

3
3-383



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Б.Н. Захарьев, С.Н. Соколов

P-1473

ЭФФЕКТ УСИЛЕННОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ
БАРЬЕРОВ ДЛЯ СЛОЖНЫХ ЧАСТИЦ

Annalen der Physik, 1964, T 14
B 5, S 229-232.

Дубна 1963

Б.Н. Захарьев, С.Н. Соколов

P-1473

ЭФФЕКТ УСИЛЕННОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ
БАРЬЕРОВ ДЛЯ СЛОЖНЫХ ЧАСТИЦ

2176/1

Дубна 1963

Гамильтониан системы двух частиц, взаимодействующих между собой с помощью потенциала $v_{12}(x_1 - x_2)$ и двигающихся во внешнем поле v_1 , которое действует на частицу 1 (случай действия внешнего поля на обе частицы рассматривается аналогично), имеет вид:

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + v_{12}(x_1 - x_2) + v_1(x_1). \quad (1)$$

Рассмотрим случай, когда v_{12} представляет собой бесконечную прямоугольную яму:

$$v_{12}(x_1 - x_2) = \begin{cases} 0 & |x_1 - x_2| < r \\ \infty & |x_1 - x_2| \geq r. \end{cases} \quad (2)$$

Пусть потенциал, действующий на первую частицу, имеет форму прямоугольного барьера с высотой v_0 :

$$v_1(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_1 < a \text{ и } x_1 > b \\ v_0 & \text{при } a \leq x_1 \leq b. \end{cases} \quad (3)$$

В дальнейшем нам будет удобнее пользоваться не координатами x_1 и x_2 - частиц, а координатами относительного расстояния частиц ρ и их центра масс R :

$$R = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}; \quad \rho = \frac{x_1 - x_2}{m_1 + m_2} \sqrt{m_1 m_2}. \quad (4)$$

В координатах x_1, x_2 область, в которой двигаются частицы, имеет вид, изображенный на рис. 1. Частицы не могут уйти друг от друга дальше чем на расстояние r . Поэтому в плоскости (x_1, x_2) нас будет интересовать лишь полоса, заключенная между прямыми АВ и СД.

При переходе к координатам R, ρ вся картина (рис. 1) повернется, и полоса ABCD займет горизонтальное положение (рис. 2).

Уравнение Шредингера, описывающее движение системы двух частиц во внешнем поле в координатах R, ρ имеет вид:

$$-\frac{\partial^2}{\partial R^2} \Psi(R, \rho) - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Psi + 2(m_1 + m_2) \left[v_{12}\left(\rho \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}\right) + v_1(R, \rho) \right] \Psi = 2(m_1 + m_2) E \Psi. \quad (5)$$

Здесь E - полная энергия системы.

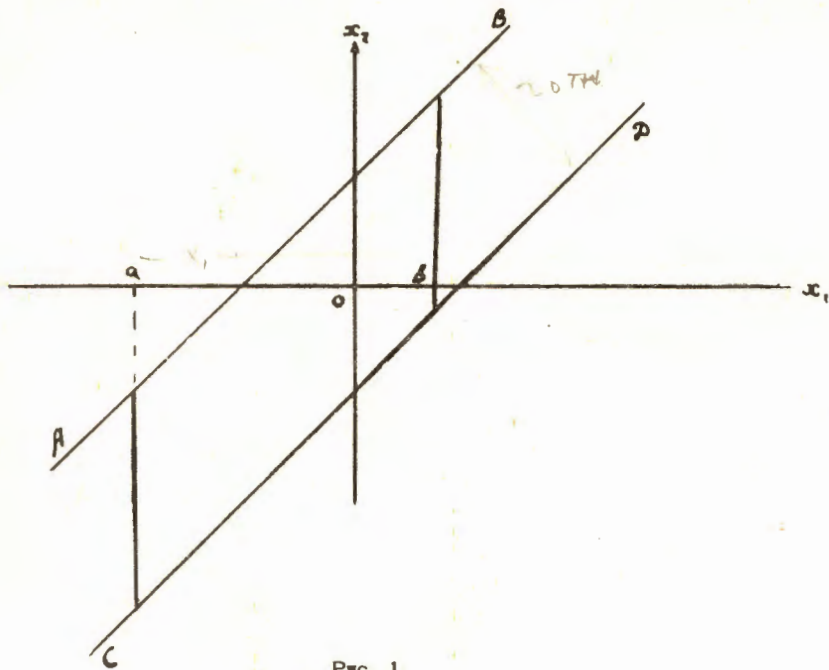


Рис. 1.

