ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Б.А. Арбузов, А.Т. Филиппов, О.А. Хрусталев

Р-1459

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ТОЧНЫМ РЕШЕНИЕМ И РЯДОМ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Дубна 1963

Б.А. Арбузов, А.Т. Филиппов, О.А. Хрусталев

Р-1459

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ТОЧНЫМ РЕШЕНИЕМ И РЯДОМ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Направлено в Phys. Letters

Дубна 1963

Потенциальное рассеяние в нерелятивистской квантовой механике часто рассматривают как модель квантовой теории поля [1]. При этом до последнего времени обычно ограничивались потенциалами, приводящими к интегральным уравнениям для амплитуды рассеяния с ядрами Фредгольма [2]. Изучение эффективных потенциалов, возникающих в квантовой теории поля, показало, что этот случай соответствует теориям с константами связи размерности обратной длины (например, взаимодействие $\lambda\phi^3$). Более реалистичным теориям с безразмерной константой связи соответствуют более сингулярные при $r=0$ потенциалы [3,4]. Например, в теории с взаимодействием $g\phi^4$ учет диаграмм, изображенных на рис. 1, приводит к потенциалу, который при $r\to 0$ имеет вид: $V(r) \approx b_1 \frac{g^2}{r^2} + b_2 \frac{g^3}{r^2} \ln 2mr$

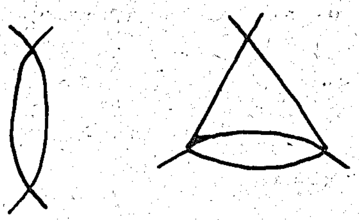

Рис. 1.

Первый член в этом выражении , возникающий из первой диаграммы рис. 1, можно объединить с центробежным потенциалом. В настоящей заметке мы изучим свойства решений уравнения Шредингера с потенциалом

$$V(r) = - g \frac{\ln r}{r^2} \quad , \quad g > 0, \tag{1}$$

который соответствует второй диаграмме рис. 1.

Уравнение Шредингера для парциальных волновых функций имеет вид:

$$\psi''(k^2,\lambda,r) - \frac{\lambda^2 - 1/4}{r^2}\psi(k^2,\lambda,r) + k^2\psi(k^2,\lambda,r) + g\frac{\ln r}{r^2}\psi(k^2,\lambda,r) = 0 \tag{2}$$

При $k^2=0$ нетрудно найти два линейно независимых решения

$$\psi^{(1,2)}(0,\lambda,r) = C\sqrt{r}\sqrt{\ln r - \frac{\lambda^2}{g}}\, H^{(1,2)}_{1/3}\left(\frac{2\sqrt{g}}{3}\left(\ln r - \frac{\lambda^2}{g}\right)^{3/2}\right), \tag{3}$$

где $H^{(1,2)}_{1/3}$ – функция Ханкеля первого и второго рода /5/. При $r \to 0$ $\psi^{(1)}$ стремится к нулю, а $\psi^{(2)}$ к бесконечности. С помощью этих функций можно построить для любых k^2 решение, обращающееся в нуль при $r = 0$. Эта функция удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра

$$\psi^{(1)}(k^2, \lambda, r) = \psi^{(1)}(0, \lambda, r) - k^2 \int_0^r \frac{\psi^{(1)}(0,\lambda,r)\psi^{(2)}(0,\lambda,r') - \psi^{(2)}(0,\lambda,r)\psi^{(1)}(0,\lambda,r')}{W[\psi^{(1)}(0,\lambda,r), \psi^{(2)}(0,\lambda,r)]} \psi(k^2, \lambda, r')\, dr', \tag{4}$$

где $W[\psi^{(1)}, \psi^{(2)}]$ – определитель Вронского двух решений. Решение этого уравнения аналитично по k^2 /6/. Так как $k^2 = 0$ не является особой точкой решения, в дальнейшем будем рассматривать случай $k^2 = 0$, обозначая соответствующее решение $\psi(r)$.

