ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Р—146

В. С. Владимиров *)

О ВЫЧИСЛЕНИИ ОБЛАСТИ АНАЛИТИЧНОСТИ

(Дополнение к работе „Об аналитическом продолжении обобщенных функций")

1958 год

*) Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Р-146

В.С.Владимиров x)

О ВЫЧИСЛЕНИИ ОБЛАСТИ АНАЛИТИЧНОСТИ

(Дополнение к работе "Об аналитическом продолжении обобщенных функций")

1958

x) Математический институт им. В.А.Стеклова АН СССР

I. В теореме Ш работы [I] была установлена аналитичность рассматриваемых функций в области (4.7). В частности было установлено, что по z_5 область аналитичности удовлетворяет неравенству

$$|z_5+\alpha^2| \leq \rho^2\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2, \quad 0\leq\alpha\leq 2\sqrt{2}\mu. ^{x)} \tag{I}$$

В связи с потребностями теории дисперсионных соотношений важно, чтобы верхняя грань параметра α была возможно большой. Используя более точно теорему I из [I] при t близких к $\frac{1}{2}(M+\mu)$ мы расширяем здесь область (4.7) в том смысле, что в (I) число $2\sqrt{2}\approx 2,82$ можно заменить на большее, 2 .1,60 = 3,20, если $M=7\mu$. Аналогичное увеличение претерпевает и область аналитичности задачи, рассмотренной в замечании П к теореме Ш:

$$0\leq\alpha\leq 2,27\mu, \qquad \text{если} \qquad M=7\mu. \tag{2}$$

Устанавливается также следующий результат: при выполнении условий замечания П к теореме Ш область (4.7), где

$$V\leq\tau\leq 0, \quad 0\leq\alpha\leq 3,11\mu, \tag{3}$$

есть также область аналитичности ($M=7\mu$).

Имея ввиду дальнейшие приложения результатов работы [I] к теории дисперсионных соотношений, мы даем здесь, опираясь на теорему I [I], алгоритм для вычисления областей аналитичности подобных задач. При этом оказывается, что нахождение максимально возможного α сводится, по существу, к численному решению системы 3-х алгебраических уравнений с 3-мя неизвестными (например, методом Ньютона).

---

x) Этот же результат был получен в [3].

2. Теорема I из [I] при $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ гласит:

Пусть даны две обобщенные функции $\mathcal{F}_\tau(x)$ и $\mathcal{F}_a(x)$ x), $x = (x_0, \vec{x})$, удовлетворяющие условиям:

$\mathcal{F}_\tau(x) = 0$, если $x \lesssim 0$; $\mathcal{F}_a(x) = 0$, если $x \gtrsim 0$

$\mathcal{F}_\tau(p) - \mathcal{F}_a(p) = 0$, если $p \in G^o_o$,

где область G^o есть совокупность точек $p = (p_0, \vec{p})$, удовлетворяющих неравенствам

$$c_1 - \sqrt{\vec{p}^2 + 6^2} < p_0 < c_2 + \sqrt{\vec{p}^2 + \delta^2} \tag{4}$$

Пусть a и b - любые вещественные числа, $a \leq b$ *)

Введем обозначения:

$$\lambda = \frac{|\Im m \vec{k}|}{|\Im m \sqrt{(k_0 - a)(k_0 - b)}|}, \quad Q = \left| Re \vec{k} - \frac{Re\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}{\Im m \sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}} \Im m \vec{k} \right|, \tag{5}$$

$$\ell_k(\eta) = \eta^k \quad \text{при } \eta > 0, \quad \ell_k(\eta) = 0 \quad \text{при } \eta < 0, \quad k = 0, 1, \tag{6}$$

Назовем $G(a, b)$ совокупность комплексных точек $k = (k_0, \vec{k})$, удовлетворяющих неравенству

$$\lambda < 1, \tag{7}$$

---

x) Равенство $a = b$ соответствует тривиальной области аналитичности $|\Im m \vec{k}| < |\Im m k_0|$ (см. замечание I к теореме I [I]).

а также обладающих тем свойством, что при всех ξ из промежутка $[a, b]$ выполнены неравенства

$$c_1 - \sqrt{e_2^2[Q - \lambda\sqrt{(\xi - a)(b - \xi)}]^2 + \sigma^2} < \xi < c_2 + \sqrt{e_2^2[Q - \lambda\sqrt{(\xi - a)(b - \xi)}]^2 + \delta^2}. \tag{8}$$

Тогда существует функция $\widetilde{\Phi}(\kappa)$ комплексного переменного κ, аналитическая в области

$$G = \bigcup_{a \le b} G(a, b)^{x)}, \tag{9}$$

и такая, что при всех вещественных p из области G^0

$$\widetilde{\Phi}(p) = \widetilde{\mathcal{F}}_r(p) = \widetilde{\mathcal{F}}_a(p).$$

Другими словами, комплексная точка κ принадлежит области G в том и только том случае, если для нее найдется хотя бы одна пара вещественных чисел a и b, $a \le b$, таких, что неравенства (7) и (8) выполнены.