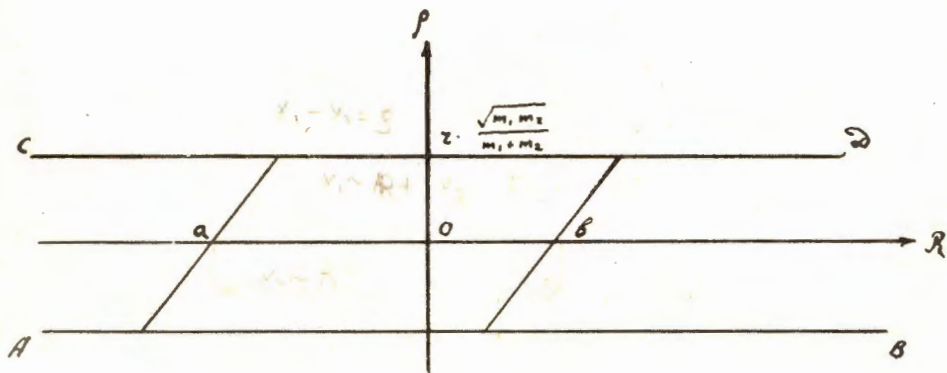


Рис. 2.

При каждом фиксированном значении координаты центра масс двух частиц \mathcal{R} мы можем разложить волновую функцию системы по полному набору волновых функций Φ_n относительного движения:

$$\Psi(\mathcal{R}, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\mathcal{R}) \Phi_n(\rho; \mathcal{R}). \quad (6)$$

В качестве функций Φ_n мы выберем собственные функции уравнения:

$$-\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Phi_n + 2(m_1 + m_2) [v_{12}(\rho) + V_1(\mathcal{R}, \rho)] \Phi_n = 2(m_1 + m_2) E_n(\mathcal{R}) \Phi_n. \quad (7)$$

Функции Φ_n зависят от \mathcal{R} , как от параметра. Понятно, что коэффициенты разложения в (6) сами являются функциями от \mathcal{R} . Эти коэффициенты $\varphi_n(\mathcal{R})$ можно рассматривать как волновые функции, описывающие движение центра масс двух частиц, когда они находятся в состоянии n по относительному движению. Чтобы получить уравнения, которым удовлетворяют φ_n , подставим разложение (6) в уравнение Шредингера (5), умножим после этого обе стороны уравнения на Φ_m и проинтегрируем по ρ . В результате получаем:

$$-\varphi_m'' + \sum_n (K_{mn} \varphi_n + 2Q_{mn} \varphi_n') + E_m(\mathcal{R}) \varphi_m = E \varphi_m. \quad (8)$$

Здесь мы обозначили штрихом дифференцирование по \mathcal{R} , а K_{mn} и Q_{mn} определяются следующим образом:

$$K_{mn} = \int \Phi_m \Phi_n'' d\rho, \quad (9)$$

$$Q_{mn} = \int \Phi_m \Phi_n' d\rho. \quad (10)$$

Система (8) представляет собой систему бесконечного числа зацепляющихся между собой дифференциальных уравнений. Связи между уравнениями осуществляются с помощью коэффициентов K_{mn} и Q_{mn} . В специальной работе мы покажем, что в рассматриваемом случае, когда энергии относительного движения квадратично возрастают с n , коэффициенты K_{mn} и Q_{mn} быстро убывают с ростом $m - n$.

Для полной постановки задачи нам нужно задать граничные условия. Пусть поток сложных частиц, находящихся в основном состоянии, движется из $-\infty$, и пусть кинетическая энергия этих частиц $E - E_{\text{осн}}$ недостаточна для реального возбуждения высших уровней относительного движения:

$$\begin{aligned} E - E_{\text{осн}}(\mathcal{R}) &< \Delta E_{\text{возб}}(\mathcal{R}) \\ \mathcal{R} \rightarrow \pm \infty \quad \mathcal{R} &\rightarrow \pm \infty \end{aligned} \quad (11)$$

где $E_{\text{осн}}$ — энергия основного состояния относительного движения, а $\Delta E_{\text{возб}}$ — разница энергий первого возбужденного и основного состояний относительного движения.

