

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

В.И. Данилов, И.Б. Енчевич, Д.Л. Новиков, Э.А. Полферов, А.Н. Сафонов, Б.В. Феоктистов

P - 1448

11. 12.63

РАСЧЕТ НАЧАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВЫХ ФАЗОВЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИНХРОЦИКЛОТРОНЕ

Шенед. Кондо. по ускарителя. Фубна. 1963. Баруди... И., Ато шизделя, 1964. с 595-599.

В.И. Данилов, И.Б. Енчевич, Д.Л. Новиков, Э.А. Полферов, А.Н. Сафонов, Б.В. Феохтистов

P - 1448

РАСЧЕТ НАЧАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВЫХ ФАЗОВЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИНХРОЦИКЛОТРОНЕ

Дубна 1963

21642 y

Введение

Рассмотрение фазового движения и процесса захвата частиц в ускорение в синхро-/1,2/ основано на анализе фазового уравнения. Однако фазовое уравнение, достаточно точно описывающее процесс ускорение в снихротроне, при анализе процесса захвата и исследования начальной стадии ускорения в синхроциклотроне можно применять лишь в достаточно грубом приближении. Существенное отличие начального процесса ускорения в синхроциклотроне от тех идеализированных предположений, которые делались при выводе и решении фазового уравнения, позволяет сделать вывод, что подобное рассмотрение процесса захвата в синхроциклотронный режим дает только качественно-правильную картину. В частности при выводе фазового уравнения, а затем при его решении были сделаны следующие допущения: считалось справедливым приближение первого порядка и принимались постоянными коэффициенты этого уравнения в центральной области ускорителя. Особенно подчеркнем, что на начальной стадии ускорения орбиты ионов значительное время находятся в области высокочастотного электрического поля, поэтому максимально-возможный набор энергии за оборот является функцией радиуса. Так, например, для щестиметрового синхроциклотрона ОИЯИ максимально-возможный набор энергии постепенно возрастает и становится близким к щелевому только на радиусах 60-80 см. Экспериментальное изучение оптимальных условий захвата также указывает на приближенность результатов, вытекающих из решения фазового уравнения, проведенного в работе /1/.

Исследовать задачу о фазовом движении в центральной области синхроциклотрона и об эффективности захвата можно совершенно другим методом, непосредственно решая уравнение движения заряженных частиц в электромагнитном поле ускорителя на быстродействующей электронно-счетной машине.

1. Уравнения движения

Уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле в практической системе единиц имеет вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e(\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}]), \qquad (1)$$

где \vec{p} , \vec{v} , е - соответственно импульс, скорость и заряд частицы, \vec{E} - напряженность электрического поля, \vec{B} - индукция магнитного поля.

При проведении численных расчетов удобно пользоваться уравнением движения, записанным в цилиндрической системе координат в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений с выделенными старшими производными 14. Для определения области устойчивости и эффективности захвата ограничимся рассмотрением движения заряженных частиц в плоскости z = 0. Учитывая, что магнитное поле является аксиально- томметричным, имеем

 $B_r = B_A = 0.$ Тогда векторный потенциал поля A_=0, а уравнение движения (1) принимает вид

$$\ddot{r} = A_{0}(1-\beta^{2})^{4} [A_{1}(1-r^{2}) - A_{0}\dot{r}a] + \frac{a^{2}}{r}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{r} [A_{0}(1-\beta^{2})^{4} [A_{0}(1-a^{2}) - A_{1}\dot{r}a] - \frac{2a\dot{r}}{r}].$$
(2)

Здесь точками обозначено дифференцирование по с t. $A_{o} = \frac{e}{mc^{2}}$, m_{o}^{-} масса покоя протона, $\beta = v/c$ – его относительная скорость, $a = t\dot{\theta}$, $A_{r} = E_{r} + a B_{s} \cdot Z_{o}$, $A_{\theta} = E_{\theta} - tB_{s} \cdot Z_{o}$, Z - импеданс свободного пространства.

