



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Г. Домокош, П. Шурань

P-1453

О ПОВЕДЕНИИ ФУНКЦИЙ ГРИНА  
В ТЕОРИИ ПОЛЯ  
НА МАЛЫХ РАССТОЯНИЯХ

Посвящается проф. К.Ф. Новобадскому  
(к 80-летию со дня рождения)

*Acta Phys., Hung., 1964, т 17, f 1-2,  
p. 107-114.*

Дубна 1964

Г. Домокош, П. Шуранья

P-1453

О ПОВЕДЕНИИ ФУНКЦИЙ ГРИНА  
В ТЕОРИИ ПОЛЯ  
НА МАЛЫХ РАССТОЯНИЯХ

Посвящается проф. К.Ф. Новобадскому  
(к 80-летию со дня рождения)

Направлено в журнал "Акта физика хангарика"

Общественный институт  
физики и астрономии  
БЮТЕНС

Дубна 1964

2250/1 mp

Поведение функции Грина в квантовой теории поля на малых расстояниях было предметом исследования многих авторов; во-первых, эта проблема представляет принципиальный интерес, и, во-вторых, она имеет практический смысл, так как предсказывает поведение наблюдаемых величин, таких как вероятности перехода и т.д., при высоких энергиях. Но определенный и окончательный ответ до сих пор не получен, и общее мнение таково, что ответ на вопрос о поведении при высоких энергиях /или на малом расстоянии/ функций Грина /Г.Ф./ или S матричных элементов может разрешить также проблему самосогласованности квантовой теории поля.

Хорошо известно, что требования согласованности налагают довольно строгие ограничения на двух- и трехчастичную Г.Ф.<sup>1/</sup>, но до сих пор не найдены такие ограничения для Г.Ф. высшего порядка; в частности, четырехчастичная Г.Ф. представляет собой особый интерес вследствие ее связи с элементами S матрицы, а также тесной связи с экспериментом.

В настоящей работе мы исследуем четырехчастичную Г.Ф. теории поля

$$G(x_1, \dots, x_4) = \langle 0 | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_4)) | 0 \rangle,$$

где  $\phi(x)$  скалярное поле, с помощью уравнения Бете-Солпитера /Б.С./. Если взять для ядра Б.С. низшее неисчезающее приближение, можно установить тесную связь между поведением Г.Ф. на малых расстояниях и типом взаимодействия: мы находим различное поведение в зависимости от того, является ли размерность константы связи отрицательной степенью длины /"сверхнормируемое взаимодействие"/, положительной степенью длины /нормируемое взаимодействие/.

В конце статьи мы обсудим некоторые возможные физические приложения наших результатов.

## 2. Преобразование уравнения Бете-Солпитера

Четырехчастичная Г.Ф. является трансляционно-инвариантной, поэтому ее Фурье-преобразование зависит от трех независимых импульсов. Обозначая импульсы одной частицы через  $p_1, \dots, p_4$ , запишем:

$$p_1 = p + \frac{1}{2}E, \quad p_2 = q + \frac{1}{2}E,$$

$$p_2 = -p + \frac{1}{2} E,$$

$$p_4 = -q + \frac{1}{2} E,$$

так что Фурье-преобразование  $G(x_1, \dots, x_4)$  зависит от  $p, q, E$ . Энергия-импульс  $\sum_{i=1}^4 p_i = 0$  сохраняется,  $E$  является полным 4-мерным импульсом в с.ц.м.

