1483

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.Т. Филиппов

Р - 1483

ОБ УСТРАНЕНИИ РАСХОДИМОСТЕЙ В КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Дубна 1963

А.Т. Филиппов

Р-1483

ОБ УСТРАНЕНИИ РАСХОДИМОСТЕЙ В КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Дубна 1963

В настоящей заметке показано, как избавиться от расходимостей, возникающих при построении квазипотенциальных [1],[2] уравнений в теории поля. Для простоты ограничимся рассмотрением скалярного поля φ со взаимодействием $\lambda\varphi^3$ или $g\varphi^4$. Распространение результатов на более сложные случаи очевидно.

Сформулируем сначала общий метод построения квазипотенциала (ср. [2]). Имея в виду $g\varphi^4$ – теорию, напишем для амплитуды рассеяния M спектральное представление с одним вычитанием:

$$M(s,t,u) = M_0(s) + (t-\nu_0)\int d\nu \, \frac{M^{(t)}(\nu,s)}{\nu - t} + (u-\nu_0)\int d\nu \, \frac{M^{(u)}(\nu,s)}{\nu - u}, \tag{1}$$

где в с.ц.и. $s = 4(\kappa^2+m^2)$, $t = -(\vec{p}-\vec{p}')^2$, $u = -(\vec{p}+\vec{p}')^2$; $p^2 = p'^2 = \kappa^2$.

Четная и нечётная проекции амплитуды рассеяния

$$M^{\pm}(s,t) = 2M_0(s) + (t-\nu_0)\int d\nu \, \frac{\rho^{\pm}(\nu,s)}{\nu - t}, \tag{2}$$

где $\rho^{\pm}(\nu,s) = M^{(t)}(\nu,s) \pm M^{(u)}(\nu,s)$, связаны с M тождеством $M(s,t,u) = \frac{1}{2}\left[M^{+}(s,t) + M^{-}(s,t) + M^{+}(s,u) - M^{-}(s,u)\right]$. Введем амплитуды $T^{\pm}(\vec{p},\vec{p}')$, которые удовлетворяют уравнениям

$$T^{\pm}(\vec{p},\vec{p}') = V^{\pm}\left((\vec{p}-\vec{p}')^2,\kappa^2\right) + \int d^3q \, \frac{V^{\pm}\left((\vec{p}-\vec{q})^2,\kappa^2\right) T^{\pm}(\vec{q},\vec{p}')}{\sqrt{q^2+m^2}\,(\kappa^2-q^2)} \tag{3}$$

и при $p^2 = p'^2 = \kappa^2$ совпадают с $M^{\pm}(s,t)$. Потенциалы $V^{\pm}$ определяются по теории возмущений. Если[x/] $V = \sum_{n=1}^{\infty} g^n V^{(n)}$, $T = \sum_{n=1}^{\infty} g^n T^{(n)}$, $M = \sum_{n=1}^{\infty} g^n M^{(n)}$, то определим

$$V^{(n)}\left((\vec{p}-\vec{p}')^2,\kappa^2\right) = \left[T^{(n)}(\vec{p},\vec{p}')\right] - \sum_{m=1}^{n-1}\int d^3q \left[\frac{V^{(n-m)}\left((\vec{p}-\vec{q})^2,\kappa^2\right) T^{(m)}(\vec{q},\vec{p}')}{\sqrt{q^2+m^2}\,(\kappa^2-q^2)}\right], \tag{4}$$

где квадратные скобки обозначают следующую операцию над функцией от p^2, p'^2, $(\vec{p}-\vec{p}')^2$: а) положим $p^2 = p'^2 = \kappa^2$, б) продолжим получившуюся функцию от $(\vec{p}-\vec{p}')^2$ и κ^2 на любые значения p и p'. Если потребовать, чтобы $T^{(n)}$ совпадало при $p^2 = p'^2 = \kappa^2$ с $M^{(n)}$, то можно определить $V^{(n)}$ через $M^{(n)}$ по индукции с помощью рекурентной формулы[xx/]:

$$V^{(n)} = \left[T^{(n)}\right] - \sum_{\substack{m_1\geq 1,\, m_2\geq 1 \\ m_1+m_2=n}} \left[V^{(m_1)} \times V^{(m_2)}\right] - \ldots - \sum_{\substack{m_1\geq 1,\ldots,\, m_n\geq 1 \\ m_1+\ldots+m_n=n}} \left[V^{(m_1)} \times \ldots \times V^{(m_n)}\right]. \tag{5}$$

---

x/ В дальнейшем значки $\pm$ опускаются.

xx/ Здесь $\times$ обозначает свертку с весом $\frac{1}{\sqrt{q^2+m^2}\,(\kappa^2-q^2)}$, так что, например, уравнение (3) можно написать в виде: $T = V + V\times T$.

