



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

В.В.Бабилов, Г.Н.Вялов, Г.Индраш

P-1480

К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
ВЫВОДА ИОННОГО ПУЧКА
В КЛАССИЧЕСКОМ ЦИКЛОТРОНЕ

Rev. Roum. Phys., t 9, n 6, p. 559-5

Дубна 1963

В.В.Бабилов, Г.Н.Вялов, Г.Индраш

P-1480

22/4/3 48

К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
ВЫВОДА ИОННОГО ПУЧКА
В КЛАССИЧЕСКОМ ЦИКЛОТРОНЕ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Дубна 1963

1. Введение

Расчет отклоняющей системы (дефлектора) в циклотроне является одной из основных задач при проектировании ускорителей. В нерелятивистских (классических) циклотронах наиболее употребительным способом вывода пучка ионов можно считать создание между пластинами дефлектора сильного электрического поля, статического или высокочастотного, с целью отклонения частиц с внутренней орбиты в область более слабого магнитного поля.

Хотя уравнения движения заряженных частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях хорошо известны, их решение и анализ при расчете дефлектора являются не совсем простыми. Дело в том, что для получения оптимального варианта отклоняющей системы необходимо выполнение ряда дополнительных условий. В частности, электрическое поле должно само определяться движением ионов. Входная апертура и ширина канала дефлектора зависят от характера движения частиц и разброса начальных условий. Профилирование пластин для создания фокусирующего неоднородного электрического поля также определяется траекторией частиц в заданном неоднородном магнитном поле. При этом следует учесть, что для различных ионов и для различных траекторий меняются не только начальные условия на входе в дефлектор, но и величина и конфигурация магнитного поля в зоне дефлектора.

Таким образом, становится очевидным, что для получения оптимального решения необходимо рассмотрение очень большого числа вариантов дефлектора при выполнении ряда дополнительных условий. Используемые до последнего времени графо-аналитические ^{/1/} и аналитические ^{/2/} методы расчета являются, с одной стороны, приближенными, а с другой, весьма трудоемкими, особенно для расчета большого числа вариантов. Дополнительные трудности возникают при рассмотрении не электростатического, а высокочастотного вывода. Следовательно, можно поставить задачу решения точных уравнений движения с помощью электронно-счетной машины, позволяющей провести анализ многих вариантов при различных значениях параметров дефлектора и различных начальных условиях движения ионов. Такой подход к проблеме вывода был недавно описан в работе Овенса ^{/3/}.

В настоящей работе предложены два способа описания движения ионов в отклоняющей системе, пригодные в равной мере как для электростатического, так и высокочастотного вывода. Такое описание представляется нам более удобным, чем принятое в работе ^{/3/}. С помощью данного метода расчета был проведен конкретный анализ электростатической и высокочастотной систем вывода для циклотронов с диаметром полюсов 120 и 150 см.

2. Уравнения движения иона в медианной плоскости дефлектора

Векторное уравнение движения иона с массой m и зарядом Ze в зоне дефлектора имеет вид:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = Ze \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{H}] \right). \quad (1)$$

Его можно записать в цилиндрической системе координат r, θ, z , связанной с магнитным центром ускорителя (при этом удобно положить $H_z < 0$), в виде системы трех уравнений (точкой обозначено дифференцирование по времени):

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 &= Ze \left(E_r + \frac{r\dot{\theta}}{c} H_z - \frac{\dot{z}}{c} H_\theta \right), \\ mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} &= Ze \left(E_\theta + \frac{\dot{z}}{c} H_r - \frac{\dot{r}}{c} H_z \right), \\ m\ddot{z} &= Ze \left(E_z + \frac{\dot{r}}{c} H_\theta - \frac{r\dot{\theta}}{c} H_r \right). \end{aligned} \quad (2)$$

