Таким образом, можно ожидать, что всякий выбор $F(\omega)$, отличный от тривиального $F = const$, приводит к уравнению движения, имеющему лишние решения; в частности, равномерное и прямолинейное движение свободной частицы оказывается для такого уравнения неустойчивым.

Здесь уместно отметить, что только при $F = 0$, $m' > 0$ решение $x(t') = 0$ доставляет минимум функционалу энергии. Действительно, функционал энергии состоит у нас из двух частей - энергий полевой и дополнительной. Полевая энергия в случае отсутствия внешнего поля определяется функций /8/. Таким образом, зависимость полевой энергии от траектории весьма сглаженная; никакого особого влияния значения производных функций $x(t)$ на величину этой части энергии не оказывают. Наоборот, дополнительная энергия /17/ явно зависит при $F \neq 0$ от $\ddot{x}$ и от $\dddot{x}$. Поэтому, меняя траекторию несущественным /с точки зрения влияния на величину полевой энергии/ образом, можно сделать дополнительную энергию как угодно большой / положительной или отрицательной/.

Итак, необходимым условием минимума функционала энергии является отсутствие последнего члена в /17/, что требует исчезновения $F$.

Аналогичным образом устанавливается, что условие $m' > 0$ при $F = 0$ также необходимо для минимума энергии[x/].

---

x/ Мы используем следствия того факта, что дополнительная энергия зависит от высокочастотной асимптотики Фурье-образа функции $x(t)$ существенно сильнее, чем полевая энергия. Сам этот факт уже отмечен в литературе[5].

Надо иметь в виду, что из того, что решение $x(t)=0$ не доставляет минимума функционалу энергии, еще, вообще говоря, не следует неустойчивости этого решения /см. [3] /, хотя в некоторых случаях такая связь и имеет место /например, в механике - минимум потенциальной энергии устойчив, седло - неустойчиво; более сложный пример см. [10] /.

Именно поэтому понадобилось исследование, проведенное в п. 2.9.

Наоборот, из того, что решение $x(t)$ доставляет минимум функционалу энергии, очевидно, следует устойчивость этого решения.

Нам удалось проверить положительность второй вариации энергии при $m'>0$, $F=0$. Это дает достаточно надежное основание утверждать, что уравнение

$$\frac{d}{ds}\left\{\left[m'-g\left(\phi-\frac{g}{2}\right)\right]\frac{dx_k}{ds}\right\}=g\,\phi_k^{reg}\quad ,m'>0 \qquad /19/$$

лишних решений не имеет.

2.11. Можно показать, что $(R^2=-[x_\alpha(\tau)-x_\alpha(t)]^2)$

$$\phi_{1k}^{reg}=\frac{g}{2}\left[\int_{-\infty}^{t}ds(\tau)\,J_0'(R)\,\frac{x_k(\tau)-x_k(t)}{R}-\frac{dx_k(t)}{ds}\right] \qquad /20/$$

/см. /8/ и /10//; подставив $\phi=\phi_0+\phi_1$, $\phi_k^{reg}=\phi_{1k}^{reg}+\frac{\partial\phi_0}{\partial x_k}$ в /19/ и выразив $\phi_1$ и $\phi_{1k}^{reg}$ через траекторию по формулам /8/ и /20/, получаем окончательный вид уравнения движения частицы во внешнем поле. Представляет интерес выписать это уравнение в нерелятивистском приближении.

Откидывая нелинейные члены и пренебрегая $x\frac{d\phi_0}{dt}$ по сравнению с $\frac{\partial\phi_0}{\partial x}$, получаем:

$$(m')\frac{d^2x_k}{dt^2}=g\frac{\partial\phi_0}{\partial x}+\frac{g^2}{2}\left[\int_{-\infty}^{t}d\tau\;I_0'(R)\frac{x(\tau)-x(t)}{R}-\frac{dx(t)}{dt}\right], \qquad /21/$$

здесь $R^2=(t-\tau)^2-[x(t)-x(\tau)]^2$.