а) Аналитическое описание электрического и магнитного полей в центральной области ускорителя

Точное представление зависимости высокочастотного электрического поля от координат для существующей геометрии ускоряющего промежутка (с учетом плазменного столба ионного источника) представляет значительные трудности. Однако исследование распределения электрического поля в центральной области синхроциклотрона указало на возможность апроксимации его в средней плоскости следующими выражениями

$$E_{x} = 0, \quad E_{y} = E_{0} \frac{1}{1 + \pi^{2} y^{2}} , \quad (3)$$

где $E_o = \frac{V_o}{D}$, V_o - амплитуда ускоряющего напряжения, D - апертура дуанта (ось у в этом выражении перпендикулярна ускоряющему промежутку дуанта). Тогда относительный набор энергии, рассчитанный на основании (3) в предположении, что орбита имеет форму окружности, можно представить следующим образом:

$$\frac{e V_{max}}{e V_0} = \sqrt{\frac{\ell^2}{r^2} + 1} - \frac{\ell}{r}$$
(4)

($\ell = \frac{L}{r}$, е V — максимально-возможный на данном радиусе набор энергии за полуоборот). На рис. 1 показан относительный набор энергии для различных D в функции г, определенный с одной стороны аналитически из уравнения (4) и с другой - по картине потенциального поля, сиятой моделированием ускоряющего промежутка шестиметрового синхроциклотрона ОИЯИ в электролитической вание. Сравнение кривых набора энергии (рис. 1) говорит о возможности аналитического описания электрического поля в средней плоскости ускорителя.

Так как в синхроциклотроне частота ускоряющего напряжения в процессе ускорения уменьшается, то зависимость электрического поля в плоскости 2 = 0 от пространственных координат и времени может быть записана в форме

$$E_{p} = E_{o} \cos \int_{0}^{1} \omega_{\Gamma} dt \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{D^{2}} y^{2}}, \qquad (5)$$

где ω - круговая частота генератора, t - время.

Изменение частоты генератора в течение цикла ускорения определяется конструкцией вариатора и резонансными свойствами передающей линии. На рис. 2 приведена одна на рабочих характеристик ω (t) для синхроциклотрона ОИЯИ.

Для нахождения диапазона частот, в интервале которого происходит захват частиц, в зависимости от производной в начале ускорения () нач. был выбран линейный закон изменения частоты ускоряющего напряжения

$$\omega = \omega - \frac{d\omega}{dt} t, \qquad (6)$$

где ω_{H} - круговая частота генератора в момент времени t=0.

Обозначим начальное отличие частоты электрического поля от частоты обращения иона в центре ускорнтеля как 🇳 , тогда

$$\pm \dot{\phi}_{H} = \omega_{H} - \omega_{0} , \qquad (7)$$

где ω_в - круговая частота обращения кона в центре ускорителя. Из уравнений (8) и (7) для ω получим

$$\omega = \omega_0 + \frac{\phi}{H} - \frac{d\omega}{dt} t$$
 (8)

или после преобразований с точностью до членов второго порядка

 $\Delta = \frac{\dot{\phi}_{B}}{\omega_{0}} (\dot{\phi}_{H} = \Delta f = \Delta \cdot \omega_{0})$ $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\omega^{2}} \cdot \frac{d\omega}{dt}$

$$1\pm\frac{\dot{\phi}_{\rm H}}{dt}\left(1-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{d\omega}{dt}\omega_0^{-t}\right).$$
(9)

--- (11.)

Подставляя уравнение (9) в (5) и интегрируя, получим для составляющей электрического поля Е следующее выражение

ω = ω (

$$E_{y} = \frac{E_{0}\ell^{2}}{\ell^{2} + v^{2}} \cos((1 \pm \Delta))(1 - y\omega_{0}t)\omega_{0}t), \qquad (10)$$

где

Обычно магнитное поле в центральной области синхроциклотрона до радиуса г, характеризуется квадратичным законом, на радиусах же больших г оно спадает линейно. т.е.

$$B_{g} = B_{o}\left(1 - \frac{h}{2}r^{2}\right) \quad r \leq r_{g}$$
(12)
$$B_{g} = a + br \quad r \geq r_{g} ,$$
(13)

(13)

(14)

гдећ, а, b, r - постоянные.