Функция  $G(p, q, E)$  удовлетворяет уравнению Б.С.:

$$[(p + \frac{1}{2} E)^2 - m^2][p - \frac{1}{2} E - m^2] G(p, q | E) = \delta(p - q) + \frac{g^2}{(2\pi)^4 i} \int d\mathcal{K}(p, p' | E) G(p', q | E). \quad /2.1/$$

Нас интересует поведение  $G(p, q | E)$  для  $|p| \rightarrow \infty$ . Это означает, что в /2.1/ мы можем пренебречь  $E$  по сравнению с  $p$ . / пока мы не пренебрегаем массовыми членами для избежания трудностей, связанных с инфракрасными расходимостями/. Опуская везде переменную  $E$ , получаем:

$$(p^2 - m^2)^2 G(p, q) = \delta(p - q) + \frac{g^2}{(2\pi)^4 i} \int dp' K(p, p') G(p', q). \quad /2.2/$$

Теперь мы хотим перейти к евклидовой метрике в /2.2/, как это было предположено Вико<sup>/2/</sup>. Это оказывается возможным, если

$$K(p, p' | E = 0) = K(p, p'),$$

так как рассматриваемая функция от  $p_-, p'_-, p_0, p'_0$  аналитична по  $p_0, p'_0$  в первом и третьем квадрантах комплексных  $p_0$  и  $p'_0$  плоскостей для действительных значений  $p_-, p'_-$ . Мы не можем доказать это свойство для ядра Б.С. вообще. Но тот тип ядер, который мы будем рассматривать, этому условию удовлетворяет.

Итак, мы получаем в евклидовой метрике:

$$(p^2 + m^2)^2 G(p, q) = \delta(p - q) + \frac{g^2}{(2\pi)^4} \int dp' K(p, p') G(p', q), \quad /2.3/$$

где  $p, q$  означают уже евклидовы векторы:

$$p^2 = p_0^2 + p_-^2 \quad \text{и т.д.}$$

Теперь мы замечаем, что наше уравнение /2.3/ инвариантно на 4-мерной группе вращений. Поэтому естественно разложить  $G$  и  $K$  по 4-мерным сферическим гармоникам:

$$G(p, q) = \sum_{n \ell m} Z_{n \ell}^{*m}(\hat{p}) G_{n \ell}(p^2, q^2) Z_{n \ell}^m(\hat{q}), \quad /2.4/$$

где  $Z_{n \ell}^m(\hat{e})$  - нормированная 4-мерная сферическая гармоника, как определено, например, в /2/, зависящая от единичного вектора  $\hat{e}$ .

Подставляя разложение /2.4/ и соответствующие разложения для ядра в уравнение /2.3/, получаем для радиальных функций:

$$\begin{aligned} (p^2 + m^2)^2 G_{n \ell}(p, q) &= \frac{\delta(p-q)}{\sqrt{p^3 q^3}} + \\ &+ \frac{g^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty p'^3 dp' K_{n \ell}(p, p') G_{n \ell}(p', q), \end{aligned} \quad /2.5/$$

где  $p, p', q$  означают модули соответствующих 4-векторов.

В дальнейшем мы ограничиваемся рассмотрением ядер, как указано во введении, и анализируем свойства решений /2.5/.

### 3. Низший порядок ядер

Наши ядра Б.С. определяются как сумма вкладов диаграмм, регулярных в точке  $E^2 = 4m^2$  в комплексной  $E^2$  плоскости.

В предположении, что ядро Б.С.

$$\frac{g^2}{(2\pi)^4 i} K(p, p' | E, g^2)$$

может быть разложено по степеням константы связи  $g^2$ , первые несколько членов разложения даны вкладом диаграммы на рис. 1.

Диаграммы на рис. 1. нужно понимать в несколько символическом смысле: некоторые члены могут отсутствовать, а внутренние линии могут не представлять те же самые частицы, что и внешние, и т.д. в зависимости от типа взаимодействия, который мы предлагаем.

