ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

Ю.А. Плис, Л.М. Сороко

Р-1449

ДЕПОЛЯРИЗАЦИЯ ЧАСТИЦ ПРИ УСКОРЕНИИ В СИНХРОЦИКЛОТРОНЕ

Краткое изложение результатов данного расчета представлено докладом на Международной конференции по ускорителям в Дубне 1963 г.

Дубна 1963

Ю.А. Плис, Л.М. Сороко

Р-1449

ДЕПОЛЯРИЗАЦИЯ ЧАСТИЦ ПРИ УСКОРЕНИИ В СИНХРОЦИКЛОТРОНЕ

Краткое изложение результатов данного расчета представлено докладом на Международной конференции по ускорителям в Дубне 1963 г.

Дубна 1963

В настоящее время большое внимание физиков привлекает проблема создания на ускорителях пучков первично поляризованных частиц. Решение ее откроет возможности проведения тщательных исследований явления поляризации, играющего большое значение в сильных взаимодействиях. Поэтому во многих ядерных лабораториях разрабатываются методы получения интенсивных пучков поляризованных частиц. Одновременно с этим тщательно изучается вопрос о том, как сохранить поляризацию частиц при ускорении.

История вопроса о деполяризации частиц довольно поучительна. Первые расчеты [1] были сделаны в 1956 г. для случая циклотрона. Было показано, исходя из нерелятивистского уравнения Шредингера, что деполяризация протонов, ускоренных в обычном циклотроне до энергии около 15 Мэв и выведенных из камеры, составляет не более 3%.

Позднее [2] в 1958 г. была рассмотрена деполяризация в синхроциклотроне ЦЕРН'а. Расчеты были сделаны нестрого. Использовалось нерелятивистское приближение. Основной эффект деполяризации вызывался вертикальными колебаниями. Остальные компоненты поля учитывались как адиабатические поправки. В этих предположениях деполяризация не превышала 10^{-6}. Утверждение, что учет релятивистских эффектов не изменит заметным образом полученных оценок, создало ложное оптимистическое представление о том, что проблемы сохранения поляризации при ускорении частиц нет. В действительности это было не так.

Деполяризация протонов в синхрофазотроне рассматривалась [3] на примере синхротрона в Сакле /Франция/ на 3 Бэв. Была обнаружена возможность сильной деполяризации за счет комбинации, с одной стороны, эффекта вертикальных колебаний, с другой стороны, прохождения частиц через прямолинейные участки траекторий, где магнитное поле спадает до нуля. В этом ускорителе возникает два резонанса. Расчеты в этой работе производились, исходя из классического релятивистского уравнения движения для спина.

Совсем недавно было сделано рассмотрение резонансной деполяризации протонов в синхроциклотроне [4]. Использовалось релятивистское уравнение движения спина протона. Совместно учитывалось влияние различных факторов изменения магнитного поля. Как было показано, деполяризующие резонансы на циклотроне в Рочестере наступают при энергиях 110 Мэв и 640 Мэв. Результаты этой работы заставляют более строго рассмотреть влияние подобных резонансов также и в других конструкциях синхроциклотрона.

В работе[5], выполненной в 1962 г., проведено систематическое рассмотрение ряда резонансов для различных ускорителей протонов высоких энергий - вплоть до энергии 300 Бэв. В различных конструкциях ускорителей резонансы существенно отличаются по своей интенсивности.

В той же работе[5] кроме этого была рассчитана деполяризация электронов и дейтронов. Если ускорять дейтроны в протонном синхротроне с жесткой фокусировкой, то резонансы сдвигаются в сторону более высоких энергий. Причина этого состоит в том, что аномальный магнитный момент дейтрона значительно меньше, чем у протона[x].

Некоторые замечания о методе прохождения резонансов содержится в работе[6].

В связи с проводимыми в Лаборатории ядерных проблем разработками источника поляризованных частиц перед авторами встала задача детально рассчитать эффекты деполяризации частиц в синхроциклотроне ЛЯП на 680 Мэв.

Результаты данной работы могут оказаться полезными при конструировании и наладке других аналогичных ускорителей.

1. Классическое релятивистское уравнение движения спина

Известно[7,8], что спиновую поляризацию частицы можно задать двумя способами: либо - с помощью антисимметрического тензора, либо - с помощью 4-вектора поляризации. Как и в ряде других работ, мы пользуемся вторым способом, как более наглядным.

Определим 4-вектор поляризации. Пусть в системе покоя частицы временная компонента 4-вектора поляризации равна нулю, а пространственная - совпадает с 3- вектором $\vec{s}$, который является обычным вектором поляризации частицы. В лабораторной системе координат, где частица имеет импульс $\vec{p}$, 4-вектор поляризации $T = (T^0, \vec{T})$ находится преобразованием Лоренца:

$$\left.\begin{aligned} \vec{T} &= \vec{s} + \frac{(\vec{s}\cdot\vec{p})}{m(m+E)}\,\vec{p} \\ T^0 &= \frac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{m} \end{aligned}\right\} \qquad /1.1/^{xx}$$

---

[x] Использованное автором[5] значение гиромагнитного отношения для дейтрона ошибочно принято меньшим в два раза: $g_d = 0{,}85$ вместо $g_d = 1{,}72$ в действительности.

[xx] Используется система единиц СГС, $c = 1$, $h = 1$.

Отметим некоторые свойства 4-вектора T. Пусть $u = (u^0, \vec{u}) = \gamma(1, \vec{v})$ - 4-вектор скорости частицы. Тогда, поскольку $T.u$ является инвариантом,

$$T\cdot u = T^0 u^0 - \vec{T}\vec{v} = 0\,, \quad T^0 = \vec{T}\cdot\vec{v}\,. \qquad /1.2/$$

Аналогично находим

$$T\cdot T = -\vec{s}^{\,2}. \qquad /1.3/$$

В системе покоя частицы при наличии магнитного поля $\vec{B}$ 3-вектор спина $\vec{T} = \vec{s}$ подчиняется обычному уравнению

$$\frac{dT}{d\tau} = \left(\frac{ge}{2m}\right)[\vec{T}\times\vec{B}]\,, \qquad /1.4/$$

где g -гиромагнитное отношение, e -заряд частицы, m -масса частицы. Хотя $T^0 = 0$ в мгновенной системе покоя, $\frac{dT^0}{d\tau}$ в общем случае отлична от нуля. Из /1.2/ получаем

$$\frac{dT^0}{d\tau} = \vec{T}\cdot\left(\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right). \qquad /1.5/$$

Уравнение движения вдоль траектории записывается в общем случае как

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{f}{m}\,,$$

где f - 4 -вектор силы. В электромагнитном поле сила выражается через тензор поля F :

$$\{F^{0\alpha}\} = -\vec{E}\,, \qquad \{F^{\beta\gamma}\} = -\vec{B}\,.$$

Тогда

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{e}{m}\,F\cdot u. \qquad /1.6/$$

Как показано в[8], обобщением уравнения / 1.4/ для произвольной системы координат является уравнение

$$\frac{dT}{d\tau} = \left(\frac{ge}{2m}\right)[F\cdot T + (T\cdot F\cdot u)u] - \left[\frac{du}{d\tau}\cdot T\right]\cdot u\,; \qquad /1.7/$$

или, используя /1.6/

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{e}{m}\left\{\frac{g}{2}\,F\cdot T + \frac{g-2}{2}(T\cdot F\cdot u)\cdot u\right\}. \qquad /1.8/$$

Уравнение /1.8/ получается также с помощью квантово-механических рассуждений[9].