3. Докажем, что неравенства (8) эквивалентны следующим неравенствам:

$$\left.\begin{aligned} &\xi_1 - c_1 + \sqrt{[Q - \lambda\sqrt{(\xi_1 - a)(b - \xi_1)}]^2 + \sigma^2} > 0, \\ &c_2 - \xi_2 + \sqrt{[Q - \lambda\sqrt{(\xi_2 - a)(b - \xi_2)}]^2 + \delta^2} > 0 \end{aligned}\right\}, \tag{10}$$

где числа $\xi_1 = \xi_1(\kappa, a, b)$ и $\xi_2 = \xi_2(\kappa, a, b)$ суть вещественные корни соответственно уравнений

$$\sqrt{(\xi_1 - a)(b - \xi_1)}\{[Q - \lambda\sqrt{(\xi - a)(b - \xi)}]^2 + \sigma^2\} = \\ = \lambda[Q - \lambda\sqrt{(\xi_1 - a)(b - \xi_1)}]\left(\frac{b + a}{2} - \xi_1\right), \tag{11}$$

x) Вопрос об аналитическом расширении (см. [2], гл.IУ) области G остается открытым.

$$\sqrt{(\xi_2-a)(b-\xi_2)}\left\{\left[Q-\lambda\sqrt{(\xi_2-a)(b-\xi_2)}\right]^2+\delta^2\right\}= \tag{I2}$$

$$=\lambda\left[Q-\lambda\sqrt{(\xi_2-a)(b-\xi_2)}\right]\left(\xi_2-\frac{b+a}{2}\right),$$

удовлетворяющие неравенствам

$$a \le \xi_1 \le \frac{a+b}{2} \le \xi_2 \le b. \tag{I3}$$

Нетрудно видеть, что всегда существует одно и только одно решение уравнений (II) и (I2), удовлетворяющее неравенствам (I3).

Докажем, что из неравенств (I0) следуют неравенства (8). Для этого изучим кривые

$$f_1(\xi)=\xi-c_1+\sqrt{e_2\left[Q-\lambda\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}\right]+\sigma^2},\quad a\le\xi\le b;$$

$$f_2(\xi)=c_2-\xi+\sqrt{e_2\left[Q-\lambda\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}\right]+\delta^2},\quad a\le\xi\le b \text{ x)}.$$

Имеем

$$f_1'(\xi)=1-\frac{\lambda e_1\left[Q-\lambda\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}\right]}{\sqrt{e_2\left[Q-\lambda\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}\right]+\sigma^2}}\cdot\frac{\frac{1}{2}(a+b)-\xi}{\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}}, \tag{I4}$$

$$f_2'(\xi)=-1+\frac{\lambda e_1\left[Q-\lambda\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}\right]}{\sqrt{e_2\left[Q-\lambda\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}\right]+\delta^2}}\cdot\frac{\xi-\frac{1}{2}(a+b)}{\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}}; \tag{I5}$$

Из (I4) и (I5) следует:

$$f_i'(a)=-\infty,\quad f_i'(b)=+\infty,\quad i=1,2. \tag{I6}$$

---

x) Будем считать, что $Q>0$, $\lambda>0$ и $a<b$; в противном случае утверждение очевидно.

Из (II) - (I5) следует, что уравнения $f_i'(\xi)=0$ имеют в промежутке $[a,b]$ по одному корню ξ_i, $i=1,2$. Поэтому и в силу (I6) кривые $f_i(\xi)$ имеют на промежутке $[a,b]$ единственную точку минимума ξ_i. Следовательно, из неравенств (I0): $f_i(\xi_i)>0$, $i=1,2$, - следует неравенства (8).

Таким образом неравенства (8) эквивалентны неравенствам (I0).

4. Докажем теперь, что комплексная точка K принадлежит области G в том и только том случае, если для нее найдется хотя бы одна пара вещественных чисел a и b, $a \leq b$, таких, что выполнено неравенство (7) и неравенства

$$\left.\begin{aligned} &\xi_1 - c_1 + \sqrt{[a-\lambda\sqrt{(\xi_1-a)(b-\xi_1)}]^2+\sigma^2} \geqslant 0, \\ &c_2-\xi_2+\sqrt{[a-\lambda\sqrt{(\xi_2-a)(b-\xi_2)}]^2+\delta^2} \geqslant 0 \end{aligned}\right\}, \tag{I7}$$

где ξ_1 и ξ_2 определяются уравнениями (II) и (I2).