В дальнейшем будут рассматриваться только траектории ионов, лежащие в медианной плоскости ($z = \dot{z} = 0$). При этом будем предполагать, что магнитное поле в этой плоскости обладает аксиальной симметрией ($H_\theta|_{z=0} = H_r|_{z=0} = 0$), а пластины дефлектора симметричны относительно плоскости $z=0$, т.е. $E_z|_{z=0} = 0$. Движение иона описывается тогда уравнениями:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 &= Ze \left(E_r + \frac{r\dot{\theta}}{c} H_z \right), \\ mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} &= Ze \left(E_\theta - \frac{\dot{r}}{c} H_z \right). \end{aligned} \quad (3)$$

При движении в медианной плоскости должно тождественно выполняться соотношение:

$$\dot{r} E_r + r\dot{\theta} E_\theta = 0. \quad (4)$$

Таким образом, систему (3) надо решать при дополнительном условии (4).

Нормальное к вектору скорости иона электрическое поле, как и магнитное поле, не производит работы. Поэтому энергия частиц, а, следовательно, и квадрат ее скорости остаются постоянными при движении по каналу дефлектора

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = v_0^2 = const. \quad (5)$$

Здесь v_0 - абсолютное значение скорости иона, входящего в начало дефлектора с координатами r_0, θ_0 . В существовании этого интеграла движения нетрудно убедиться и непосредственно с помощью уравнений (3) и (4).

Из (5) следует:

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{r} \sqrt{1 - \frac{r^2}{v_0^2}} \quad (8)$$

Используя уравнение (4), можно тогда найти:

$$E_r = E \sqrt{1 - \frac{r^2}{v_0^2}} \quad (7)$$

где абсолютная величина электрического поля:

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} \quad (8)$$

Соотношение (7) отражает в явном виде тот факт, что направление электрического поля, а, следовательно, и форма пластин дефлектора определяются траекторией иона. Подставляя (8) и (7) в первое уравнение системы (3), получаем для радиального движения частицы, самосогласованного с электрическим полем

$$\ddot{r} - \frac{v_0}{r} \left(1 - \frac{r^2}{v_0^2}\right) = v_0 \omega_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{v_0^2}} \left(\frac{H_z}{H_0} + \frac{cE}{v_0 H_0} \right) \quad (9)$$

Здесь $H_0 = -H_{z0} > 0$; Z -компонента магнитного поля на конечном радиусе r_0 ; где находится начало дефлектора. Соответствующая ларморовская частота $\omega_0 = \frac{zeH_0}{mc}$.

Угловая координата траектории частицы $\theta(t)$ при этом выражается простой квадратурой от решения $r(t)$ уравнения (9):

$$\theta(t) = \theta_0 + v_0 \int_0^t \frac{\sqrt{1 - \frac{r^2}{v_0^2}}}{r} dt \quad (10)$$

Удобно перейти к безразмерным переменным

$$\tau = \omega_0 t, \quad \rho = \frac{r}{r_0} \quad (11)$$

Тогда для радиального движения уравнение (9) примет вид (штрихом обозначено дифференцирование по τ):

$$\rho'' - \frac{1}{\rho} (1 - \rho'^2) = \sqrt{1 - \rho'^2} [\varepsilon(\tau, \lambda) - h(\rho)] \quad (12)$$

где введены обозначения (ℓ - расстояние, пройденное частицей внутри канала дефлектора):

$$h(\rho) = -\frac{H_z(\rho)}{H_0}, \quad \lambda = \frac{\ell}{r_0}, \quad \varepsilon(\tau, \lambda) = \frac{cE(\tau, \lambda)}{v_0 H_0} \quad (13)$$

Как уже отмечалось выше, здесь предполагается, что статическое магнитное поле обладает азимутальной симметрией в медианной плоскости. Электрическое поле может как зависеть непосредственно от времени (высокочастотный вывод), так и изменяться вдоль пластины дефлектора, если ширина канала отклоняющей системы не является постоянной. Фактически это означает дополнительную зависимость от време-