Тем не менее имеется одно важное свойство ядер в низшем порядке, которое можно непосредственно объяснить исходя из рис. 1. Это свойство состоит в том, что приближения низшего порядка к ядру Б.С. имеют следующую форму:

$$K(p, p' | E) = f(E^2) P(E, p, p') \quad /3.2/$$

или

$$K(p, p' | E) = g((p-p')^2) \zeta(E, p, p'), \quad /3.2/$$

где функции  $f(z)$  и  $g(z)$  обладают спектральным представлением вида:

$$\left. \begin{aligned} f(z) \\ g(z) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{\mu_0}^{\infty} \frac{dx}{x-z} \left. \begin{aligned} \text{Im } f(x+i0) \\ \text{Im } g(x+i0), \end{aligned} \right\} \quad /3.3/$$

а  $P$  и  $Q$  являются инвариантными полиномами по всем их переменным. /В (3.3) мы пока пренебрегли вычитаниями/. В работе /3/ было показано, что вклады типа /3.1/ отличны от нуля только при определенных дискретных значениях  $n$ ,  $\ell$  и могут рассматриваться отдельно /они по существу представляют собой вычитаемые члены в Г. Ф./. Поэтому мы ограничиваемся рассмотрением ядер типа /3.2/. Если  $E=0$ , тогда  $Q$  представляет собой полином от инвариантов  $p^2$ ,  $p'^2$  и  $p \cdot p'$ . Теперь функция типа /3.3/ обладает очень простым разложением согласно нашим 2 функциям. В действительности после проведения простых вычислений мы получаем /3/:

$$g((p-p')^2) = \sum_{n\ell m} Z_{n\ell}^m(p) \hat{g}_n Z_{n\ell}^{m*}(p'), \quad /8.4/$$

где

$$\hat{g}_n = \int_0^{\infty} r^3 dr \frac{J_n(pr)}{pr} V(r) \frac{J_n(p'r)}{p'r}, \quad /3.5/$$

$$V(r) = \frac{1}{\pi} \int_{\mu_0}^{\infty} dx \cdot x^3 \gamma(x) \frac{K_1(xr)}{xr}, \quad /3.6/$$

в обозначениях

$$\gamma(x) = \text{Im } g(x+i0).$$

При помощи уравнений /3.4/-/3.6/ и соотношений

$$-\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1-n^2}{r^2} \right] \frac{J_n(pr)}{pr} = p^2 \frac{J_n(pr)}{pr}$$

мы видим, что ядро типа /3.2/ при  $E=0$  может быть представлено как преобразование Ганкеля  $V(r)$  и его производных; кроме того, можно заметить, что  $K_{n\ell}$  не зависит явно от  $n$  и  $\ell$ , а только зависит от  $n$ , а, следовательно, то же самое справедливо и для  $G_{n\ell}$ .

#### 4. Поведение функции Грина на малых расстояниях

Представляя Г.Ф. в виде преобразования Ганкеля, подобно /3.5/

$$G_n(r, r') = \int_0^\infty r^3 dr \int_0^\infty r'^3 dr' \frac{J_n(pr)}{pr} G_n(r, r') \frac{J_n(p'r')}{p'r'} \quad /4.1/$$

из /3.7/ видим, что  $G_n(r, r')$  удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} D_n^2 G &= \left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d}{dr} - \left( m^2 + \frac{n^2-1}{r^2} \right) \right]^2 G_n(r, r') = \\ &= \frac{\delta(r-r')}{\sqrt{r^3 r'^3}} + \frac{g^2}{(2\pi)^4} W(r) G_n(r, r'). \end{aligned} \quad /4.2/$$

Если  $r'$  остается фиксированным при конечных значениях, то, чтобы исследовать асимптотическое поведение для  $r \rightarrow 0$ , мы можем опустить  $\delta$  функцию в /4.2/.  $W(r)$  есть "эффективный потенциал" вида

$$W(r) = \tilde{Q}(D_n) V(r), \quad /4.3/$$

где  $\tilde{Q}(D_n)$  — некоторый полином в дифференциальном операторе, который определяется посредством /4.2/.