Действительно, если для некоторой точки К нашлись такие вещественные числа a и b, $a \leq b$, что выполнено неравенство (7) и в одном (или в обоих) из неравенств (I7) имеет место знак равенства, то можно сколь угодно мало изменить параметры a и b, что неравенство (7) еще сохранится, а соответствующие равенства (I7) превратятся в строгие неравенства (I0), и, следовательно, упомянутая точка К будет принадлежать области G.

5. Теперь можно установить справедливость следующей леммы.

Лемма I. Комплексная точка К принадлежит области G в том и только в том случае, если система пяти уравнений, состоящая из уравнений (II), (I2) и уравнений

$$\lambda\left|\operatorname{Im}\sqrt{(K_0-a)(K_0-b)}\right| = \left|\operatorname{Im}\vec{K}\right|, \tag{I8}$$

$$\left.\begin{aligned} &\xi_1 - c_1 + \sqrt{[Q - \lambda\sqrt{(\xi_1 - a)(b - \xi_1)}]^2 + \sigma^2} = 0, \\ &c_2 - \xi_2 + \sqrt{[Q - \lambda\sqrt{(\xi_2 - a)(b - \xi_2)}]^2 + \delta^2} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

имеет решение $(\lambda, a, b, \xi_1, \xi_2)$, удовлетворяющее условиям

$$0 \leq \lambda < 1, \; a \leq \xi_1 \leq \frac{a+b}{2} \leq \xi_2 \leq b. \qquad (20)$$

Доказательство. Обозначим через G_1 множество точек К, удовлевторяющих условиям леммы. В силу п.4 $G_1 \subset G$. Докажем, что $G_1 = G$. Для этого достаточно доказать, что $G \subset G_1$. Пусть $K \in G$. Тогда найдутся такие вещественные числа λ, a, b, ξ_1 и ξ_2, удовлетворяющие уравнениям (II) и (I2) и неравенствам (I7) и(20). Неравенства (I7) запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} &\xi_1 - c_1 + \sqrt{[Q - \lambda\sqrt{(\xi_1 - a)(b - \xi_1)}]^2 + \delta^2} = \delta_1, \quad \delta_1 \geqslant 0, \\ &c_2 - \xi_2 + \sqrt{[Q - \lambda\sqrt{(\xi_2 - a)(b - \xi_2)}]^2 + \delta^2} = \delta_2, \quad \delta_2 \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2I)$$

Из п.2 следует, что область G монотонно убывает с увеличением C_1 и уменьшением C_2. Следовательно, область G_1 монотонно убывает с увеличением C_1 и уменьшением C_2. Из (2I) следует что точка К принадлежит области G_1, определенной параметрами $c_1 + \delta_1$ и $c_2 - \delta_2$. Следовательно, она принадлежит и более широкой области G_1 (определенной параметрами C_1 и C_2). Следовательно, $G \subset G_1$, и наша лемма доказана.

6. В частности, если точка K имеет вид: $K^* = (P_0, \vec{K})$, $\Im m P_0 = 0$, то критерий принадлежности ее к области G упрощается. В этом случае в силу (5) имеем:

$$\lambda = \frac{|\mathrm{Im}\,\vec{k}|}{\sqrt{(P_0-a)(b-P_0)}}\,, \quad Q = |\mathrm{Re}\,\vec{k}|\,. \tag{22}$$

Имеет место

Лемма 2. Точка $K^* = (P_0, \vec{K})$ принадлежит области G в том и только том случае, если существует решение (λ, u, v) системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&u^2(1+\lambda^2)+\frac{u^2\sigma^2}{(|\mathrm{Re}\,\vec{k}|-\lambda u)^2} = v^2(1+\lambda^2)+\frac{v^2\delta^2}{(|\mathrm{Re}\,\vec{k}|-\lambda v)^2}\,,\\
&C_1-C_2=\sqrt{(|\mathrm{Re}\,\vec{k}|-\lambda u)^2+\sigma^2}\;\frac{\lambda|\mathrm{Re}\,\vec{k}|-\lambda^2u-u}{\lambda(|\mathrm{Re}\,\vec{k}|-\lambda u)}-\sqrt{(|\mathrm{Re}\,\vec{k}|-\lambda v)^2+\delta^2}\;\frac{\lambda|\mathrm{Re}\,\vec{k}|-\lambda^2v-v}{\lambda(|\mathrm{Re}\,\vec{k}|-\lambda v)}\,,\\
&u^2(1+\lambda^2)+\frac{u^2\sigma^2}{(|\mathrm{Re}\,\vec{k}|-\lambda u)^2}-\left[(C_1-P_0)\lambda-\sqrt{(|\mathrm{Re}\,\vec{k}|-\lambda u)^2+\sigma^2}\;\frac{\lambda|\mathrm{Re}\,\vec{k}|-\lambda^2u-u}{|\mathrm{Re}\,\vec{k}|-\lambda u}\right]^2=|\mathrm{Im}\,\vec{k}|^2,
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