Уравнение /1.8/ для пространственых компонент запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{T}}{d\tau} &= \frac{g}{2}\,\frac{e}{m}\left([\vec{T}\times\vec{B} + (\vec{v}\vec{T})\vec{E}\,]\right. - \\ &\quad - \left(\frac{g-2}{2}\right)\frac{e}{m}\,\gamma^2\,\vec{v}\,[(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{T} + \vec{E}\cdot\vec{T} - (\vec{v}\vec{E})(\vec{v}\vec{T})]\,; \end{aligned} \qquad /1.9/$$

или через поляризацию $\vec{s}$:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{g}{2}\frac{e}{m\gamma}\vec{s}\times[\vec{B} + \frac{\gamma}{\gamma+1}(\vec{E}\times\vec{v})] + \qquad /1.10/$$

$$+ (\frac{g-2}{2})\frac{e}{m\gamma}\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{s}\times[(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})\times\vec{v}].$$

Окончательно уравнение движения запишется в виде:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{e}{m\gamma}\vec{s}\times[\vec{B} + \frac{g-2}{2}(\vec{B}^{\parallel} + \gamma\vec{B}^{\perp})] + \frac{e}{m}\vec{s}\times(\vec{E}\times\vec{v})[\frac{g-2}{2} + \frac{1}{\gamma+1}], \qquad /1.11/$$

где $\vec{B}_{\parallel}$ и $\vec{B}_{\perp}$ – компоненты $\vec{B}$, направленные параллельно и перпендикулярно скорости частицы $\vec{v}$, соответственно.

Как следует из[9], условия, достаточные для перехода к классическому релятивистскому уравнению движения спина /1.11/, выполняются во всех существующих ускорителях при современной технике получения магнитных и электрических полей.

2. Линеаризация уравнения движения

Рассмотрим движение поляризованной частицы в ускорителе. Пусть первоначальная поляризация является полной, а вектор спина направлен в начальный момент по магнитному полю, то есть, $s = 1$. При ускорении спины частиц будут в общем случае отклоняется от вертикального направления. Разные частицы при этом описывают различные траектории, поэтому углы / θ, ϕ /, определяющие направление спина частицы, могут принимать разные значения. Результирующая поляризация пучка находится как

$$P = \overline{Cos^2\frac{\theta}{2} - Sin^2\frac{\theta}{2}},$$

где усреднение производится по всем частицам пучка.

Таким образом решаем уравнение движения для одной частицы, и затем усредним поляризацию по свободным параметрам пучка.

Ограничимся сначала случаем малой деполяризации. Предположим далее, что направление магнитного поля $\vec{B}$ мало отличается от поля $\vec{B}_0$ на равновесной орбите. Тогда и поляризация $\vec{s}$ может мало отличаться от вертикального орта $\vec{k}$. В общем же случае может оказаться, что деполяризация / $\vec{s} - \vec{k}$ / велика. Тогда применять уравнение малой деполяризации нельзя. Такие случаи указывают на наличие сильного резонанса.

Итак, пусть $\vec{b}$ –проекция вектора / $\vec{B} - \vec{B}_0$ / на горизонтальную плоскость. Тогда, если $\vec{b} \ll \vec{B}_0$, то можно считать, что $\vec{B} \approx \vec{B}_0 + \vec{b}$. В этих допущениях уравнение /1.11/ запишется в виде:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{e}{m\gamma}\vec{s}\times[\vec{B}_0 + \vec{b} + \frac{g-2}{2}(\vec{b}_{\parallel} + \gamma\vec{B}_0 + \gamma\vec{b}_{\perp})]. \qquad /\Pi.1/$$

Если $\vec{s}$ отличается от $\vec{k}$ на малую величину $\vec{s}'$, то $Sin\,\theta \approx \theta = s'$, а степень деполяризации $D = 2(\frac{\theta}{2})^2 = \frac{(s')^2}{2}$. Если в /П.1/ пренебречь членами второго и выше порядка по s' и $\frac{b}{B_0}$, то мы получим:

$$\frac{d\vec{s}'}{dt} = \frac{e}{m\gamma}[1 + \frac{g-2}{2}\gamma]\vec{s}'\times\vec{B} + \frac{e}{m\gamma}k\times[\vec{b} + \frac{g-2}{2}(\vec{b} + \gamma\vec{b}_{\perp})]. \qquad /\Pi.2/$$

Представим горизональные векторы $\vec{s}'$ и $\vec{b}$ в комплексной форме: $s' = s'_x + is'_y$, $b = b_x + ib_y$. Тогда линеаризованное уравнение /П.2/ примет вид:

$$\frac{ds'}{dt} = -i\omega_{\perp}s' + i\omega_{\parallel}\frac{b_{\parallel}}{B_0} + i\omega_{\perp}\frac{b_{\perp}}{B_0}, \qquad /\Pi.3/$$

где $\omega_{\perp} = \omega_0(1 + \frac{g-2}{2}\gamma)$ – частота поперечной прецессии,

$\omega_{\parallel} = \omega_c\frac{g}{2}$ – частота продольной прецессии, /П.4/

$\omega_c = \frac{eB_0}{m\gamma}$ – циклотронная частота.

Линеаризованное уравнение для деполяризации в электрическом поле получается аналогичным образом:

$$\frac{d\vec{s}'}{dt} = \frac{e}{m}[\vec{k}\times(\vec{E}\times\vec{v})](\frac{g-2}{2} + \frac{1}{\gamma+1}). \qquad /\Pi.5/$$

Решение уравнения /П.3/ в самом общем виде запишется следующим образом:

$$s' = ie^{-i\phi(t)}\int_0^t e^{i\phi(t')}[\omega_{\parallel}\frac{b_{\parallel}(t')}{B_0} + \omega_{\perp}\frac{b_{\perp}(t')}{B_0}]\,dt, \qquad /\Pi.6/$$

где $\phi(t) = \int_0^t \omega_{\perp}(t')dt'$, а s', $b_{\parallel}$ и $b_{\perp}$ – комплексные векторы на плоскости $x0y$.

Покажем теперь в качестве иллюстрации, как описывает линеаризованное уравнение наиболее характерные частные случаи.

А. Резонанс

Пусть $\omega_{\perp} = Const$, а b меняется по закону: $b_{\perp} = B_0 a e^{-i\omega t}$. Тогда $\phi = \omega_{\perp}t$ а

$$s' = i\omega_{\perp}a e^{-i\omega_{\perp}t}\frac{[e^{i(\omega_{\perp}-\omega)t} - 1]}{i(\omega_{\perp}-\omega)} \xrightarrow[\omega\to\omega_{\perp}]{} ia\omega_{\perp}t\,e^{i\omega_{\perp}t}. \qquad /\Pi.7/$$

Таким образом, вектор s' вращается с частотой $\omega_{\perp}$ и возрастает линейно во времени. При этом допустимое число оборотов в магнитном поле $b_{\perp}$ не должно превышать

$$n_{max} \cong \frac{1}{2\pi a}. \qquad /\Pi.8/$$

В противном случае наступит заметная деполяризация.