ни. Действительно, так как скорость иона в зоне дефлектора постоянна, то длина пройденного пути просто пропорциональна времени: $l = v_0 t$. Поэтому

$$\lambda = \lambda(t) = \frac{v_0}{r_0 \omega_0} \tau. \quad (14)$$

В случае совпадения центра кривизны траектории при входе в дефлектор с магнитным центром, являющимся началом выбранной системы координат, $\frac{v_0}{r_0 \omega_0} = 1$, и λ просто равна τ . В частности, для плоского дефлектора с коэффициентом угловой расходимости α , т.е. если расстояние между пластинами d изменяется, как

$$d(\lambda) = d_0 (1 + \alpha \lambda), \quad (15)$$

будем иметь^{x)} (V, ω, φ - амплитуда, частота и фаза высокочастотного напряжения):

$$\mathcal{E}(\tau, \lambda(\tau)) = \frac{cV}{v_0 H_0 d_0} \frac{1}{1 + \frac{\alpha v_0}{r_0 \omega_0} \tau} \cos\left(\frac{\omega}{\omega_0} \tau + \varphi\right). \quad (16)$$

Выражение для угловой переменной θ принимает в безразмерных обозначениях вид (положено $\theta_0 = 0$):

$$\theta(\tau) = \int_0^\tau \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\rho} d\tau. \quad (17)$$

Здесь под знаком интеграла стоит решение ρ уравнения (12).

Форма пластин дефлектора определяется, очевидно, осевой траекторией пучка ионов, для которой начальными условиями являются:

$$\rho(0) = 1, \quad \rho'(0) = \rho'_0, \quad (18)$$

где $\rho'_0 < 1$ - константа, зависящая от направления траектории иона при входе в дефлектор. В случае совпадения центра кривизны орбиты с магнитным центром ускорителя $\rho'_0 = 0$. Итак, уравнение (12) должно решаться при начальных условиях (18).

Найденная таким образом функция $\rho(\tau)$ и полученная затем из (17) функция $\theta(\tau)$ позволяют построить функцию $\rho(\theta)$, т.е. форму осевой траектории, а, следовательно, и форму пластин дефлектора.

Как известно¹⁴⁾, радиальная дефокусировка пучка в отклоняющей системе из-за сильной неоднородности магнитного поля может быть скомпенсирована приданием пластинам дефлектора гиперболического профиля. Параметр гиперболичности α , определяющий профиль пластин

^{x)} Благодаря малости ширины канала дефлектора d по сравнению с радиусом его кривизны R , ($\frac{d}{R} \ll 1$) для плоского дефлектора выражение $E = \frac{V}{d}$ является хорошим приближением.

$$\left(\frac{2y}{d} + \frac{1}{x}\right) - \frac{4z^2}{d^2} = \left(\frac{1}{x} \pm 1\right)^2, \quad (18)$$

и распределение электрического поля в медианной плоскости

$$E = \frac{V}{d} \left(1 + 2x \frac{y}{d}\right) \quad (20)$$

могут быть легко вычислены, как функции вдоль пластины дефлектора. Действительно, имеем^{/4/}

$$x = + \frac{v}{2c} \frac{d}{E_0} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad E_0 = \frac{V}{d}, \quad (21)$$

где y - координата в медианной плоскости, нормальная к траектории, и

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{\partial H_z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{dH_z}{dr} \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \left(\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = 0\right). \quad (22)$$

Производная $\frac{dH_z}{dr}$ известна, так как известен спад поля, а производная

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{v_0}{v} = \frac{r\dot{\theta}}{v_0} \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{v_0^2}} = \sqrt{1 - \rho'^2}, \quad (23)$$

т.е. является величиной, непосредственно вычисляемой при решении уравнения (12).