удовлетворяющее условиям

$$0 \le \lambda < 1,\; 0 \le \lambda u \le |\mathrm{Re}\,\vec{k}|,\quad 0 \le \lambda v \le |\mathrm{Re}\,\vec{k}|. \tag{24}$$

Доказательство. Полагая в уравнениях (II), (I2), (I8) и I9)

$$\alpha = \frac{b-a}{2},\; \beta = \frac{a+b}{2},\; u = \sqrt{(\xi_1-a)(b-\xi_1)},\; v = \sqrt{(\xi_2-a)(b-\xi_2)},$$

$$\xi_1 = \frac{a+b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-u^2},\quad \xi_2 = \frac{a+b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-v^2}$$

и принимая во внимание (22), получим

$$\left.\begin{aligned}
&u\sqrt{(|\mathrm{Re}\,\vec{k}|-\lambda u)^2+\sigma^2} = \lambda(|\mathrm{Re}\,\vec{k}|-\lambda u)\sqrt{\alpha^2-u^2}\,,\\
&v\sqrt{(|\mathrm{Re}\,\vec{k}|-\lambda v)^2+\delta^2} = \lambda(|\mathrm{Re}\,\vec{k}|-\lambda v)\sqrt{\alpha^2-v^2}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned}&\beta-\sqrt{\alpha^2-u^2}-c_1+\sqrt{(|\operatorname{Re}\vec{k}|-\lambda u)^2+\sigma^2}=0,\\&c_2-\beta-\sqrt{\alpha^2-v^2}+\sqrt{(|\operatorname{Re}\vec{k}|-\lambda v)^2+\delta^2}=0,\\&\lambda\sqrt{\alpha^2-(\rho_0-\beta)^2}=|\operatorname{Im}\vec{k}|.\end{aligned}\right\}$$

Исключая из уравнений (25) α и β, получим уравнения (23); условия (20) при этом перейдут в условия (24). Лемма доказана.

Систему уравнений (23) можно решить приближенно, например, методом Ньютона.

7. Применим предыдущие результаты к доказательству теорем типа теоремы III [I]. Положим

$$c_1=t,\ c_2=-t,\ \delta=M+\mu,\ \sigma=\gamma\mu. \tag{26}$$

Будем считать, что

$$M\geqslant\mu>0,\ \gamma>1,\ M>(\gamma-1)\mu,\ t\geqslant\frac{1}{2}(M+\mu)=t_0 \tag{27}$$

Обозначим через G_t области G п.2, соответствующие различным значениям параметра t, введенного согласно (26).

Наша задача - расширить интервал изменения параметра α, определяющий область аналитичности (4.7) в теореме III работы [I], т.е. для данных M,μ,γ и $\tau_0, 0\leq\tau_0\leq\mu^2$, указать такое наибольшее положительное число x_0, чтобы при всех $t\geqslant t_0$ область (4.7), характеризующаяся параметрами

$$V\leq\tau\leq\tau_0\ ,\quad 0\leq\alpha<2x_0 \tag{28}$$

была бы область аналитичности.

Из доказательства теоремы II [I] следует, что для решения данной задачи достаточно найти такое максимальное x) число x_0,

x) Это не значит еще, что область (4.7) не допускает дальнейшего расширения по x, так как не доказано, что область G_t не допускает аналитического расширения.

что при каждом $t, t \geqslant t_0$, область G_t содержит множество точек

$$K^*(t,\alpha,\tau)=\left[\frac{M^2-\tau}{4t}, \frac{\alpha}{2}\vec{e}_1+i\vec{e}_2\sqrt{M^2+\frac{\alpha^2}{4}-\left(t+\frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2}\right], \tag{29}$$

определяемое параметрами $\alpha, \tau, \vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ такими, что

$$|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=1, \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=0,$$

$$\alpha<2x_0, \tau\leqslant\tau_0, M^2+\frac{\alpha^2}{4}-\left(t+\frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2\geqslant 0^{**}). \tag{30}$$

В качестве первого шага осуществления указанной программы докажем следующую лемму.