Тогда решение (5) при $\mathcal{R} \rightarrow -\infty$ запишется в виде произведения функции основного состояния по относительному движению Φ , на волновую функцию движения центра

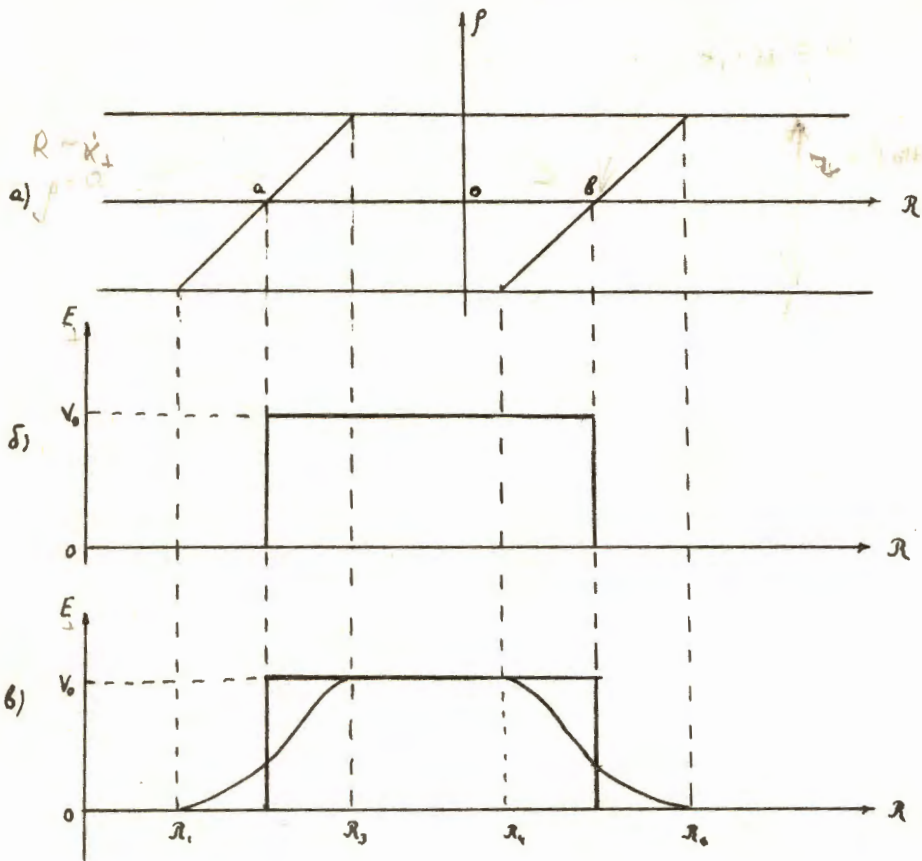


Рис. 3.

масс, имеющую вид комбинации падающей (единичный поток) и отраженной волны:

$$\Psi(x, p) \Big|_{x \rightarrow -\infty} = \Phi_1(p) \varphi_1(x), \quad (12)$$

где

$$\varphi_1(x) \Big|_{x \rightarrow -\infty} = e^{ixR} + \rho e^{-ixR}, \quad (13)$$

При $x \rightarrow \infty$ потребуем, чтобы была только прошедшая волна в функции $\varphi_1(x)$

$$\varphi_1(x) \Big|_{x \rightarrow \infty} = \mathcal{D} e^{ixR}, \quad (14)$$

$W = \int$

Таким образом, если пренебречь в первом приближении зацеплением уравнений (8), мы получаем обычную одночастинную задачу о проникновении через потенциальный барьер, роль которого играет эффективный потенциал $E_e(\mathcal{R})$.

Рассмотрим зависимость E_e от \mathcal{R} . Графически она изображена на рис. 3в. В области $\mathcal{R} < \mathcal{R}_1$, потенциал, определяющий относительное движение, имеет вид бесконечной прямоугольной ямы (рис. 4а) и не зависит от \mathcal{R} , поэтому $E_e = \text{const}$ в этой области.

В области $\mathcal{R}_1 < \mathcal{R} < \mathcal{R}_2$, зависимость относительного потенциала от \mathcal{R} меняется с изменением ρ : в бесконечную прямоугольную яму "вдвигается" потенциальный барьер (рис. 4б).