Таким образом, в обозначениях (13) имеем окончательно $\left(\delta = \frac{d}{r_0}\right)$

$$x = -\frac{1}{2} \frac{\delta}{\varepsilon} \frac{d\hbar}{d\rho} \sqrt{1 - \rho'^2}. \quad (24)$$

3. Пример расчета дефлектора

В качестве примера расчета дефлектора по описанному выше методу была рассмотрена электростатическая и высокочастотная системы вывода пучка ускоренных ионов из циклотрона с диаметром полюсов 120 см^{/5/}.

Напряженность магнитного поля в центре циклотрона взята равной 14200 э, что соответствует нормальному режиму ускорения дейтронов. При этом величина спада на конечном радиусе $r_0 = 52,5$ см равна 1,5%.

Расчеты производились на электронно-счетной машине ОИЯИ. Осевые траектории находились по формулам (12) и (17), причем магнитное поле $\hbar(\rho)$ задавалось в виде таблицы, а электрическое поле определялось формулой (дефлектор с постоянным расстоянием между пластинами)

$$\varepsilon(\tau) = j + \alpha \sin(\tau + \varphi), \quad (25)$$

где параметры j и α отвечают соответственно постоянной и высокочастотной составляющей потенциала, подаваемого на пластину (13).

Абсолютная величина полной напряженности электрического поля E ограничивалась диэлектрической прочностью вакуумного промежутка и была принята равной 100 кВ/см при электростатическом выводе и 125 кВ/см при высокочастотном варианте.

При расчете плоского электростатического ($\alpha = 0$) дефлектора были рассмотрены значения j , лежащие в интервале 0,2-0,3, что соответствует возможности^{18/} ускорения на данном циклотроне кроме дейтронов также и ионов C_{12}^{+4} , N_{14}^{+5} , O_{16}^{+8} . Полученные результаты показаны на рис. 1. Как и следует ожидать, более тяжелые ионы с большими j при заданном магнитном поле выводятся более эффективно. Поэтому для их вывода можно использовать дефлектор с меньшей угловой протяженностью.

Произведенные расчеты для высокочастотного ($j=0$; $\alpha=0,25$) варианта дефлектора позволили исследовать эффективность отклонения лучка $\Delta\rho$ в зависимости от начальной фазы отклоняющего напряжения φ на входе в дефлектор. Соответствующие зависимости для пластин различной угловой протяженности θ_0 в пределах изменения $\theta_0 = 40^\circ \div 90^\circ$ приведены на рис. 2.

Как видно из рис. 2, для реального случая, когда протяженность пластины составляет 90 или более градусов, наиболее выгодно расположить вход в дефлектор под углом 60° к оси резонансных линий.

С помощью формулы (24) была сделана оценка параметра гиперболичности профиля пластин для электростатического ($\alpha = 0$) варианта вывода. При этом параметр j был положен равным 0,16. Рассчитанное изменение профиля вдоль длины пластины λ показано на рис.3. На этом же рисунке указана соответствующая величина отклонения $\Delta\rho$. Существование двух областей с малой вариацией \mathcal{X} около малого ($\mathcal{X} \approx 0,3$) и максимального ($\mathcal{X}_{max} \approx 0,25$) значений указывает на возможность изготовления пластин в виде двух секций, плоского $\mathcal{X} = 0$ и гиперболического профиля $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{max} = const.$, так как изготовление пластин с переменным вдоль пластины профилем, конечно, затруднительно.

4. Второй способ описания движения в дефлекторах

Иногда для аналитического расчета дефлектора удобно использовать дифференциальные уравнения движения в иной форме. Радиус кривизны траектории иона в дефлекторе в меридианной плоскости определяется выражением:

$$R = \frac{R_0}{h(r) - \mathcal{E}(r, \theta)} \quad (26)$$

где R_0 - радиус кривизны конечной орбиты иона перед входом в дефлектор;
 $h(r) = \frac{H(r)}{H_0}$ - магнитное поле за конечным радиусом, нормированное к единице при $r=r_0$;
 $\mathcal{E}(r, \theta) = \frac{E(r, \theta)}{\beta H_0}$;

$\beta = \frac{v}{c}$ - безразмерная скорость иона;

$E(r, \theta)$ - напряженность электрического поля в дефлекторе.