Нетрудно убедиться, что как в $g\varphi^4$ - теории, так и в $\lambda\varphi^3$ - теории в выражении (5) имеются расходящиеся интегралы. Действительно, и в том и в другом случае потенциалы $V^{(m_i)}$ содержат части $V_0^{(m_i)}(\kappa^2)$, зависящие только от κ^2, так что $V^{(m_i)} = V_0^{(m_i)} + U^{(m_i)}$, где $U^{(m_i)} \to 0$ при $(\vec{p}-\vec{p}')^2 \to \infty$. В любой теории расходится, например, выражение $\left[V_0^{(m_i)} \times V_0^{(m_i)}\right] = V_0^{(m_i)} V_0^{(m_i)} \int d^3q \left[\sqrt{q^2+m^2}\,(\kappa^2 - q^2)\right]^{-1}$ и т.д. Можно показать, что в $\lambda\varphi^3$ - теории члены, содержащие только $U^{(m_i)}$, сходятся и что всякий член, содержащий хотя бы одно $V_0^{(m_i)}$, зависит только от κ^2. Таким образом, все расходящиеся выражения могут дать вклад только в $V(\kappa^2)$. С другой стороны, разлагая решение уравнения (4) с потенциалом $V = V_0(\kappa^2) + U((\vec{p}-\vec{p}')^2, \kappa^2)$ в борновский ряд, легко найти, что V_0 дает вклад лишь в $T_0(\kappa^2)$, т. е в S-волну. Поэтому, отбрасывая V_0 и решая уравнение (4) с потенциалом U, мы найдем амплитуду рассеяния с точностью до S - волны.

В $g\varphi^4$ -теории расходятся даже члены, содержащие только $U^{(m_i)}$. Нетрудно, однако, показать по индукции, что $V^{(m_i)}$ можно представить в виде

$$V^{(m_i)} = V_0^{(m_i)} + U^{(m_i)} = V_0^{(m_i)}(\kappa^2) - \left[\nu_0 + (\vec{p}-\vec{p}')^2\right] \int d\nu \, \frac{\sigma^{(m_i)}(\nu, \kappa^2)}{\nu + (\vec{p}-\vec{p}')^2} . \tag{6}$$

В низших приближениях это, очевидно, следует из наличия такого представления для $M^{(n)}$. Подставляя в (5) предположение индукции (6) и аналогичное представление для $\left[T^{(n)}\right]$, преобразуя все члены в (5) к спектральной форме [2] и делая в полученном спектральном представлении одно вычитание, найдем для $V^{(m_i)}$ представление вида (6), причем бесконечности содержатся только в $V_0^{(m_i)}(\kappa^2)$. Отбрасывая $V_0(\kappa^2)$, мы и в этой теории найдем амплитуду рассеяния с точностью до S - волны.

Изложенные выше соображения показывают, что возникновение расходимостей связано с наличием в амплитуде M непродолжаемой в ℓ -плоскость части, зависящей только от κ^2. Поэтому переход к ℓ -плоскости позволяет с самого начала избавиться от расходимостей. Положим [3]

$$T(\vec{p}, \vec{p}') = (2pp')^{-1} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) f_\ell(p, p')\, P_\ell\!\left(\frac{\vec{p}\vec{p}'}{pp'}\right) , \tag{7}$$

$$V\left((\vec{p}-\vec{p}')^2; \kappa^2\right) = (2pp')^{-1} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) F_\ell(p, p'; \kappa^2)\, P_\ell\!\left(\frac{\vec{p}\vec{p}'}{pp'}\right) \tag{8}$$

и воспользуемся для аналитического продолжения в ℓ -плоскость соотношениями

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx \, \frac{P_\ell(x)}{z-x} = Q_\ell(z) \; ; \quad \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx \, \frac{x P_\ell(x)}{z-x} = z\, Q_\ell(z) . \tag{9}$$

Тогда получим, что из (6) следует спектральное представление

$$F_\ell(p,p';\kappa^2) = 2pp'V_0\delta_{\ell 0} + \int d\nu\,\sigma(\nu,\kappa^2)\Big[(\nu-\nu_0)\,Q_\ell\Big(\frac{p^2+p'^2+\nu}{2pp'}\Big) + 2pp'\,\delta_{\ell 0}\Big]. \qquad (10)$$

Таким образом, и в $\lambda\varphi^3$ -теории и в $g\varphi^4$ -теории можно пользоваться для F_ℓ представлением

$$F_\ell(p,p';\kappa^2) = \int d\nu\,\tau(\nu,\kappa^2)\,Q_\ell\Big(\frac{p^2+p'^2+\nu}{2pp'}\Big), \qquad \ell \neq 0. \qquad (11)$$