Лемма 3. Фиксируем числа t и α таким образом, чтобы тройка чисел (t, α, τ_0) удовлетворяла неравенствам (30). Пусть

$$K^*(t,\alpha,\tau_0)\in G_t. \tag{31}$$

Тогда

$$K^*(t,\alpha,\tau)\in G_t. \tag{32}$$

при всех τ таких, что числа (t, α, τ) удовлетворяют неравенствам (30).

Доказательство. Из (31), (22), (29) и (26), а также из п.п. 2 и 4 следует существование вещественных чисел a_0 и b_0 таких, что

$$\lambda(\tau_0)<1, \tag{33}$$

$$\xi-t+\sqrt{e_2\left[\frac{\alpha}{2}-\lambda(\tau_0)\sqrt{(\xi-a_0)(b_0-\xi)}\right]+\gamma^2\mu^2}\geqslant 0, \quad a_0\leqslant\xi\leqslant b_0 \tag{$\cancel{32}$}$$

$$-t-\xi+\sqrt{e_2\left[\frac{\alpha}{2}-\lambda(t_0)\sqrt{(\xi-a_0)(b_0-\xi)}\right]+(M+\mu)^2}\geqslant 0 \tag{34}$$

**) Отсюда следует, что t изменяется в конечном интервале.

(34)

В (33) и далее будут использованы обозначения:

$$\lambda^2(\tau)=\frac{A(\tau)}{B(\tau)},\ A(\tau)\equiv M^2+\frac{\alpha^2}{4}-\left(t+\frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2,\ B(t)=\left(\frac{M^2-\tau}{4t}-a_0\right)\left(b_0-\frac{M^2+t_0}{4t}\right). \quad (35)$$

Для доказательства (31) достаточно установить справедливость неравенства

$$\lambda(\tau)\leq\lambda(\tau_0). \quad (36)$$

Действительно, в силу (36), (33) и (34), а также на основании монотонности функции $\ell_2(\eta)$, заключаем, что для точки $K^*(t,\alpha,\tau)$ неравенства (7) и (17) будут выполнены, если положить $a=a_0$ и $b=b_0$.

Следовательно,

$$K^*(t,\alpha,\tau)\in G_t(a_0,b_0)\subset G_t.$$

Прежде чем переходить к доказательству неравенства (36), докажем неравенство

$$a_0+b_0+2t\geqslant 0. \quad (37)$$

Для доказательства (37) используем лемму 2.

Из второго и четвертого уравнений (25) имеем

$$a_0+b_0+2t=\frac{\lambda(t_0)\frac{\alpha}{2}-\lambda^2(t_0)v_0-v_0}{\lambda(t_0)\left[\frac{\alpha}{2}-\lambda(\tau_0)v_0\right]}\sqrt{\left[\frac{\alpha}{2}-\lambda(\tau_0)v_0\right]^2+(M+\mu)^2}. \quad (38)$$

Так как

$$\delta=M+\mu>\gamma\mu=\sigma,$$

то из первого уравнения (23) следует $v_0\leq u_0$. Принимая во внимание последнее неравенство, а также неравенства

$$C_1 - C_2 = 2t > 0; \quad \frac{\alpha}{2} - \lambda(\tau_0)v_0 \geq 0$$

(см. (26) и (24)), получим из второго уравнения (23):

$$\lambda(t_0)\frac{\alpha}{2} - \lambda^2(\tau_0)v_0 - v_0 \geq 0;$$

откуда и из (38) следует неравенство (37).

Рассмотрим функцию

$$f(\tau) = B(\tau) - A(\tau),$$

В силу (33) $f(\tau_0) > 0$. Принимая во внимание (35) и (37), получим

$$f'(\tau) = B'(\tau) - A'(\tau) = -\frac{1}{4t}(a_0 + b_0 + 2t) \leq 0. \tag{39}$$

Следовательно,

$$f(\tau) \geq f(\tau_0) > 0, \quad \text{если} \quad \tau \leq \tau_0,$$

т.е.

$$\lambda^2(\tau) = \frac{A(\tau)}{B(\tau)} < 1. \tag{40}$$

Докажем теперь, что $\lambda(\tau)$ монотонно убывает с уменьшением τ. Принимая во внимание (39) и (40), получим

$$\frac{d\lambda^2(\tau)}{d\tau} = \frac{A'(\tau) - \lambda^2(\tau)B'(\tau)}{B(\tau)} \geq \begin{cases} \dfrac{A'(\tau)}{B(\tau)} = \dfrac{t + \frac{M^2\lambda\tau}{4t}}{2tB(\tau)} > 0, & \text{если } B'(\tau) \leq 0, \\[2ex] \dfrac{A'(\tau) - B'(\tau)}{B(\tau)} = \dfrac{a_0 + b_0 + 2t}{4tB(\tau)} \geq 0, & \text{если } B'(\tau) > 0. \end{cases}$$