Б. Адиабатические изменения поля

Если $\omega \ll \omega_{\perp}$, то есть, изменения магнитного поля за один период прецессии весьма малы, то

$$s' = i\omega_{\perp} e^{-i\omega_{\perp} t} \cdot a \frac{[e^{i(\omega_{\perp}-\omega)t} - 1]}{i(\omega_{\perp}-\omega)} \xrightarrow[\omega \ll \omega_{\perp}]{} a(e^{-i\omega t} - e^{-i\omega_{\perp} t}). \qquad /П.9/$$

Вектор s' прецессирует около мгновенного значения поля, следуя за ним и не отклоняясь от него на величину более, чем a. При этом $|s'|_{max} = 2a$, а максимальная деполяризация

$$D_{max} = 2a^2 = 2\left(\frac{b_{\perp}}{B_0}\right)^2. \qquad /П.10/$$

В. Небольшие, но быстрые изменения магнитного поля

Этот случай соответствует $\omega_{\perp} \ll \omega$. Тогда

$$s' = a\frac{\omega_{\perp}}{\omega}[e^{-i\omega_{\perp} t} - e^{-i\omega t}],$$

$$|s'|_{max} = 2a\left(\frac{\omega_{\perp}}{\omega}\right), \quad D_{max} = 2a^2\left(\frac{\omega_{\perp}}{\omega}\right)^2.$$

Таким образом, вектор изменения поляризации s' не успевает следить за быстрыми изменениями поля, и деполяризация подавливается по сравнению с нерезонансным случаем дополнительно в $/\frac{\omega_{\perp}}{\omega}/^2$ раз.

3. Деполяризация пучка протонов в магнитном поле синхроциклотрона

Будем считать, что поле B_z в медианной поверхности ускорителя определяется выражением:

$$B_z = B_0[1 - \delta(r) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(r)\,\mathrm{Cos}\,k\theta], \quad \delta > 0, \qquad /Ш.1/$$

где B_0 -напряженность поля в центре ускорителя, $\delta(r)$ -определяет спад поля к периферии магнита, а азимутальные неоднородности поля зависят от радиуса.

Если медианная поверхность отклоняется от средней плоскости магнита незначительно, то из соотношения $\mathrm{rot}\,\vec{B} = 0$, получается:

$$B_\rho = \Delta z \frac{\partial B_z}{\partial r} = -\Delta z \cdot B_0\left(\frac{d\delta(r)}{dr} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{dA_k(r)}{dr}\,\mathrm{Cos}\,k\theta\right), \qquad /Ш.2/$$

$$B_\theta = -\frac{\Delta z}{r}\frac{\partial B_z}{\partial\theta} = -\frac{\Delta z}{r}\cdot B_0\sum_{k=1}^{\infty} k A_k(r)\,\mathrm{Sin}\,k\theta, \qquad /Ш.3/$$

где Δz - смещение частицы относительно медианной поверхности.

Как известно[10], малые отклонения медианной поверхности от средней геометрической плоскости можно выразить в виде:

$$z_0(r,\theta) = a_0(r) + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell(r)\,\mathrm{Cos}\,\ell\theta. \qquad /Ш.4/$$

Истинное смещение частиц относительно медианной поверхности, когда частицы совершают колебания

$$z = z_m \mathrm{Cos}\sqrt{n}\,\theta + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell \frac{n}{n-\ell^2}\,\mathrm{Cos}\,\ell\theta, \qquad /Ш.5/$$

где первый член описывает свободные вертикальные колебания, а второй член-вынужденные колебания[11], - запишется в виде:

$$\Delta z = z_m \mathrm{Cos}\sqrt{n}\,\theta + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell \frac{n}{n-\ell^2}\,\mathrm{Cos}\,\ell\theta - \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell\,\mathrm{Cos}\,\ell\theta. \qquad /Ш.6/$$

Поскольку в синхроциклотроне $n < 0{,}2$, то $\frac{n}{n-\ell^2} \ll 1$, и тогда

$$\Delta z \cong z_m \mathrm{Cos}\sqrt{n}\,\theta - \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell\,\mathrm{Cos}\,\ell\theta. \qquad /Ш.7/$$

Воспользуемся теперь общим решением уравнения /П.3/ в виде /П.6/. Если B_0 направлено вдоль положительных значений z, то протоны движутся по часовой стрелке, и

$$d\theta = -\omega_c\,dt. \qquad /Ш.8/$$

Произведя такую замену переменных, мы получим:

$$s' = -ie^{-i\phi(\theta)}\int_0^\theta e^{i\phi(\theta')}\left[\left(1 + \frac{g-2}{2}\gamma\right)\frac{b_{\perp}}{B_0} + \frac{g}{2}\frac{b_{||}}{B_0}\right]d\theta', \qquad /Ш.9/$$

где

$$\phi(\theta) = -\int_0^\theta\left(1 + \frac{g-2}{2}\gamma\right)d\theta'.$$

Радиальная компонента поля B_ρ определяет $B_{\perp}$, а азимутальная компонента определяет составляющую $b_{||}$. Таким образом,

$$b_{||} = -iB_\theta e^{i\theta} = i\frac{\Delta z}{r}B_0\sum_{k=1}^{\infty} k A_k(r)\,\mathrm{Sin}\,k\theta\, e^{i\theta}, \qquad /Ш.10/$$

$$b_{\perp} = B_\rho e^{i\theta} = -\Delta z B_0\left(\frac{d\delta(r)}{dr} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{dA_k(r)}{dr}\,\mathrm{Cos}\,k\theta\right)e^{i\theta}.$$

Оценим порядок величины этих компонент в синхроциклотроне. Обычно $A = 10^{-4}$, а $\frac{d\delta}{dr} = \frac{n}{r}$. Легко видеть, что $|b_{\perp}| \gg |b_{||}|$. Действительно,

$$\left|\frac{b_{\perp}}{b_{||}}\right| \approx \frac{n}{r}\cdot\frac{r}{A} = \frac{n}{A} \gg 1,$$

поскольку $n \approx 10^{-2} \div 10^{-3}$.

Таким образом, амплитуда радиальной компоненты поля, обусловленной спадом поля, значительно выше азимутальной компоненты. Как мы увидим ниже, именно радиальная компонента вызывает основную деполяризацию.

Подставив /Ш.10/ в /Ш.9/, получим:

$$s' = ie^{-i\phi(\theta)}\int d\theta' e^{i\phi(\theta')}\Big[\Big(1+\frac{g-2}{2}\gamma\Big)\Big(z_m \operatorname{Cos}\sqrt{n}\,\theta' - \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell \operatorname{Cos}\ell\theta'\Big)\times$$

$$\times\Big(\frac{d\delta}{dr} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{dA_k}{dr}\operatorname{Cos}k\theta'\Big)e^{i\theta'} + i\frac{g}{2}\Big(z_m \operatorname{Cos}\sqrt{n}\,\theta' - \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell \operatorname{Cos}\ell\theta'\Big)\times \qquad /Ш.11/$$

$$\times\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{\infty} k\,A_k(r)\operatorname{Sin}k\theta' e^{i\theta'}\Big].$$