Легко видеть, что решение (3) как функция g имеет существенную особенность в точке $g = 0$, причем, после выделения этой особенности в виде множителя, $\psi(r)$ можно формально разложить в асимптотический ряд по степеням g. С другой стороны, можно пытаться решить уравнение (2) при $k^2 = 0$ методом обычной теории возмущений по константе связи g. Для этого заменим уравнение (2) эквивалентным ему интегральным уравнением

$$\psi(r) = r^{\lambda+1/2} - \frac{g}{2\lambda} \int_0^r \left(r^{\lambda+1/2} r'^{-\lambda+1/2} - r^{-\lambda+1/2} r'^{\lambda+1/2} \right) \frac{\ln r'}{r'^2} \psi(r')\, dr' \tag{5}$$

и будем искать решение в виде ряда по g

$$\psi(r) = r^{\lambda+1/2} + g\psi_1(r) + g^2\psi_2(r) + \ldots, \tag{6}$$

Тогда

$$\psi_1(r) = -\frac{1}{2\lambda} r^{\lambda+1/2} \int_0^r \frac{\ln r'}{r'} dr' + \frac{1}{2\lambda} r^{-\lambda+1/2} \int_0^r r'^{2\lambda-1} \ln r'\, dr'. \tag{7}$$

Первый интеграл в формуле (7) расходится на нижнем пределе. Регуляризуем его, заменяя нижний предел интегрирования на малую величину a. Для $\psi_1(r)$, $\psi_2(r)$, ... получаем следующие выражения

$$\psi_1(r) = \frac{1}{4\lambda} r^{\lambda+1/2} \left(\ln^2 a - \ln^2 r + \frac{\ln r}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda^2} \right) \tag{8}$$

$$\psi_2(r) = \frac{1}{(4\lambda)^2} r^{\lambda+1/2} \Big(\tfrac{1}{2}\ln^4 a + \tfrac{1}{2}\ln^4 r - \ln^2 a \cdot \ln^2 r + \frac{2}{3\lambda}\ln^3 a - \frac{5}{3\lambda}\ln^3 r - \tag{9}$$

$$- \frac{1}{\lambda^3}\ln^2 a + \frac{3}{\lambda^3}\ln^2 r - \frac{3}{\lambda^3}\ln r + \frac{1}{\lambda}\ln^2 a \cdot \ln r + \frac{3}{2\lambda^4} \Big).$$

Нетрудно проверить, что содержащие a члены факторизуются

$$\psi(r) = r^{\lambda+1/2} \left(1 + \frac{g}{4\lambda}\ln^2 a + \frac{g^2}{2(4\lambda)^2}\ln^4 a + \frac{g^2}{24\lambda^3}\ln^3 a - \frac{g^2}{32\lambda^4}\ln^2 a + \ldots \right) \times \tag{10}$$

$$\times \left(1 - \frac{g}{4\lambda}\ln^2 r + \frac{g}{4\lambda^2}\ln r - \frac{g}{8\lambda^3} + \frac{g^2}{32\lambda^2}\ln^4 r - \frac{5g^2}{48\lambda^3}\ln^3 r + \frac{3g^2}{16\lambda^4}\ln^2 r - \frac{3}{16\lambda^5}\ln r + \frac{3g^2}{32\lambda^6} + \ldots \right)$$

и, таким образом, устранение расходимостей сводится к перенормировке волновой функции. В каждом порядке по g в разложении (10) есть "главные" логарифмические члены вида $(g \ln^2 r)^n$ и "младшие" логарифмические члены, которые содержат $\ln r$ в меньших степенях. Легко просуммировать "главные логарифмы". Поскольку они возникают из первого интеграла в формуле (5), задача нахождения $\psi(r)$ в приближении "главных" сводится к решению дифференциального уравнения

$$\psi' = \frac{\lambda + 1/2}{r}\psi - \frac{g}{2\lambda}\frac{\ln r}{r}\psi,$$

что дает

$$\psi(r) \approx r^{\lambda+1/2} \exp\left\{ \frac{g}{4\lambda}(\ln^2 a - \ln^2 r) \right\}. \tag{11}$$