Отличие возникает только в асимптотике τ при $\nu\to\infty$. Если теперь с самого начала сформулировать всю процедуру построения квазипотенциала в ℓ -представлении, что не представляет труда, то при $\ell\neq 0$ никаких расходимостей не возникает. Покажем это для второго члена в правой части формулы (5):

$$\int_0^\infty \frac{2\pi\,dq}{\sqrt{q^2+m^2}\,(\kappa^2-q^2)}\int_{m_0^2}^\infty d\nu_1\,\tau(\nu_1,\kappa^2)\,Q_\ell\Big(\frac{p^2+q^2+\nu_1}{2pq}\Big)\int_{m_0^2}^\infty d\nu_2\,\tau(\nu_2,\kappa^2)\,Q_\ell\Big(\frac{p'^2+q^2+\nu_2}{2qp'}\Big). \qquad (12)$$

Сходимость этого выражения определяется сходимостью интеграла

$$\int^\infty \frac{dq}{q^3}\int^\infty d\nu\,\tau(\nu_1,\kappa^2)\Big(\frac{2pq}{p^2+q^2+\nu_1}\Big)^{\ell+1}\int^\infty d\nu_2\,\tau(\nu_2,\kappa^2)\Big(\frac{2p'q}{p'^2+q^2+\nu_2}\Big)^{\ell+1}. \qquad (13)$$

В $g\varphi^4$ -теории /4/ $\tau^{(m)} \underset{\nu\to\infty}{\sim} a^{(m)} + b^{(m)}\log(\nu/\nu_0)+\ldots$; поэтому интеграл (12) сходится, если $\mathrm{Re}\,\ell > 0$. В $\lambda\varphi^3$ -теории $\tau^{(m)} \underset{\nu\to\infty}{\sim} \frac{1}{\nu}\,[a^{(m)} + b^{(m)}\log(\nu/\nu_0)]$ и поэтому получаем сходимость в области $\mathrm{Re}\,\ell > -1$. Аналогично можно убедиться, что остальные члены в (5) сходятся в тех же соответственно областях ℓ -плоскости.

Построим в заключение квазипотенциальное уравнение для волновой функции в r -пространстве. Волновая функция $\varphi_\ell(p) = \sqrt{p^2+m^2}\,\delta(p-\kappa) + f_\ell(p,\kappa)(\kappa^2-p^2)^{-1}$ преобразуется в $u_\ell(r) = \int_0^\infty dp\sqrt{pr}\,J_{\ell+\frac{1}{2}}(pr)\,\varphi_\ell(p)$, так что u_ℓ удовлетворяет уравнению

$$u_\ell'' + \Big[\kappa^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\Big]u_\ell = V(r,\kappa^2)\int_0^\infty dr'\,K_\ell(r,r')\,u_\ell(r'), \qquad (14)$$

где

$$V(r,\kappa^2) = \int d\nu\,\tau(\nu,\kappa^2)\,e^{-\sqrt{\nu}\,r}, \qquad K_\ell(r,r') = \pi\sqrt{\frac{r'}{r}}\int_0^\infty \frac{q\,dq}{\sqrt{q^2+m^2}}\,J_{\ell+\frac{1}{2}}(qr)\,J_{\ell+\frac{1}{2}}(qr').$$

Появление в правой части уравнения (14) нелокального оператора связано с учётом релятивистских эффектов. $K_\ell(r,r')$ представляет собою колоколообразную функцию с радиусом "размазывания" $\sim \hbar/mc$, и в нерелятивистской области её можно эффективно заменить δ -функцией (с точностью до постоянного множителя). Это можно сделать лишь в том случае, если несущественно поведение потенциала вблизи $r=0$. Для изучения асимптотики амплитуды рассеяния при $t\to\infty$ существенна, однако, асимптотика потенциала при $r=0$. В работе /4/ показано, как можно приближенно построить эффективный локальный потенциал в этом случае. В $\lambda\varphi^3$ -теории $V_{\mathrm{eff}}^{(m)} \underset{r\to 0}{\sim}$

$\sim \quad (A + B \log(r/r_0) + \ldots)$ в $g\varphi^4$ -теории $V^m_{eff} \underset{r \to 0}{\sim} \frac{1}{r^2}(A + B\log(r/r_0) + \ldots)$.
Таким образом, теории с расходимостями отличаются наличием сингулярности при $r \to 0$.

Автор искренне благодарен Б.А. Арбузову, Н.Н. Боголюбову, А.В. Ефремову, А.А. Логунову, А.Н. Тавхелидзе, Р.Н. Фаустову и О.А. Хрусталеву за ценные обсуждения.

Литература

1. A.A.Logunov and A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cimento, 29, 380 (1963).
2. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze, I.T.Todorov, O.A.Khrustalev. Nuovo Cim., 30, 134 (1963).
3. Б.А. Арбузов, А.А. Логунов, А.Т. Филиппов, О.А. Хрусталев. Препринт ОИЯИ Р-1318, Дубна, 1963; ЖЭТФ (в печати).
4. А.Т. Филиппов. Препринт ОИЯИ (в печати).

Рукопись поступила в издательский отдел
2 декабря 1963 г.