Выразим тригонометрические функции через экспоненциальные:

$$s' = ie^{-i\phi(\theta)}\int_0^{\theta} d\theta'\Big\{\Big[e^{i(\phi+\theta'\pm\sqrt{n}\,\theta')}\frac{1+\frac{g-2}{2}\gamma}{2}\,z_m\frac{d\delta}{dr}\Big] - \quad \text{/первый член/}$$

$$-\sum_{\ell=1}^{\infty}\Big[e^{i(\phi+\theta'\pm\ell\theta')}\frac{\big(1+\frac{g-2}{2}\gamma\big)}{2}\,a_\ell\frac{d\delta}{dr}\Big] + \quad \text{/второй член/} \qquad /Ш.12/$$

$$+\frac{z_m}{4}\sum_{\substack{k=1\\ \epsilon=-1,1}}^{\infty} e^{i(\phi+\theta'+\sqrt{n}\,\theta'+\epsilon k\theta')}\Big[-\frac{g}{2}\frac{\epsilon k A(r)}{r}\Big(1+\frac{g-2}{2}\gamma\Big)\frac{dA}{dr}\Big] + \quad \text{/третий член/}$$

$$+\sum_{\substack{k=1\\ \epsilon=-1,1}}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{a_\ell}{4}\cdot e^{i(\phi+\theta'\pm\ell\theta'\pm\epsilon k\theta')}\Big[\Big(1+\frac{g-2}{2}\gamma\Big)\frac{dA_k}{dr}+\frac{g}{2}\frac{\epsilon k A_k}{r}\Big]\Big\}. \quad \text{/четвертый член/}$$

Схема решения этого уравнения станет ясной, если рассмотреть в общем виде интеграл

$$\int_0^{\theta} e^{if(\theta')}A(\theta')d\theta'. \qquad /Ш.13/$$

Предположим, что функция $A(\theta)$ –медленно меняющаяся, то есть, что $\frac{dA}{d\theta} \ll A$, тогда как $f(\theta)$ – быстро растущая функция, то есть, $\frac{df}{d\theta} \gg 1$. В этом случае интеграл можно хорошо оценить:

$$\int_0^{\theta} e^{if(\theta')}A(\theta')d\theta' = \frac{A(\theta')e^{if(\theta')}}{if'(\theta')}\Big|_0^{\theta} - \int_0^{\theta}\frac{dA(\theta')}{d\theta'}\frac{e^{if(\theta')}}{if'(\theta')}d\theta'. \qquad /Ш.14/$$

Интегрируем по частям второй интеграл:

$$-\int_0^{\theta}\frac{dA}{d\theta'}\frac{e^{if(\theta')}}{if'(\theta')}d\theta' = \frac{dA(\theta')}{d\theta'}\frac{e^{if(\theta')}}{[f'(\theta')]^2}\Big|_0^{\theta} - \int_0^{\theta}\frac{d^2A}{df\,d\theta'}\frac{e^{if(\theta')}}{f'(\theta')}d\theta'. \qquad /Ш.15/$$

Видно, что если

$$\frac{dA}{d\theta}\cdot\frac{1}{f'(\theta)} \ll A, \qquad /Ш.16/$$

то интеграл /Ш.13/ достаточно хорошо оценивается первым членом /Ш.14/. Оценим первый член в /Ш.12/ для случая протонов

$$|s'_1| = z_m\Big|\int_0^{\theta} d\theta'\frac{(1+1{,}8\gamma)}{2}e^{i(\phi+\theta'\pm\sqrt{n}\,\theta')}\frac{d\delta}{dr}\Big| = \qquad /Ш.17/$$

$$= \frac{z_m}{2}\Big|\frac{(1+1{,}8\gamma_2)\big(\frac{d\delta}{dr}\big)_2 e^{i(\phi+\theta\pm\sqrt{n_2}\,\theta)}}{-(1+1{,}8\gamma_2)+1\pm\sqrt{n_2}} - \frac{2{,}8\big(\frac{d\delta}{dr}\big)_1}{-1{,}8\pm\sqrt{n_1}}\Big|.$$

Если знаменатель не обращается в нуль, то, используя данные[12] для синхроциклотрона ЛЯП, получим:

$$\frac{d\delta}{dr} = -\frac{1}{B_0}\frac{\partial B}{\partial r} = \frac{n}{r},\ n_1 = 0{,}003 \text{ при } r = 10 \text{ см, и } \Big(\frac{d\delta}{dr}\Big)_1 = 3.10^{-4}\ 1/\text{см},$$

$$n_2 = 0{,}2 \text{ при } r = 280 \text{ см, и } \Big(\frac{d\delta}{dr}\Big)_2 = 6{,}9.10^{-4}\ 1/\text{см},$$

и при $\gamma_2 = 1{,}72$ /энергия 680 Мэв/ и $z_m = 2$ см

$$|s'_1| \lesssim 2.10^{-3}.$$

Поскольку $\sqrt{n_2} = 0{,}45$, то знаменатель в выражении /Ш.17/ в нуль нигде не обращается. Отметим, что этот член определяется амплитудой свободных вертикальных колебаний частиц.

Произведем теперь оценку второго члена интеграла /Ш.12/. Некоторые слагаемые этого члена могут привести к резонансам, условием появления которых является:

$$-(1+1{,}8\gamma)+1\pm\ell = 0. \qquad /Ш.18/$$

Резонансы возникают при следующих энергиях:

$$\gamma^{/1/}_{\text{рез.}} = 1{,}11,\quad \ell_{\text{рез.}} = 2,\quad r_{\text{рез.}} = 95 \text{ см},\quad n_{\text{рез.}} = 0{,}016, \qquad /Ш.19/$$

$$\gamma^{/2/}_{\text{рез.}} = 1{,}67,\quad \ell_{\text{рез.}} = 3,\quad r_{\text{рез.}} = 260 \text{ см},\quad n_{\text{рез.}} = 0{,}042.$$

При оценке интеграла в области резонанса воспользуемся методом перевала; получаем:

$$|s'| = \Big|\frac{1+1{,}8\gamma_{\text{рез.}}}{2}a_\ell\frac{d\delta}{dr}\int e^{-i\frac{1{,}8}{2}\frac{d\gamma}{d\theta}\theta^2}d\theta\Big| = \qquad /Ш.20/$$

$$= \tfrac{1}{2}(1+1{,}8\gamma_{\text{рез.}})\,a_\ell\frac{d\delta}{dr}\sqrt{\frac{2\pi}{1{,}8\frac{d\gamma}{d\theta}}} = \tfrac{1}{2}(1+1{,}8\gamma_{\text{рез.}})\frac{n}{r}a_\ell\cdot 2\pi\sqrt{\frac{N}{(\gamma_{max}-1)1{,}8}}$$

Приближенно $\frac{d\gamma}{d\theta} = \frac{\gamma_{max}-1}{2\pi N}$, где $N_{\text{рез.}}$– полное число оборотов, совершаемых частицами при ускорении. Радиус, в области которого происходит резонанс, определяется

$$r = \frac{E v}{e B_0} = \frac{m\sqrt{\gamma^2 - 1}}{e B_0} . \qquad /Ш.21/$$

Величину

$$\Gamma \equiv 2\pi \sqrt{\frac{N}{1{,}8\,(\gamma_{max} - 1)}} . \qquad /Ш.22/$$

назовем "шириной" резонанса.

При $\gamma_{max} - 1 = 0{,}72$, $N = \frac{680.10^6}{2.7.10^3} \approx 5.10^5$, $\Gamma = 1{,}2.10^3$ рад. Найдем теперь условия, налагаемые на a_ℓ, при которых деполяризация остается еще малой величиной.

Случай $\ell = 2$

$$|s'| = (1/2)\,\frac{0{,}016}{95}\,(1 + 1{,}8 . 1{,}11) . a_2 . 1{,}7 . 10 = 0{,}43 . a_2 . \qquad /Ш.23/$$

Здесь использовано точное значение $\Gamma_{рез.} = 1{,}7.10^3$, вычисленное с учетом фазы ускоряющего напряжения /см. 1У. 7/.