Обычно соотношение (26) служит основой графо-аналитического метода расчета дефлектора.

Основу аналитического метода расчета отклоняющей системы могут составить дифференциальные уравнения траектории иона в следующей форме, просто выводимой из геометрических соображений:

$$\frac{dx}{d\theta} = \sin \delta; \quad (27)$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\cos \delta}{x} - \kappa, \quad \kappa = \kappa_0 (h - \epsilon); \quad (28)$$

$$\frac{d\theta}{d\theta} = \frac{\cos \delta}{x}. \quad (29)$$

Обозначения и смысл уравнений (27-29) легко понять из рис.4. Очевидно, эти уравнения полностью эквивалентны уравнениям (12) и (17), если иметь в виду тождества

$$\rho \equiv x, \quad \rho' \equiv \sin \delta.$$

Переменная δ имеет простой геометрический и физический смысл. В каждой точке δ определяет угол отклонения траектории иона от круговой орбиты, центр которой совпадает с центром циклотрона (иначе говоря, просто угол отклонения).

Уравнения (27-29) удобно использовать для определения осевой траектории в дефлекторе. Оптические свойства дефлектора, фокусировку пучка в нем, угловую расходимость, ширину пропускания и т.п. характеристики удобно исследовать с помощью уравнений для малых отклонений от осевой траектории. Если в дальнейшем обозначить через x, δ параметры осевой траектории, а через $u = \delta x$ и $\mu = \delta \delta$ - малые отклонения от u и δ , то в первом порядке по u и μ получаются следующие уравнения для малых отклонений:

$$\frac{du}{d\theta} = \mu \sin \delta, \quad (30)$$

$$\frac{d\mu}{d\theta} = -u \left[\frac{\cos \delta}{x^2} + \kappa_0 \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{x_1}{\cos \delta} \right) \right] - \mu \frac{\sin \delta}{x}, \quad (31)$$

где x_1 - модуль нормальной производной к траектории от величины $E(r, \theta)$.

Уравнения (30) и (31) следует дополнить уравнением для малых аксиальных отклонений:

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} = z \kappa_0 \left(x_1 + \cos \delta \frac{\partial h}{\partial x} \right). \quad (32)$$

Система уравнений (27-32) полностью описывает движение ионов в дефлекторе и может эффективно применяться для расчета параметров дефлектора.

Косинус угла отклонения $\cos \delta$ можно представить в следующей форме:

$$\cos \delta = \frac{1}{x} \left(\int_1^x \kappa x dx + \cos \delta_0 \right), \quad (33)$$

откуда находим величину ϵ_0 , определяющую электрическое поле в начале электростатического дефлектора.

$$\epsilon_0 = \frac{\kappa_0 \int_1^x h x dx - x \cos \delta + \cos \delta_0}{\kappa_0 \int_1^x \nu x dx} \quad (34)$$

(функция $\nu = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ определяет изменение электрического поля вдоль осевой линии дефлектора). Рассмотрим всевозможные электростатические дефлекторы для вывода ионов из точки с радиусом $x_0 = 1$ к точке x при заданном угле отклонения δ и при условии $\int_1^x \nu x dx = \text{const}$. (Последнему условию удовлетворяют, например, дефлекторы, в которых задано одно и то же распределение $\nu(x)$ как функция радиуса). В этом случае потенциал на дефлекторе $V \sim \epsilon_0$ является четной функцией начального угла отклонения δ_0 и убывает с ростом $|\delta_0|$. Поэтому для снижения отклоняющего напряжения при выводе ионов полезно формировать последние орбиты в циклотроне так, чтобы начальный угол отклонения δ_0 был больше нуля (отрицательный угол δ_0 также снижает ϵ_0 , но ценой удлинения дефлектора). Например, в стандартном варианте полутораметрового циклотрона с $r_0 \approx 66-67$ см. можно снизить отклоняющее напряжение в полтора - два раза при $\delta_0 = 0,015$ по сравнению с $\delta_0 = 0$. Для этого нужно сдвинуть центры конечных орбит перпендикулярно оси резонансных линий к дефлектору примерно на 1 см. При большем сдвиге можно еще более снизить величину отклоняющего напряжения. Этот сдвиг достигается соответствующим азимутальным возмущением магнитного поля.