С нашей точностью, очевидно, имеем $R=t-\tau$. Подставим еще в интеграл $x(\tau)-x(t)=\dot{x}(t)(\tau-t)+\dots$ и проинтегрируем почленно; воспользовавшись формулой [4], стр. 428

$$\int_0^\infty J_1(x)\,x^k\,dx=\frac{\Gamma\left(1+\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{k}{2}\right)}\,2^k ,$$

получаем уравнение

$$\left(m'+\frac{g^2}{4}\right)\frac{d^2x}{dt^2}=g\frac{\partial\phi_0}{\partial x}-\frac{g}{8}\frac{d^4x}{dt^4}+\dots$$

Добавок к массе $\frac{\varepsilon^2}{4}$, как нетрудно видеть из /3/, /5/, представляет собою полевую массу частицы.

Полученное уравнение весьма отличается от соответствующего предела уравнения, данного в [9].

Любопытной особенностью уравнения /21/ является наличие у него /в поле осциллятора $\phi_0 = -cx^2$ с собственной частотой менее единицы/ решений в виде незатухающих колебаний.

Существование таких решений не означает отсутствия излучения. Дело в том, что излучение, согласно уравнению /2/, возможно только с частотами более единицы; такие частоты появляются при учете высших степеней $x(t) - x(\tau)$ в разложении функций Бесселя в /8/ и /20/ и необходимо приводят к затуханию.

## § 3. Заключение

Рассмотрим взаимодействие двух одинаковых частиц. Согласно п. $2.1_1$ между ними действуют силы притяжения, что, если пренебречь потерями на излучение, создает возможность финитного переодического движения. Принято считать, что учет излучения приводит к затуханию такого движения, так что по прошествии достаточно большого времени система застынет в положении равновесия.

Мы хотим здесь обратить внимание на то, что такая картина, по-видимому, несовместима с полученными нами уравнениями движения.

Именно, положение равновесия $x_1(t) = x_2(t) = 0$ для рассматриваемой системы двух частиц может быть неустойчивым, ввиду того что ему соответствует величина $\phi_1[x(t), t]$, равная $\varepsilon$ а не $\frac{\varepsilon}{2}$, как для свободного движения одной частицы. Таким образом, коэффициент при ускорении равен $m' - \varepsilon^2/2$ и при $m' < \varepsilon^2/2$ отрицателен; но тогда частица не колеблется около положения равновесия, а вообще говоря, монотонно удаляется от него /взяв число участвующих в движении частиц достаточно большим, всегда можно сделать этот коэффициент отрицательным/.

Представляло бы интерес выяснить на основании уравнения /19/, что в действительности происходит с рассмотренной выше системой. Напрашивается предположение, что рассматриваемая система где-то "застрянет", так и не опустившись в положение равновесия.

Пользуюсь случаем поблагодарить Б.Н. Валуева, проф. М.А. Маркова,

и проф. Хр.Я. Христова за интерес к работе и ценные замечания.

## Литература


1. Л. Инфельд, Е. Плебаньский. Движение и релятивизм, ИЛ., Москва, 1962.
2. В. Гайтлер. Квантовая теория излучения. ИЛ., Москва, 1956, стр. 30.
3. В.И. Арнольд. ДАН СССР. 137 , 255 /1960/.
4. Г.Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, часть 1, ИЛ., Москва, 1949.
5. М.А. Марков. ЖЭТФ, 16, 800 /1946/.
6. P.R.Feinman, I.A.Wheeler. Rev. Mod. Phys., 17, 157 (1945).
7. Ю.М. Широков, Д.Г. Саитов. ЖЭТФ, 31, 113 /1956/.
8. Г. Вентцель. Введение в квантовую теорию волновых полей. ОГИЗ, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1947.
9. P.A.M. Dirac. Proc. Roy. Soc., A, 167, 148 (1938).
10. Л.Г. Заставенко. Журнал вычислительной математики и мат. физики /в печати/.



Рукопись поступила в издательский отдел
10 декабря 1963 г.