Если поставить условие $|s'| < 1$, обеспечивающее сохранение поляризации, то необходимо, чтобы

$$a_2 < 2{,}3 \text{ см} \qquad /Ш.24/$$

Если воспользоваться не очень точными значениями [10] a_2, измеренными при $r = 75$ см / $a_2 = 0{,}1$ см/ и $r = 172$ см / $a_2 \approx 1$ см/ и принять $a_2 = 1$ см при $r = 95$ см, то $|s'| = 0{,}43$, и деполяризация $D = 9{,}2\%$.

Случай $\ell = 3$

Имеем $|s'| \approx 0{,}4\, a_3$, то есть, $a_3 < 2{,}5$ см. /Ш.25/

Значение a_3 на радиусе 260 см равно ~ 0,1 см, так что $|s'| = 0{,}04$, и деполяризация пренебрежимо мала.

Окончательные заключения о влиянии этих резонансов на деполяризацию протонов можно будет сделать только после проведения более точных и полных измерений. Отметим здесь, что интенсивность этих резонансов не зависит от амплитуды свободных вертикальных колебаний частиц.

Рассмотрим теперь третий член интеграла /Ш.12/. Условие появления резонансов:

$$- 1{,}8\,\gamma \pm \sqrt{n} \pm k = 0 . \qquad /Ш.26/$$

Резонансы возникают при следующих энергиях:

$$\begin{array}{llll} \gamma^{/1/}_{рез.} = 1{,}06, & k = 2, & n = 0{,}01, & r = 68 \text{ см}, \\ \gamma^{/2/}_{рез.} = 1{,}19, & k = 2 & n = 0{,}02, & r = 127 \text{ см}, \\ \gamma^{/3/}_{рез.} = 1{,}55, & k = 3 & n = 0{,}04, & r = 233 \text{ см}. \end{array} \qquad /Ш.27/$$

Если предположить, что $\frac{dA}{dr} \lesssim \frac{A}{h}$, где h –апертура магнита, а ширину резонансов принять равной $\Gamma = 1{,}2.10^3$, то при

$$\begin{array}{lll} A_2 = 5.10^{-4} & / r = 68 \text{ см}/ & \frac{dA_2}{dr} = 0{,}8.10^{-5}, \\ A_2 = 10^{-3} & / r = 127 \text{ см}/ & \frac{dA_2}{dr} = 1{,}7.10^{-5}, \\ A_3 = 10^{-3} & / r = 233 \text{ см}/ & \frac{dA_3}{dr} = 1{,}7.10^{-5}, \end{array}$$

$$|s'|_1 = \frac{2}{4}\,\frac{A}{n}(1 + 1{,}8\gamma_{рез.})\,\Gamma = \frac{2}{4} . \frac{5.10^{-4}}{60} . 2{,}8.2.1{,}2.10^3 = 5.10^{-2},$$
$$|s'|_2 = 6.10^{-2}$$
$$|s'|_3 = 8.10^{-2}, \qquad /Ш.28/$$

Суммарная деполяризация $D = \frac{/0{,}19/^2}{2} = 2\%$. Для пучка частиц, имеющих разные амплитуды свободных колебаний необходимо полученную деполяризацию усреднить по всем возможным амплитудам этих колебаний.

Учтем, наконец, резонансы в четвертом члене интеграла /Ш.12/. Имеем

$$- 1{,}8\gamma \pm \ell \pm k = 0 . \qquad /Ш.29/$$

Возникнут следующие резонансы:

$$\begin{array}{lll} \ell = 1 , \; k = 1, & \gamma = 1{,}11, & r = 95 \text{см}. \\ \ell = 2 , \; k = 1, & \gamma = 1{,}67, & r = 260 \text{см}. \\ \ell = 1 , \; k = 2, & & \end{array} \qquad /Ш.30/$$

Из [12] известно, что первая гармоника азимутальной неоднородности магнитного поля синхроциклотрона ЛЯП равна:

$$A_1(r) \lesssim 5.10^{-4},$$

а a_1 / $r = 95$ см/ $\lesssim$ 2 см, a_1 / $r = 260$ см/ $\lesssim$ 1,5 см,

и a_2 / $r = 260$ см/ $\approx$ 0,8 см

В этом случае четвертый член в квадратных скобках /Ш.12/ дает

$$|s'|_{11} = 2{,}2.10^{-2};$$
$$|s'|_{21} = 1.10^{-2}; \qquad /Ш.31/$$
$$|s'|_{12} = 1.10^{-2};$$
$$|s'| = 4{,}2 . 10^{-2}.$$

Деполяризация в четвертых членах от амплитуды свободных вертикальных колебаний не зависит.

Итак, мы можем сделать вывод из приведенных рассмотрений, что суммарная деполяризация, получаемая от вторых, третьих и четвертых членов /Ш.12/, равна D = 10%, что соответствует $|s'| \approx 0{,}46$. При этом основной вклад в деполяризацию дает вторая гармоника радиального поля – вследствие искривления медианной поверхности $(|s'| = 0{,}43)$. Если принять меры к исправлению такого искривления всего в два раза, то деполяризацию снизится до 2%.

До сих пор не учитывались радиальные и радиально-фазовые колебания. Рассмотрим теперь нелинейный член в разложении радиального поля b_ρ :

$$b_\rho = \left(\frac{\partial B_z}{\partial r}\right) z + \left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2}\right) \cdot \rho z ,$$

$$\frac{\partial^2 b_z}{\partial r^2} = - B_0 \left(\frac{d^2\delta}{dr^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2 A_k}{dr^2} \operatorname{Cos} k\theta \right). \qquad /Ш.32/$$

Ввиду того, что частота радиальных колебаний близка к 1, условием появления резонанса будет

$$-(1 + 1{,}8\gamma) + 1 \pm 1 \pm \ell = 0 . \qquad /Ш.33/$$

Резонанс возникает при $\ell = 1$, $\gamma_{рез.} = 1{,}11$; $r_{рез.} = 95$ см; $n = 0{,}016$, то есть, на первой гармонике искривления медианной поверхности. Имеем $\frac{d^2\delta}{dr^2}$ /12/ $= \frac{1}{r}\frac{dn}{dr} - \frac{n}{r^2}$; $\frac{d^2\delta}{dr^2} = 0{,}5.10^{-5}$. Амплитуда первой гармоники при r = 95 см равна 2 см.

Тогда получим:

$$|s'| = (1 + 1{,}8\gamma) \cdot ½ \cdot ½ \cdot \frac{d^2\delta}{dr^2} \cdot \rho_m \cdot a_1 \cdot \Gamma \qquad /Ш.34/$$

и при ρ_m = 5 см $|s'| = 0{,}07$, а D = 0,4%.