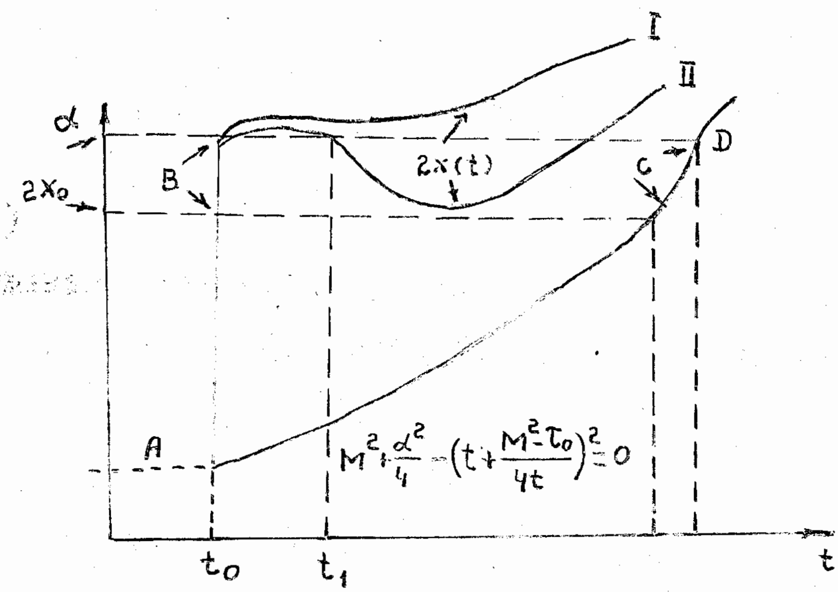
Таким образом, неравенство (36) доказано. Лемма доказана.

8. В силу леммы 3 наша задача свелась к следующей: найти такое максимальное число $\varkappa_0$, что при каждом фиксированном $t, t \geq t_0$, область G_t содержит множество точек

$$K^*(t;\alpha,\tau_0)=\left[\frac{M^2-\tau_0}{4t},\ \frac{\alpha}{2}\vec{e}_1+i\vec{e}_2\sqrt{M^2+\frac{\alpha^2}{4}-\left(t+\frac{M^2-\tau_0}{4t}\right)^2}\,\right],$$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \alpha<2\varkappa_0,\ M^2+\dfrac{\alpha^2}{4}-\left(t+\dfrac{M^2-\tau_0}{4t}\right)^2\geq 0 .\end{array}\right\} \qquad (4I)$$

Изобразим на чертеже область изменения параметров t и α (треугольник ABC):



Точки $K^*(t;\alpha,\tau_0)$, для которых t и α лежат на кривой AD, целиком содержатся в соответствующих областях G_t (см.доказательство теоремы П [I]). Поэтому для каждого $t, t \geq t_0$, можно указать такое число $x(t)$, что все точки

$$K^*(t;\alpha,\tau_0),\ 2\sqrt{\left(t+\frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2-M^2}\leq\alpha<2x(t)$$

(42)

принадлежат области G_t, в то время как точка $K^*(t; 2x(t), t_0)$ уже не принадлежит G_t. Это значит, что точка $K^*(t; 2x(t), \tau_0)$ принадлежит границе области G_t, т.е. для нее $\lambda = 1$ (см. п.п. 5 и 6).

Теперь применим лемму 2 для точек (42) и для области G_t. Устремляя в формулах (23) и (24) $\alpha \kappa 2x(t)$ (и, следовательно, $\lambda \kappa 1$), получим для определения $x = x(t)$ систему алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&2u^2 + \frac{u^2\gamma^2\mu^2}{(x-u)^2} = 2v^2 + \frac{v^2(M+\mu)^2}{(x-v)^2},\\
&2t = \sqrt{1+\frac{\gamma^2\mu^2}{(x-u)^2}}\,(x-2u) + \sqrt{1+\frac{(M+\mu)^2}{(x-v)^2}}\,(x-2v),\\
&2v^2 + \frac{v^2(M+\mu)^2}{(x-v)^2} - \left[\sqrt{1+\frac{(M+\mu)^2}{(x-v)^2}}\,(x-2v) - t - \frac{M^2-t_0}{4t}\right]^2 - M^2 - x^2 + \left(t + \frac{M^2-\tau_0}{4t}\right)^2 = 0
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

и условия

$$0 \le u \le x, \quad 0 \le v \le x. \tag{44}$$

Заметим, что одновременно мы показали существование решения (x, u, v) системы (43), удовлетворяющего условиям (44).