Разложим точное решение (3) в формальный ряд по g /5/:

$$\psi(r) = c \frac{\sqrt{r}}{\left(1 - \frac{g}{\lambda^2}\ln r\right)^{1/4}} \exp\left\{ -\frac{2\sqrt{g}}{3}\left(\frac{\lambda^2}{g} - \ln r\right)^{3/2} \right\} A(g\, r) = \tag{12}$$

$$= Ce^{-\frac{2\lambda^3}{3g}} r^{\lambda+1/2} \left(1 - \frac{g}{\lambda^3}\ln r\right)^{-1/4} \exp\left\{ -\frac{g}{4\lambda}\ln^2 r - \frac{g^2}{24\lambda^3}\ln^3 r + \ldots \right\} A(g, r),$$

где

$$A(g, r) = 1 + \sum_{k=1} \left[\frac{4\sqrt{g}}{3}\left(\frac{\lambda^2}{g} - \ln r\right) \right]^{3/2-k} \frac{\Gamma(k + 5/6)}{k!\,\Gamma(5/6 - k)} = 1 - \frac{5g}{48\lambda^3} - \frac{5g^2}{32\lambda^5}\ln r + \ldots \tag{13}$$

есть асимптотический ряд по g. Коэффициенты при обратных степенях аргумента в ряде (13) знакопеременны и возрастают при $k \to \infty$ как $k!$. При $r \to 0$ точное решение ведет себя следующим образом

$$\psi(r) \approx \frac{\sqrt{r}}{|\ln r|^{1/4}} \exp\left\{ -\frac{2\sqrt{g}}{3}|\ln r|^{3/2} \right\}. \tag{14}$$

Как видно из формулы (11), учет лишь "главных логарифмов" ряда теории возмущений дает совершенно другую асимптотику при малых r. С другой стороны, сравнивая формулы (10) и (12), нетрудно показать, что перенормированный ряд теории возмущений совпадает с асимптотическим разложением по g точного решения после умножения на постоянный множитель $\beta = 1 + \frac{g}{48\lambda^3} + \ldots$ Учет лишь "главных логарифмов" дает сходящийся ряд, в то время как точное решение имеет лишь асимптотическое разложение. Причина проста: коэффициенты при "главных логарифмах" достаточно быстро убывают с увеличением порядка, в то время как коэффициенты при "младших логарифмах" факториально возрастают. Таким образом, на этом примере демонстрируется неприменимость приближения "главных логарифмов". Кроме того, вследствие асимптотического характера ряда теории возмущений, невозможно однозначным образом восстановить по ряду функцию, разложением которой он является. Это обстоятельство всегда нужно учитывать при суммировании ряда теории возмущений. Заметим, что возникновение расходимостей в интегралах теории возмущений не имеет отношения к существу обсуждаемых здесь трудностей (связанных с неаналитичностью по константе связи), хотя бы потому, что точное решение не содержит таких расходимостей.

Авторы выражают благодарность Н.Н.Боголюбову, С.С.Герштейну, А.В.Ефремову, А.А.Логунову, А.Н.Тавхелидзе, Р.Н.Фаустову за ценные обсуждения.

Литература

1. R.Blankenbecler, M.L.Goldberger, N.N.Khuri, S.B.Treiman, Annals of Phys. (N.Y.), 10,62(1960).
2. Б.А. Арбузов, А.А. Логунов, А.Т. Филиппов, О.А. Хрусталев. Препринт ОИЯИ, Р-1318; ЖЭТФ (в печати).
3. G.Domokos, P.Suranyi. Препринт ОИЯИ, Е-1400.
4. А.Т. Филиппов. Препринт ОИЯИ (в печати).
5. Г.Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, ч.1 И.Л. (1949).
6. E.Predazzi, T.Regge, Nuovo Cim. 24, 518 (1962). A.Bottino, A.M.Longoni, T.Regge, Nuovo Cim. 23, 954 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
19 ноября 1963 г.