4. Влияние на деполяризацию фазовых колебаний

При фазовых колебаниях энергия частицы γ, циклотронная частота ω_c и радиус орбиты r осциллируют около средних значений, которые монотонно растут в процессе ускорения. Поэтому можно записать

$$\gamma = \gamma_0(\theta) + \Delta\gamma \operatorname{Cos}(\Omega\theta + \alpha) , \qquad /1У.1/$$

где Ω – частота фазовых колебаний, $\gamma_0(\theta)$ – монотонно растущая функция. Условие появления резонанса, аналогичное /Ш.18/, запишется в виде равенства нулю первой производной по θ показателя экспоненты:

$$f'(\theta) = 1{,}8\,[\gamma_0(\theta) + \Delta\gamma \operatorname{Cos}(\Omega\theta + \alpha)] \pm \ell = 0 . \qquad /1У.2/$$

За начало отсчета углов примем то значение угла θ, при котором имел бы место резонанс в отсутствие фазовых колебаний. Тогда /1У.2/ примет вид:

$$f'(\theta) = 1{,}8\,\left[\frac{d\gamma_0}{d\theta} \cdot \theta + \Delta\gamma \operatorname{Cos}(\Omega\theta + \beta)\right] = 0 . \qquad /1У.3/$$

Вторая производная показателя экспоненты, которая определяет ширину резонанса, равна

$$f''(\theta) = 1{,}8\,\left[\frac{d\gamma_0}{d\theta} - \Delta\gamma \cdot \Omega \operatorname{Cos}(\Omega\theta + \beta)\right] . \qquad /1У.4/$$

Появившийся добавочный член изменяет ширину резонанса, найденную ранее. Вторая производная $f''(\theta)$ может обращаться в нуль, и для оценки резонансного интеграла нужно учесть третью производную:

$$f'''(\theta) = 1{,}8\,\Delta\gamma\,\Omega^2 \operatorname{Cos}(\Omega\theta + \beta) . \qquad /1У.5/$$

Оценим $\Gamma_{фаз.}$ для синхроциклотрона ЛЯП. Имеем /11/ r = 95 см; γ = 1,11; V_0 = 10 кв; $\operatorname{Cos}\phi_s \approx 0{,}25$; E = 1050 Мэв;

$$\Omega = \sqrt{\frac{2eV_0 \operatorname{Sin}\phi_s}{2\pi E}} \cdot \omega_c = 2{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot \omega_c ; \qquad /1У.6/$$

$$\frac{d\gamma_0}{d\theta} = \frac{2eV_0 \operatorname{Cos}\phi_s}{2\pi \cdot m} = 1{,}3 \cdot 10^{-6} . \qquad /1У.7/$$

Для определения амплитудного значения $\Delta\gamma$ воспользуемся соотношением /11/

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \frac{1}{\omega_c} \Delta\dot\Phi . \qquad /1У.8/$$

При $\operatorname{Cos}\phi_s = 0{,}25$, $\Delta\dot\Phi = \sqrt{2}\,\Omega$ $\Delta\gamma = 3{,}4.10^{-3}$. Условие резонанса /1У.3/ имеет вид:

$$1{,}3 \cdot 10^{-6} \cdot \theta + 3{,}4 \cdot 10^{-3} \operatorname{Cos}(\Omega\theta + \beta) = 0 . \qquad /1.У.9/$$

Вводя обозначение $\theta_1 = \Omega\theta + \beta$, получим трансцендентное уравнение:

$$\operatorname{Cos}\theta_1 = -0{,}174\,(\theta_1 - \beta) , \qquad /1У.10/$$

решения которого дают точки резонанса. Это уравнение в зависимости от величины β может иметь от 3 до 5 решений. Одно из этих решений может обрашать вторую производную $f''(\theta)$ в нуль. Третья производная равна

$$f'''(\theta) = 3 \cdot 10^{-8} \operatorname{Cos}(\Omega\theta + \beta) . \qquad /1У.11/$$

Подынтегральную функцию в области резонанса раскладываем в ряд:

$$e^{-i\chi_0}\left(1 + i\,\frac{\theta^3}{6} \cdot 3 \cdot 10^{-8}\right) . \qquad /1У.12/$$

Ширина резонанса определится из условия

$$0{,}5 . 10^{-8} \cdot \theta^3 = 1 \qquad /1У.13/$$

и равна по порядку величины $\Gamma \sim 10^3$ рад.

Произведенный численный расчет показывает, что если учесть все фазовые резонансы, то ширина резонанса может превышать начальную ширину не более чем в два раза, при некоторых вполне определенных фазах β. В среднем же фазовые колебания не увеличивают ширину резонанса.

5. Деполяризация в ускоряющем электрическом поле

Влияние электрического поля на спин частицы складывается из двух факторов: 1/ магнитного поля, возникающего за счет переменного электрического поля, и 2/ непосредственно электрического.

Рассмотрим первый эффект. Магнитное поле на высоте z от средней плоскости дуанта равно

$$b_e = z\frac{dE}{dt} = -zE_m\omega_e \sin\omega_e t, \qquad /У.1/$$

где E_m – амплитуда ускоряющего поля. Это магнитное поле b_e направлено перпендикулярно скорости. Тогда из /Ш.9/ получаем:

$$s' = ie^{-i\phi(\theta)}\int_0^{\theta} d\theta' [e^{i(\phi(\theta')+\theta')}(1+1{,}8\gamma)z_m E_m(\theta')\frac{\omega_e}{B_0}\sin\theta']. \qquad /У.2/$$

Оценим порядок величины этого магнитного поля:

$$\frac{b_E}{B_0} = \frac{zE\omega_e}{B_0} = \frac{zE\cdot e}{m\gamma} \approx \frac{10^4}{10^9} \approx 10^{-5}. \qquad /У.3/$$

Поскольку ширины возможных резонансов у нас не превышают $\Gamma \sim 10^3$, то $s' \sim 10^{-2}$.

Вычисления можно сделать несколько более строго. Для этого учтем, что величина z складывается из постоянного отклонения плоскости дуантов от средней плоскости и свободных вертикальных колебаний:

$$z = z_0 + z_m \cos\sqrt{n}\,\theta.$$

$E_m(\theta)$ можно разложить на гармоники с коэффициентами, зависящими от радиуса

$$E_m(\theta) = E_m^{(0)}(r) + E_m^{(1)}(r)\sin\theta + \ldots \qquad /У.5/$$

Наиболее существенными гармониками являются нулевая и первая, поскольку ускоряющее поле распределено по полуокружности.

Тогда из /У.2/ получаем:

$$s' = ie^{-i\phi(\theta)}\int_0^{\theta} d\theta' e^{i(\phi(\theta')+\theta')}(1+1{,}8\gamma)(z_0 + z_m\cos\sqrt{n}\,\theta')\times$$
$$\times(E_m^{(0)}(r) + E_m^{(1)}(r)\sin\theta' + \ldots)\frac{e}{m\gamma}\sin\theta'. \qquad /У.6/$$

Рассмотрим член с z_0. Условием появления резонансов является

$$-(1+1{,}8\gamma) + 1 \pm 1 + p = 0, \qquad /У.7/$$
$$p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Возникают два резонанса

$$p = 1 \qquad \gamma = 1{,}11, \qquad /У.8/$$
$$p = 2 \qquad \gamma = 1{,}67.$$

Для расчета примем: $z_0 = 1$ см, $z_m = 2$ см,

$$E_m^{(1)} \approx E_m^{(2)} \approx \frac{2\cdot 10^4}{300} \approx 10^2 \text{ в/см}.$$

В результате получим

$$|s'| \lesssim 10^3. \qquad /У.9/$$

Учет вертикальных колебаний приводит к смещению положения резонансов. Имеем

$$-(1+1{,}8\gamma) + 1 \pm 1 + p \pm \sqrt{n} = 0,$$

откуда

$$p = 1, \quad \begin{cases} \gamma = 1{,}06, \\ \gamma = 1{,}19, \end{cases} \qquad /У.10/$$
$$p = 2, \quad \gamma = 1{,}55.$$

Оценим эффект непосредственно электрического поля.

$$\frac{d\vec{s}'}{dt} = \frac{e}{m}[\vec{k}\times(\vec{E}\times\vec{v})]\cdot(1{,}8 + \frac{1}{\gamma+1}), \qquad /У.11/$$

$$\frac{ds'}{dt} = \frac{e}{m}\frac{dz}{dt}E\cdot(1{,}8 + \frac{1}{\gamma+1}) \qquad /У.12/$$