Теперь, как это хорошо известно, асимптотическое поведение  $G_n(r, r')$  при  $r \rightarrow 0$  в значительной степени зависит от поведения  $W(r)$  при малых  $r$ . Однако это ясно из соображений размерности. Действительно, как непосредственно можно видеть из /4.2/, величина  $g^2 W(r)$  должна иметь размерность  $L^{-4}$  в системе единиц, где  $\hbar = c = 1$ . С другой стороны, из /3.6/ и /4.3/ находим, что  $W(r)$  имеет асимптотику чисто степенного типа при  $r \rightarrow 0$ . Записываем это как

$$W(r) = O(r^{-4-\alpha}). \quad /4.4/$$

Далее, если константа связи имеет размерность  $L^\eta$ , то сразу получаем:

$$\alpha = 2\eta. \quad /4.5/$$

С другой стороны, как видно из уравнения /4.2/,  $G_n(r, r')$  при  $r \rightarrow 0$  имеет степенеподобное поведение, если  $\alpha \leq 0$ . Для  $\alpha > 0$ ,  $G_n(r, r')$  имеет существенную особенность в начале; как показано в /3/, она ведет себя следующим образом:

$$G_n(r, r') \sim \exp \{ \sigma r^{-\alpha/4} \},$$

$$\sigma = \frac{4g^4}{a} \exp \{ i N \pi / 2 \},$$

$N$  целый.

### § 5. О б с у ж д е н и е

Три класса решений  $a < 0$ ,  $a = 0$ ,  $a > 0$  физически соответствуют согласно /4.5/ сверхренормируемым, ренормируемым и неренормируемым взаимодействиям. Разница между сверхренормируемым и ренормируемым взаимодействиями заключается в том, что для последнего взаимодействие на малых расстояниях того же порядка, что и для кинетического члена; тогда как для первого взаимодействие слабее, и кинетические члены остаются только тогда, когда  $r \rightarrow 0$ . Математическая разница возникает в аналитических свойствах  $G_n$  как функции от  $n$ : при  $a < 0$  она мероморфна по  $n$ , при  $a = 0$  она имеет ряд разрезов /3/.

В качестве примера третьего класса  $a > 0$  можно рассмотреть следующую модель. Две скалярные частицы взаимодействуют посредством обмена фермионной парой. Предполагая следующий вид взаимодействия:

$$L_{int} = f (\phi \partial_\mu \phi) (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi),$$

получаем  $a = 4$ ,  $b(4.4)$

$$G(r, r') \sim \exp \left\{ \frac{\sqrt{f}}{r} \rho \right\}$$

$$(\rho = \pm 1, \pm i), r \rightarrow 0.$$

в зависимости от выбранного нами решения. Во всяком случае, можно показать, что существует одно и только одно решение, которое удовлетворяет интегральному уравнению /2.5/.

Однако решение указанного выше типа имеет довольно странные и необычные свойства. Очевидно, оно сингулярно по константе связи, но это, вероятно, не то свойство, которое можно наблюдать экспериментально. Однако при обратном переходе к импульсному пространству можно видеть, что соответствующая амплитуда рассеяния имеет существенную сингулярность по передаче импульса /соответственно, но при перекрестном преобразовании можно рассматривать эту функцию как мультипериферическую диаграмму, дающую вклад в процессы при высоких энергиях /рис. 2/, где  $p$  играет роль импульса в с.ц.м./.

Странное поведение амплитуды рассеяния



$$T(s, t) \sim e^{i\sqrt{t}s}$$

при  $s \rightarrow \infty$  означает, что эта амплитуда не удовлетворяет дисперсионному соотношению с конечным числом вычитаний. Ситуация напоминает случай потенциала с жестким кором радиуса  $R = \sqrt{t}$ ; из квантовой механики хорошо известно, что не сама амплитуда рассеяния  $T(k)$ , а  $e^{-ikR} T(k)$  удовлетворяет дисперсионному соотношению. Во всяком случае, кажется, что в координатном представлении имеется единственное решение, тогда как попытка итерировать однопетлевую диаграмму потребовала бы новых констант вычитания в каждом случае взаимодействия.