Итак, для определения $x(t)$ необходимо найти все решения (x, u, v) системы (43) при условиях (44) и принять за $x(t)$ наименьшее x. Совершая изложенную процедуру для всех $t, t \geqslant t_0$, получим функции $x(t), u(t)$ и $v(t)$, которые, как нетрудно в этом убедиться, будут непрерывными функциями t. На чертеже изображны некоторые из возможных поведений кривой $x(t)$ (I и II).

Теперь ясно, что
$$x_0 = \min_{t \geq t_0} x(t), \tag{45}$$
и наша задача решена.

Укажем практически важный случай, когда минимум в (45) реализуется в точке $t = t_0 = \frac{M+\mu}{2}$, т.е. $x_0 = x(t_0)$. Это значит, что на чертеже имеет место случай I поведения кривой $x(t)$.

Теорема. Пусть выполнено неравенство

$$t_0 + \frac{M^2-\tau_0}{4t_0} - \sqrt{1+\left[\frac{M+\mu}{x(t_0)-v(t_0)}\right]^2}\left[v(t_0)\left(1-\frac{M^2-\tau_0}{2t_0^2}\right)+x(t_0)\frac{M^2-\tau_0}{4t_0^2}\right] \geq 0. \tag{46}$$

Тогда
$$x_0 = x(t_0). \tag{47}$$

Доказательство. Пусть, напротив,
$$x_0 = \min_{t \geq t_0} x(t) < x(t_0). \tag{48}$$

Так как существуют точки t, для которых $x(t) > x_0$, то из (48) и из непрерывности функции $x(t)$ следует существование такого числа $t_1 > t_0$, что при этом t_1 система уравнений (43) имеет решение

$$[x(t_0), u(t_1) v(t_1)].$$

Введем непрерывную функцию

$$f(t) = 2v^2(t) + \frac{v^2(t)(M+\mu)^2}{[x(t_0)-v(t)]^2} - \left\{\sqrt{1+\left[\frac{M+\mu}{x(t_0)-v(t)}\right]^2}\left[x(t_0)-2v(t)\right]-t-\frac{M^2-\tau_0}{4t}\right\}^2 -$$
$$-M^2 - x^2(t_0) + \left(t+\frac{M^2-\tau_0}{4t}\right)^2,$$

где функция $v(t)$ определяется системой уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&2u^2(t)+\frac{u^2(t)\gamma^2\mu^2}{[x(t_0)-u(t)]^2}=2v^2(t)+\frac{v^2(t)(M+\mu)^2}{[x(t_0)-v(t)]^2},\\
&2t=\sqrt{1+\frac{\gamma^2\mu^2}{[x(t_0)-u(t)]^2}}\,[x(t_0)-2u(t)]+\sqrt{1+\frac{(M+\mu)^2}{[x(t_0)-v(t)]^2}}\,[x(t_0)-2v(t)]
\end{aligned}\right\};\qquad (49)$$

тогда

$$f(t_0)=0,\quad f(t_1)=0,\quad t_1>t_0. \qquad (50)$$

Пользуясь условием (46), мы докажем, что $f'(t)>0$ при $t\geqslant t_0$. Но это будет противоречить соотношениям (50). Следовательно, предположение (48) неверно, а потому имеет место равенство (47).

Имеем

$$\frac{1}{2}f'(t)=\left(1-\frac{M^2-\tau_0}{4t^2}\right)[x(\tau_0)-2v(t)]\sqrt{1+\left[\frac{M+\mu}{x(t_0)-v(t)}\right]^2}+$$

$$+\left\{\sqrt{1+\left[\frac{M+\mu}{x(t_0)-v(t)}\right]^2}\,[x(t_0)-v(t)]-t-\frac{M^2-\tau_0}{4t}\right\}\frac{2+\dfrac{(M+\mu)^2x(t_0)}{[x(t_0)-v(t)]^3}}{\sqrt{1+\left[\dfrac{M+\mu}{x(t_0)-v(t)}\right]^2}}\,v'(t). \qquad (51)$$

Из уравнений (49) получаем также

$$\frac{2+\dfrac{(M+\mu)^2x(t_0)}{[x(t_0)-v(t)]^3}}{\sqrt{1+\left[\dfrac{M+\mu}{x(t_0)-v(t)}\right]^2}}\,v'(t)=\frac{-2}{1+\sqrt{\dfrac{\left\{2+\dfrac{\gamma^2\mu^2}{[x(t_0)-u(t)]^2}\right\}\left\{1+\dfrac{(M+\mu)^2}{[x(t_0)-v(t)]^2}\right\}}{\left\{2+\dfrac{(M+\mu)^2}{[x(t_0)-v(t)]^2}\right\}\left\{1+\dfrac{\gamma^2M^2}{[x(t_0)-u(t)]^2}\right\}}}}. \qquad (52)$$