и

$$s' = ie^{-i\phi(\theta)}\int_0^{\theta}\frac{e}{m}\frac{dz}{d\theta'}E(1{,}8 + \frac{1}{\gamma+1})e^{i\phi(\theta')}d\theta'. \qquad /У.13/$$

Подставляя в /У.13/ выражения для z и E, получим

$$s' = -e^{-i\phi(\theta)}\int_0^{\theta} e^{i\phi(\theta')}\cos\theta' \sin(\sqrt{n}\,\theta')e^{i\theta'}\frac{ez_m\sqrt{n}}{m}[E_m^{(0)} + E_m^{(1)}\sin\theta' + \ldots]\times \qquad /1У.14/$$
$$\times(\frac{1}{\gamma+1} + 1{,}8)d\theta',$$

откуда условие резонанса

$$-1{,}8\gamma \pm 1 \pm \sqrt{n} + p = 0, \qquad /1У.15/$$
$$p = 0, \pm 1, \ldots$$

Резонансы происходят при тех же значениях γ, как и /У.10/.

$$|s'| = \tfrac{1}{4}\,\frac{e}{m}\, z_m \sqrt{n}\, E_m^{(1)} \left(\frac{1}{\gamma + 1} + 1{,}8\right) \cdot \Gamma = 3 \cdot 10^{-5} . \qquad /1У.16/$$

У1. Деполяризация при выходе частиц из ускорителя

Деполяризация возникает в регенераторе и возбудителе а также в неоднородном магнитном поле после выхода частиц из магнитного канала.

Будем предполагать, что при каждом прохождении регенератора и возбудителя величины s' можно складывать без учета угла между двумя последовательными значениями s'. Полную деполяризацию получим путем усреднения ее по различному числу прохождений

$$\bar{D} = \int \frac{D(N)\, f(N)\, dN}{\int f(N)\, dN} , \qquad /У1.1/$$

где $D(N)$ –деполяризация, возникающая при N –кратном прохождении частицей области возмущений, а $f(N)$ – распределение частиц по числу оборотов, совершаемых ими перед попаданием в магнитный канал. Величина $f(N)$ определяется распределением частиц по амплитудам радиальных колебаний. В качестве разумного предположения мы будем считать, что это распределение однородно и простирается от 0 до 5 см.

Известно[13], что прирост амплитуды радиальных колебаний за одно прохождение равен

$$\delta = \xi A_{\nu - 1} , \qquad \xi = 0{,}5 \div 0{,}6 . \qquad /У1.2/$$

Поэтому амплитуда радиальных колебаний после N прохождений равна

$$A_N = A_0 (1 + \xi)^N . \qquad /У1.3/$$

Для того, чтобы попасть в магнитный канал, прирост амплитуды должен составлять 3 ÷ 3,5 см. Следовательно, необходимое число прохождений определится из условия:

$$\xi A_{N-1} = 3{,}5 , \qquad \text{или} \qquad A_0 (1 + \xi)^{N-1} = 7 .$$

Отсюда

$$N = \frac{\lg 7 - \lg A_0}{\lg 1{,}5} + 1 = 5{,}5 - 5{,}7 \lg A_0 . \qquad /У1.5/$$

Поскольку среднее значение $A_{ср} = 2{,}5$ см[13], то $\bar{N} = 3{,}2$.

Подсчитаем деполяризацию при однократном прохождении возмущающих областей:

$$|s'| \le 2 \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} (1 + 1{,}8\gamma) \frac{n z_m}{r} d\theta' \right| = 2(1 + 1{,}8\gamma_m) \frac{n z_m}{r} \Delta\theta . \qquad /У1.6/$$

Амплитуда вертикальных колебаний частиц при прохождении возмущающих участков возрастает примерно в два раза, т.е. $z_m = 4$ см. Для одного прохождения при $r = 300$ см, $\gamma_m = 1{,}72$, $n = 7$, $\Delta\theta = 0{,}1$ получаем:

$$|s'| \le \frac{2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 0{,}1}{300} = 7{,}5 \cdot 10^{-2} . \qquad /У1.7/$$

Если среднее число прохождений равно $\bar{N} = 3{,}2$, то $|s'|_{полн.} = 0{,}24$, а результирующая деполяризация пучка составит

около $D \approx 3\%$.

Рассмотрим теперь деполяризацию в спадающем магнитном поле. Имеем:

$$s' = -i e^{-i\phi(t)} \int_0^t e^{i\phi(t')} \frac{\omega_{\perp}}{B} b_{\perp}(t') dt' , \qquad /У1.9/$$

где $b_{\perp}(t')$ – радиальная составляющая магнитного поля, определяемая как

$$b_{\perp}(t') = z \frac{\partial B_z}{\partial r} e^{i\theta'} , \qquad /У1.10/$$

а

$$\phi = \int_0^t (1 + 1{,}8\gamma_m) \frac{e}{m\gamma_m} B_z(t') dt'$$

$B_z(t)$ определяет меняющуюся во времени частоту поперечной прецессии. Далее получаем:

$$s' = -i e^{-i\phi(t)} (1 + 1{,}8\gamma_m) \frac{e}{m\gamma_m} z \int_0^t e^{i\phi(t') + i\theta'} \frac{\partial B_z}{\partial r} dt' . \qquad /У1.11/$$

Резонанс наступает, когда производная по времени показателя экспоненты обращается в нуль:

$$\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\theta}{dt} = 0$$

или

$$(1 + 1{,}8\gamma_m) \frac{e}{m\gamma_m} B_z + \frac{d\theta}{dt} = 0 . \qquad /У1.12/$$

Вычислим значения $\frac{d\theta}{dt}$ и B_z в районе резонанса вдоль выходящей траектории[12].

Т а б л и ц а 1

$\Delta\theta$	r	$-\frac{d\theta}{dt}\times 10^{-8}$	B_z	$\frac{1+1{,}8\gamma_m}{m\gamma_m} e B_z \times 10^{-8}$	$\Delta t \times 10^{10}$
5°	418 см	0,46 1/сек	2050 э	0,483 1/сек	17 сек
5°	445 см	0,41 1/сек	1650 э	0,375 1/сек	19 сек
5°	479 см	0,38 1/сек	1050 э	0,238 1/сек	21 сек

Найдем вторую производную показателя экспоненты

$$f'' = (1 + 1{,}8\gamma_m)\frac{e}{m\gamma_m}\frac{\partial B_z}{dt} + \frac{d^2\theta}{dt^2}\,. \qquad /\text{У1.13}/$$

$$(1 + 1{,}8\,\gamma_m)\frac{e}{m\,\gamma_m}\cdot\frac{\partial B_z}{\partial t} = \left(\frac{0{,}375-0{,}483}{19\cdot 10^{-10}}\right)\times 10^{8} = -\,5{,}7\cdot 10^{15}\ \text{сек.}^{2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\,\frac{0.41-0{,}46}{19.10^{-10}}\cdot 10^{8} = 2{,}5\cdot 10^{15}\ \text{сек.}^{-2}$$

Таким образом, $f'' = -\,3{,}2\,.\,10^{15}$ Из той же таблицы находим

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{1650-2050}{445-418} = -\,15\ \text{э/см.}$$

Принимая $z = 5$ см, $\gamma_m = 1{,}72$, и вычисляя

$(1 + 1{,}8\,\gamma_m)\frac{e}{m\,\gamma_m} = 2{,}27\,.\,10^{4}$ /э.сек/$^{-1}$, находим

$$|s'| = \frac{e}{m\,\gamma_m}(1 + 1{,}8\,\gamma_m)\,z\,\frac{\partial B_z}{\partial r}\sqrt{\frac{2\pi}{f''}} \approx 0{,}08 \qquad /\text{У1.14}/$$

Таким образом, деполяризация при выводе частиц из ускорителя не превышает 3%.