Описанный метод применялся при расчете параметров отклоняющей системы с гиперболической формой пластин.

Использование самого простого метода интегрирования типа

$$\Delta x = \sin \delta \cdot \Delta b \quad (35)$$

(для уравнения (27) и аналогично для других уравнений) с шагом $\Delta b = 0,1$ ($\sim 6^\circ$) на обычной счетной машине типа "Мерседес" обеспечивает точность расчета, достаточную для проектирования дефлектора (десятиные доли процента, например, при вычислении осевой траектории).

Отклоняющее напряжение согласуется с расчетным значением с точностью порядка нескольких процентов, расхождение связано в основном с неточным знанием кривой спада $h(x)$ и неточностью в установке дефлектора.

В заключение авторы выражают благодарность Л.А.Смирновой за проведение расчетов на электронно-счетной машине.

Л и т е р а т у р а

1. Дж. Ливингуд. Принципы работы циклических ускорителей. ИИЛ, Москва, 1963.
2. I. Kokame, S. Yamashita. J Phys. Soc. Japan 11, 332 (1956).
3. H.C. Owens. Nucl. Instr. and Meth., 18, 19, 295 (1962).
4. А.А. Арзуманов, Е.С. Миронов. Атомная энергия, 6, 202 (1959).
5. А.Г. Алексеев и др. Атомная Энергия, 7, 199 (1959).
6. Г. Индреаш и Ю.Ц. Оганесян, Revue de Physique, 6, 347 (1961).

Рукопись поступила в издательский
отдел 30 ноября 1963 г.

Примечание при корректуре.

Когда рукопись статьи была послана в печать, мы получили препринт работы, в которой для теоретического исследования проблемы вывода пучка используются уравнения, аналогичные системе (27-29). ("Theoretical study of beam extraction by the method of curvilinear coordinates". Francis and Taylor, Institut du Radium, Laboratoire Joliot-Curie de Physique nucleaire. Orsay).