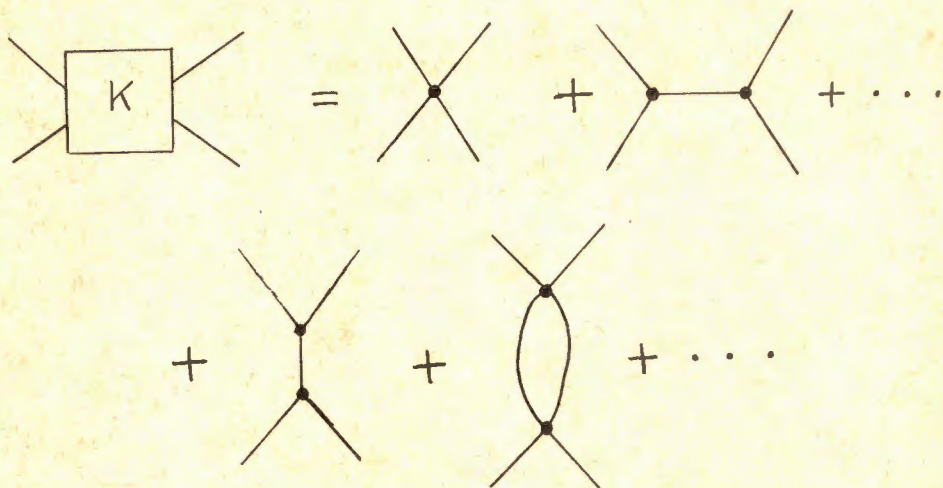
Совершенно очевидно, что наша процедура определения асимптотического поведения функции Грина далеко не строгая и полная /в частности, сделанное нами приближение к ядру Б.С. является, по крайней мере на первый взгляд, очень грубым и не позволяет даже оценить следствие для решения более хорошего ядра. Тем не менее мы думаем, что наши результаты вполне указывают на существенную разницу между взаимодействиями различных типов. Не исключено, что в результате подобных исследований можно прийти к пересмотру общего мнения о пренебрежимо малой роли слабых взаимодействий в существующей теории.

Авторы выражают искреннюю благодарность проф. Д.И. Блохицеву и Н.Н. Боголюбову за их интерес к настоящей работе. Авторы также благодарны за ряд очень интересных дискуссий проф. М. Чини во время его визита в Дубну. Нам было приятно узнать, что независимо от нас группа итальянских физиков пришла к таким же заключениям /4/, что и мы в работе /3/ и в настоящей работе.

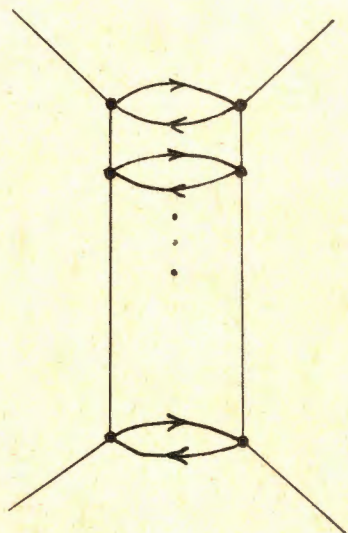
#### Л и т е р а т у р а

1. H. Lehmann, K. Symanzik, F. Zimmermann. Nuovo Cim., 2, 425 (1955).
2. G.G. Wick. Phys. Rev., 96, 1124 (1954).
3. G. Domokos and P. Suranyi. Nucl. Phys. /в печати/. Препринт ОИЯИ, Е - 1400, Дубна, 1983.
4. A. Bastai, L. Bertocchi, S. Fubini and G. Furlan. Preprint CERN 7229/TH, 374 (1963).  
A. Bastai, L. Bertocchi, G. Furlan, M. Tonin. Preprint CERN, 7081/TH, 370 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел  
23 декабря 1983 г.



Р и с. 1.



Р и с. 2.