В ы в о д ы

Сопоставим теперь различные эффекты деполяризации протонов при ускорении на синхроциклотроне ЛЯП.

1. Самый сильный резонанс в синхроциклотроне обусловлен радиальной компонентой магнитного поля. Амплитуда этого резонанса определяется второй гармоникой колебаний медианной поверхности по азимуту. Для сохранения поляризации протонов необходимо, чтобы амплитуда этой гармоники на радиусе $r = 95$ см не превышала 1 см. В этом случае деполяризация протонов будет составлять 10%.

2. Резонансы, обусловленные продольной /азимутальной/ составляющей магнитного поля, невелики, и в сумме приводят к деполяризации значительно меньшей 1%.

3. Задержка частиц на некоторых радиусах в процессе ускорения вследствие фазовых колебаний не приводит к новым резонансам и не усиливает существенным образом значения ширин имеющихся резонансов.

4. Деполяризация протонов в высокочастотном электрическом поле ничтожно мала.

5. Деполяризация протонов в системе вывода частиц из ускорителя не превышает 3%.

П р и м е ч а н и е: Поскольку используемые нами значения второй и третьей гармоник магнитного поля синхроциклотрона, определяющих основную деполяризацию протонов при ускорении, измерены недостаточно точно и не на требуемых радиусах траекторий частиц, то, естественно, что для нахождения действительной деполяризации протонов в синхроциклотроне, необходимо будет произвести измерения топографии магнитной поверхности ускорителя с точностью ± 1 мм. Однако, если допустить, что основные гармоники магнитного поля синхроциклотрона найдены с ошибкой в 100%, то деполяризация протонов не будет превышать 40%. Таким образом, в настоящем виде магнитного поля синхроциклотрона поляризация пучка протонов составит не менее 60%.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Деполяризация дейтронов при ускорении на синхроциклотроне ЛЯП

Воспользуемся для расчетов тем же уравнением движения /1.11/. Для дейтронов $g_d = 1{,}72$.

Из /Ш.12/ находим, что единственный резонанс дает первый член

$$-\frac{g-2}{2}\gamma \pm \sqrt{n} = 0 \qquad /\text{A.1}/$$

или

$$0{,}14\gamma \pm \sqrt{n} = 0\,. \qquad /\text{A.2}/$$

Резонанс этот вызван поперечной /радиальной/ составляющей магнитного поля и свободными вертикальными колебаниями и не связан с какими-либо несовершенствами магнитного поля ускорителя. Используя известную зависимость n от радиуса, находим положение резонанса:

$$\gamma_{\text{рез.}} = 1{,}07, \qquad r = 145\ \text{см}, \qquad n = 0{,}023\,. \qquad /\text{A.3}/$$

Для вычисления ширины резонанса Γ найдем вторую производную показателя

$$f'' = 0{,}14\frac{d\gamma}{d\theta} - \frac{d}{d\theta}(\sqrt{n}) = \left(0{,}14 - \frac{d(\sqrt{n})}{d\gamma}\right)\frac{d\gamma}{d\theta}\,. \qquad /\text{A.4}/$$

Расчет показывает, что на этом радиусе

$$\frac{d(\sqrt{n})}{d\gamma} = 0{,}4\,, \qquad /\text{A.5}/$$

$$f'' = 0{,}26\ \frac{dy}{d\theta} \quad . \qquad /A.5/$$

Из /1У.8/ следует, что для дейтронов

$$\frac{dy}{d\theta} = 0{,}65 \cdot 10^{-6} \ ,$$

а

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2\pi}{f''}} = \sqrt{\frac{2\pi}{0{,}26 \cdot 0{,}65 \cdot 10^{-6}}} = 6.10^{3} \qquad /A.6/$$

Тогда окончательно получаем для $z_m = 2$ см:

$$|s'| = \tfrac{1}{2}(1 - 0{,}14\,\gamma_{\text{рез.}}) \cdot \frac{z_m \cdot n}{2r}\ \Gamma = \frac{0{,}85}{2} \cdot \frac{2.0{,}023}{145} \cdot 6.10^{3} = 0{,}8 \ . \qquad /A.7/$$

Таким образом при ускорении дейтронов может возникнуть деполяризация порядка 30%. Чтобы уменьшить ее, необходимо амплитуду свободных вертикальных колебаний снизить до 0,5 ÷ 1 см.

В заключение авторы выражают благодарность т.т. В.И. Данилову, В.П. Дмитриевскому, В.В. Кольге, А.А. Кропину за полезные обсуждения.

Литература

1. Г.М. Будянский, Ю.А. Завенягин, Н.Д. Федоров, В.А. Храбров. О возможности ускорения поляризованных протонов в циклотроне. Атомная энергия, 6/3/, 306, 1959 г.
2. Ch.Schlier, Remarks on depolarization effects in a source of polarized protons. CERN – 58 – 3.
3. M.Froissart et R.Stora, Depolarization D'un Faiseau de Protons Polarises Dans un Synchrotron. Nucl. Instr. and Meth. 7 (1960) 297.
4. F.Lobkowicz and E.H.Thorndike, Resonant Depolarization of a Beam of Polarized Protons During Acceleration in a Synchrocyclotron, Rev. Sci. Instr. 33 (4) 454, 1962.
5. E.D.Courant, Accelaration of Polarized Protons to Relativistic Energies, Brookhaven National Laboratory, BNL – EDC – 45, 1962.
6. D.Cohen. Feasibility of Accelerating Polarized Protons with the Argonne ZGS, Rev. Sci. Instr. 33, (2), 161 (1962).
7. Я. Френкель. Электродинамика вращающегося электрона. Zeit fur Physic 37, 243 (1926).
8. V.Bargmann, L.Michel and V.L.Telegdi, Polarization of Particles Moving in a Homogeneous Electromagnetic Field. Phys. Rev. Lett. 2, 435 (1959).

9. D.M.Fradkin and R.H.Good, Electron Polarization Operators. Rev. Mod. Phys. 33 (2) 343 (1961).

10. В.И. Данилов, В.П. Дмитриевский, Б.И. Замолодчиков, В.С. Катышев, А.А.Кропин, А.В. Честной. Исправление медианной поверхности магнитного поля шестиметрового синхроциклотрона. ПТЭ, 3, 17, 1956 г.

11. В.И. Котов, А.Б. Кузнецов, Н.Б. Рубин. Физические основы современных резонансных ускорителей. УФН, 64, /2/, 197, 1958.

12. В.С. Катышев, А.А. Кропин, В.Б. Мухина, Т.Н. Томилина, А.В. Честной. Исправление радиального спада и азимутальной неоднородности магнитного поля шестиметрового синхроциклотрона. Препринт ОИЯИ, Р-601, 1960.

13. В.П. Дмитриевский, В.И. Данилов, Ю.Н. Денисов, Н.Л. Заплатин, В.С. Катышев, А.А. Кропин, А.В. Честной. Вывод пучка протонов из шестиметрового синхроциклотрона посредством возбуждения радиальных колебаний. ПТЭ, 1, 11, 1957 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 октября 1963 г.