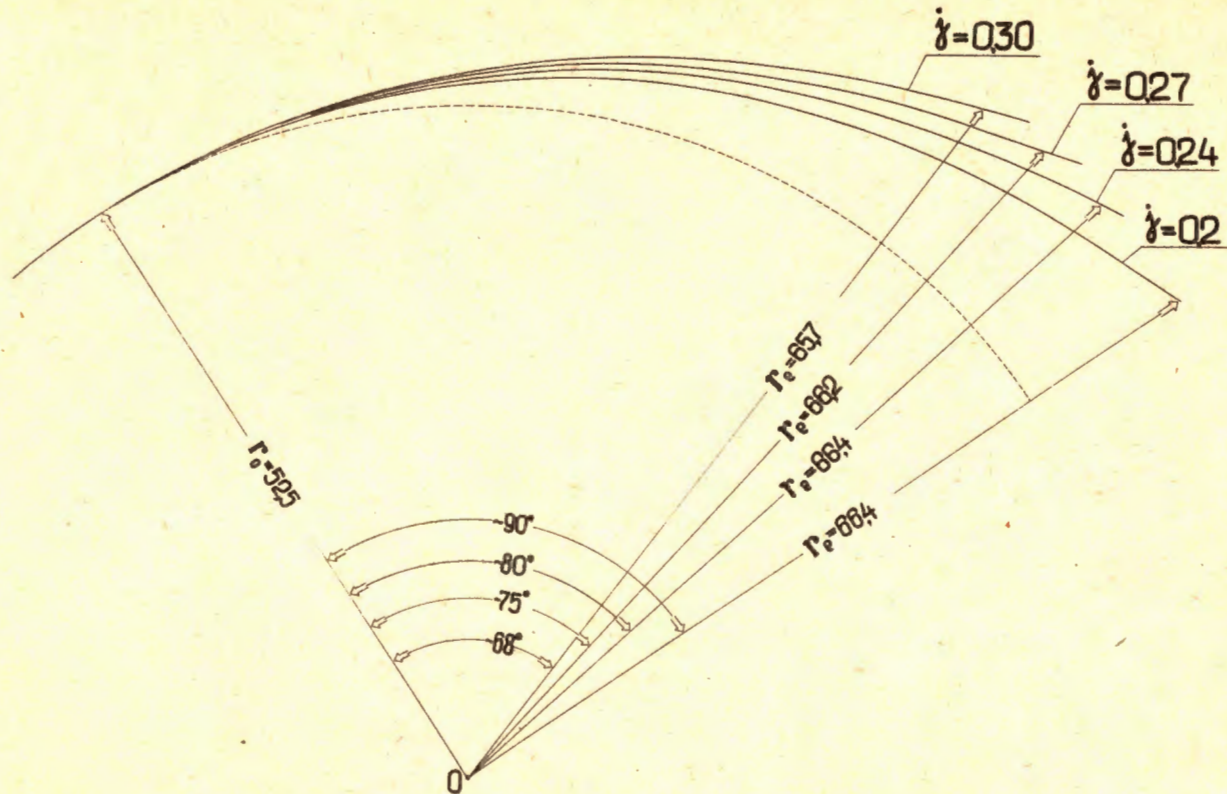


Рис. 1. Рассчитанные осевые траектории ионного пучка в плоском электростатическом дефлекторе циклотрона с диаметром магнитных полюсов 120 см для различных значений параметра $j = \frac{cE}{v_c H_0}$. Конечный радиус орбиты на входе в дефлектор $r_0 = 52,5$ см. Магнитное поле в центре $H_0 = 14200$ э.

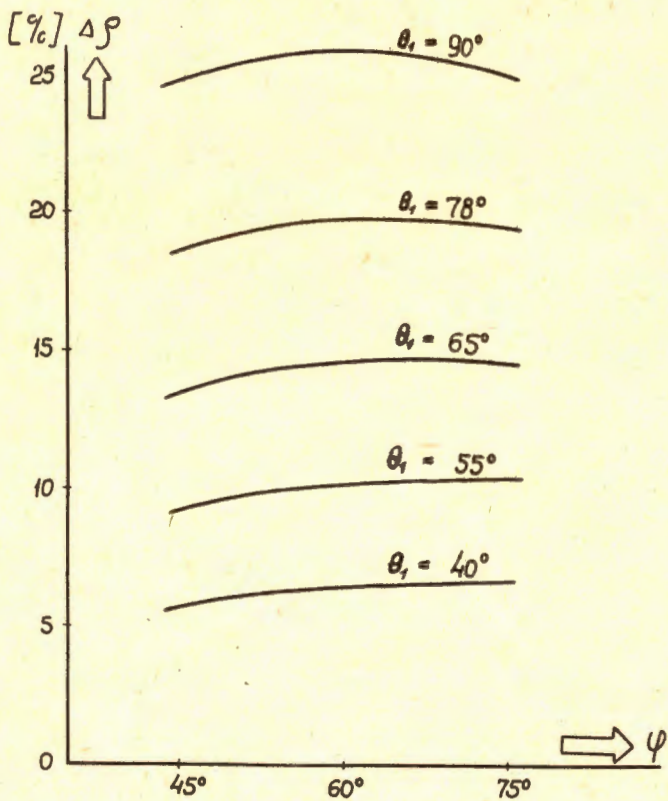


Рис. 2. Рассчитанная зависимость эффективности высокочастотного вывода ($j=0$) от начальной фазы φ отклоняющего напряжения на входе в дефлектор для пластин различной угловой протяженности. Расчет производился для $\alpha = 0,25$, $H_u = 14200$ э. $r_0 = 52,5$ см.