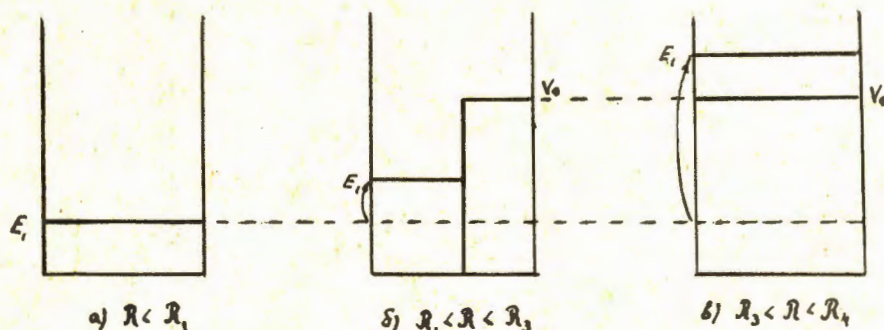


Рис. 4.

Это приводит к поднятию уровней в потенциальной яме, так что $E_e(\mathcal{R})$ увеличивается в области $\mathcal{R}_1 < \mathcal{R} < \mathcal{R}_2$ с ростом \mathcal{R} . В области $\mathcal{R}_2 < \mathcal{R} < \mathcal{R}_3$ (рис. 4в) частицы полностью находятся внутри барьера, потенциал относительного движения представляет собой бесконечную прямоугольную яму с "приподнятым" на V_0 дном, так что

$$E_e(\mathcal{R}_2 < \mathcal{R} < \mathcal{R}_3) = E_e(\mathcal{R} < \mathcal{R}_1) + V_0.$$

Рассуждая аналогично дальше, мы получим всю кривую $E_e(\mathcal{R})$. Если бы сложная частица имела нулевой радиус $\gamma = 0$ (слипшиеся частицы), потенциальный барьер имел бы вид, изображенный на рис. 3б. Мы видим, что наличие "внутреннего" движения в сложной частице приводит к размазыванию эффективного барьера, причем область размытия имеет те же размеры, что и сама сложная частица.

Формула, определяющая главную часть коэффициента проникновения через барьер, имеет вид:

$$N = e^{-\frac{\pi}{2} \left| \int_{\kappa}^{\beta} \sqrt{2M(V-E)} dR \right|}, \quad (15)$$

т.е. N сильно зависит от величины той части барьера, которая лежит выше энергии падающих частиц. Ясно, что размывание барьера (во всяком случае для достаточно большой энергии падающих частиц) приводит только к уменьшению части барьера, лежащей выше энергии, а, следовательно, к росту коэффициента проникаемости.

Мы произвели сравнение коэффициентов проникновения для двух случаев: когда частицы имели $z=0$ и $z=5$, кинетическая энергия падающих частиц в обоих случаях была $E_k=2$, а $V_0=4$, ширина барьера превышала размеры частицы. Коэффициент проникновения для частиц с $z=5$ оказался в ~ 50 раз больше чем при $z=0$.

Если потенциальный барьер достаточно узок по сравнению с размером сложной частицы, то "размывание" может привести к тому, что эффективно частицы будут проходить над барьером, а не под ним (рис. 5).

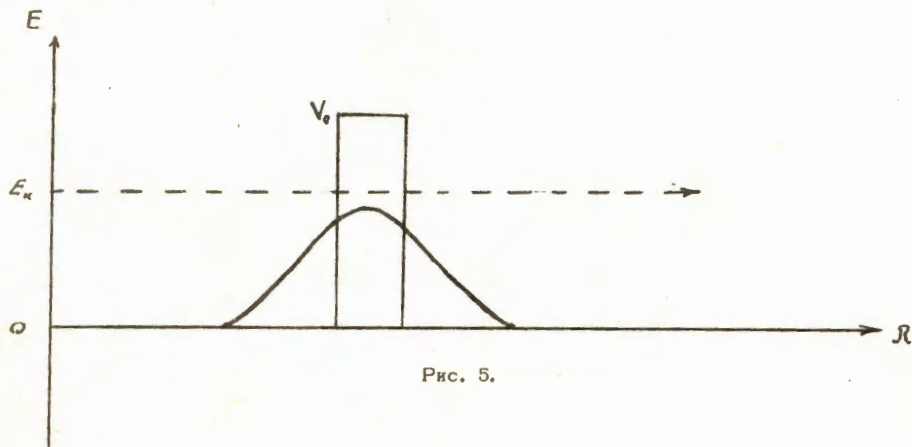


Рис. 5.

Авторы выражают благодарность М.И. Подгоречкому за весьма полезные дискуссии.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 ноября 1963 г.