В силу нашего предположения $M+\mu > \gamma\mu$. Поэтому из первого уравнения (49) следует, что

$$v(t) < u(t), \quad \frac{(M+\mu)^2}{[x(t_0)-v(t)]^2} > \frac{\gamma^2\mu^2}{[x(t_0)-u(t)]^2}. \tag{53}$$

Из второго уравнения (49) и из (53) получаем неравенство

$$x(t_0) - 2v(t) > 0. \tag{54}$$

Отметим еще неравенство при всех $A > B > 0$

$$\frac{(2+B)(1+A)}{(2+A)(1+B)} > 1 \tag{55}$$

Положим

$$A = \frac{(M+\mu)^2}{[x(t_0)-v(t)]^2}, \quad B = \frac{\gamma^2\mu^2}{[x(t_0)-u(t)]^2}.$$

Тогда в силу второго неравенства (53) $A > B > 0$. Принимая во внимание неравенства (55), получим из (52)

$$\left\{2 + \frac{(M+\mu)^2 x(t_0)}{[x(t_0)-v(t)]^3}\right\} v'(t) > -\sqrt{1+\left[\frac{M+\mu}{x(t_0)-v(t)}\right]^2}. \tag{56}$$

Применим полученное неравенство (55) к оценке $f'(t)$ снизу. В силу (54) первое слагаемое в правой части (51) всегда положительно. Если при некоторых t множитель перед $v'(t)$ во втором слагаемом в правой части (51) неположителен, то в силу неравенства $v'(t) < 0$ (см.(52)) $f'(t) > 0$, и наша теорема доказана.

Осталось рассмотреть те t, для которых множитель перед $v'(t)$ во втором слагаемом в правой части (51) положителен. Принимая во внимание (56), (54) и (46), получим из (51)

$$\frac{1}{2} f'(t) > t + \frac{M^2-\tau_0}{4t} - v(t)\sqrt{1+\left[\frac{M+\mu}{x(t_0)-v(t)}\right]^2} - \frac{M^2-\tau_0}{4t^2}\left[x(t_0)-2v(t)\right]\times$$

$$\times\sqrt{1+\left[\frac{M+\mu}{x(t_0)-v(t)}\right]^2} \geqslant t_0 + \frac{M^2-\tau_0}{4t_0} - \sqrt{1+\left[\frac{M+\mu}{x(t_0)-v(t_0)}\right]^2}\times$$

$$\times\left[v(t_0)\left(1-\frac{M^2-\tau_0}{2t_0^2}\right) + x(t_0)\frac{M^2-\tau_0}{4t_0^2}\right] \geqslant 0 .$$

Теорема доказана.

Применим доказанную теорему для получения результатов, сформулированных в п.1.

1. Пусть $M=7\mu$, $\gamma=3$, $\tau_0=\mu^2$. Тогда решая систему (43) при $t=\frac{M+\mu}{2}=4\mu$, получим

$$x(4\mu)=1{,}603\mu,\quad u(4\mu)=0{,}539\mu,\quad v(4\mu)=0{,}275\mu .$$

Неравенство (47) будет выполнено. Следовательно, можно принять $x_0=1{,}603\mu$.

2. Пусть $M=7\mu$, $\gamma=2$, $\tau_0=\mu^2$. Тогда

$$x(4\mu)=1{,}135\mu,\quad u(4\mu)=0{,}379\mu,\quad v(4\mu)=0{,}139\mu .$$

Неравенство (47) выполнено. Следовательно, можно положить

$x_0 = 1{,}135\mu$.

3. Пусть $M = 7\mu$, $\gamma = 2$, $\tau_0 = 0$. Тогда

$x(4\mu) = 1{,}557\mu$ $u(4\mu) = 0{,}521\mu$, $v(4\mu) = 0{,}205\mu$

Неравенство (47) выполнено. Можно положить $x_0 = 1{,}557\mu$.

Пользуясь случаем, благодарю Н.Н.Боголюбова за ценные обсуждения.

Цитированная литература:

1. Н.Н.Боголюбов и В.С. Владимиров, Об аналитическом продолжении обобщенных функций, Изв.Ак.наук СССР, сер.математич.(в печати). (см. также препринт О.И.Я.И., 1957,
2. С.Бохнер и У.Т.Мартин, Функции многих комплексных переменных, ИИЛ, М., 1951.
3. H.J. Bremerman, R. Oehme and I.G. Taylor. A proof of Dispersion Relations in Quantized Field Theories, 1957.