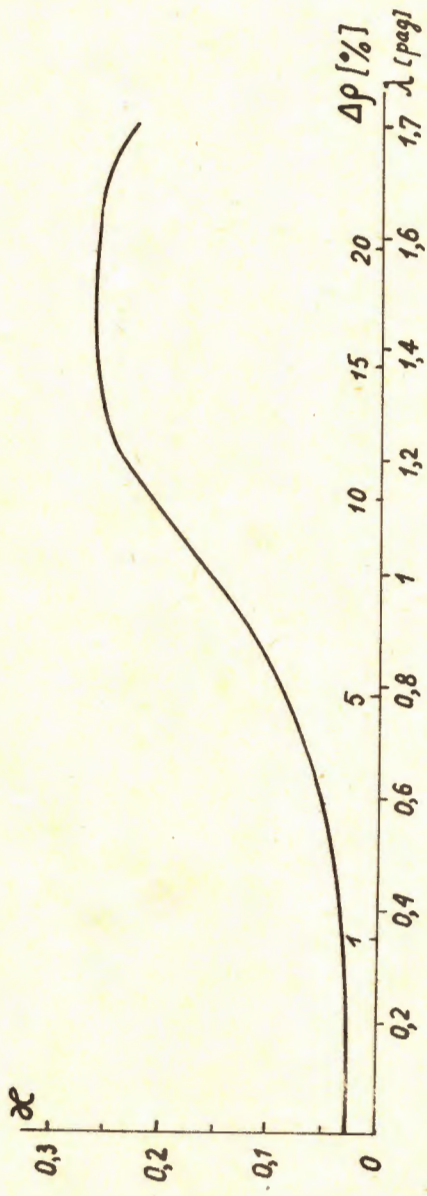


Рис. 3. Рассчитанная зависимость параметра гиперболичности как функция протяженности пластины λ и соответствующего относительного увеличения радиуса $\Delta\rho$. Значение параметров: $j = -0,16$, $H_4 = 14\ 200$ э, $r_0 = 52,5$ см., $\delta = 0,038$. Электростатический вывод ($\alpha = 0$).

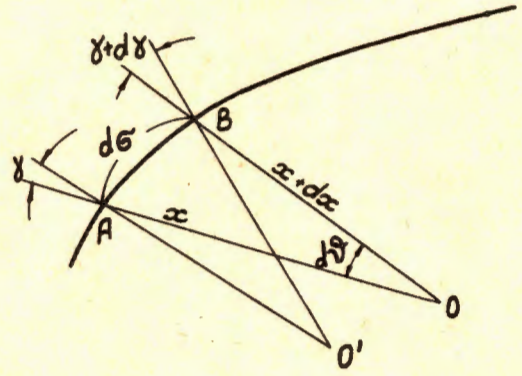


Рис. 4. Траектория иона в дефлекторе.

$$d\sigma = \frac{dl}{r_0} = AB - \text{элемент дуги в единицах } r_0 ;$$

$$OA = x = \frac{r}{r_0} ; \quad OB = x+dx ; \quad \gamma - \text{угол между радиус-вектором и нормалью к траектории.}$$

$$O'A = \frac{R}{r_0} = \frac{1}{k} - \text{радиус кривизны траектории в единицах } r_0 ;$$

$$O'B = \frac{R+dr}{r_0} .$$