Для магнитного поля синхроциклотрона ОИЯИ эти постоянные равны

$$h_{i} = 4.008 \cdot 10^{-1} \text{ m}^{-2}$$

 $a_{i} = 1.63485 \text{ m}$
 $b_{i} = -4.85 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}$

б) Начальные условия

Для решения уравнений (2) необходимо задать начальные условия, т.е. координаты и компоненты скорости нона при $t \simeq 0$.

Так как уравления (2) при г = 0 имеют особенность, то можно считать, что в начальный момент времени нон находится на достаточно близком расстоянии от центра, например, на г _{нач.} =1 см. Заметим, что, во-первых, это соответствует реальным условиям, поскольку дуга иохного источника имеет поперечные размеры (диаметр дуги порядка 2 см) и, во-вторых, что при выборе г нач. =0,1 см решение уравнений (2) не имеет заметных отличий при прочих равных условиях.

За начальную фазу нона можно принять $\phi = 0$, так как через 1 – 2 оборота после захвата все коны пересекают ось х в момент максимума напряжения на дуанте.

Для определения радиальной составляющей скорости нона воспользуемся уравне-KRGM

$$\frac{dr}{dt} = \frac{ceV_{max}}{\pi e B_{r} t (1-\pi)}$$

Подставляя в него известные значения еV , В и п при г = 1 см, получим (dr.) нач. = 2,93756 ·10⁶ см/сек.

Начальная фазовая скорость нонов равна круговой частоте обращения нонов в данном магиитном поле на орбите радяуса $r = 1 \text{ см.} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{Hat} = \omega_0 = 1,60363 \cdot 10^8$ рад/сек Так как в уравнениях (2) независимой переменной является ст , то компоненты начальной скорости нона следует записать в виде производных по ст. Тогда

+ _____-0,97086.10⁻⁴ θ ______5,34911.10⁻³ рад.см⁻¹

Радиально-фазовые траектории Акализ уравнений движения в цеитральной области синхроциклотрона

Решением уравнений (2) являются траектории радиально-фазовых колебаний ионов в плоскости 2=0. Для получения совокупности данных, характеризующих движение нонов, на печатающее устройство электронной счетной машины в зависимости от текущей координаты ω_{0} t выводились следующие параметры: r , θ , r , θ , E , $\Delta\phi$. Набор этих данных полностью описывает координаты, скорость и энергию ионов в любой момент времени. На рис. З приведены характерные траектории радиальных и фазовых колебаний для одной из заданных программ кеменения частоты ускоряющего напряжения. Из рис. 3 видно, что фаза иона а смещается непрерывно в отрицательном направлении в среднем с нарастающей скоростью или, если воспользоваться нзвестной аналогией с маятником, фаза иона совершает вращательное движение. Ион а выбывает из области устойчивости и собствённо из процесса ускорения, совершая колебания относительно орбиты постоянного радиуса. При смещении по фазе в положительном направлении ион б быстро попадет в область тормозящего электрического поля, вследствие чего он теряет энергию и возвращается к центру. Радиально-фазовые траектории для ионов а и б могут таким образом определять две точки на границе области устойчивости при условии, что траектории других ионов в интервале начальных фазовых скоростей между (ϕ) нач. $H(\phi_{\chi})$ нач. захватываются в процесс устойчивого ускорения (нон в).

Задавая параметры ускорителя 🖌 , л , В , D и 💩 и варьируя сдвиг частоты обращения нонов относительно частоты генератора, можно для любого конкретного случая получить границы области захвата в устойчивое движение. Для удобства расчета эти области наносились на плоскость с координатными осями Δf и у (см. уравнение (11)). На рис. 4 представлены области начальных условий, при которых происходит захват нонов для фиксированных значений V и п для трех различных параметров D , характеризующих распределение электрического поля по радиусу. Зависимость магнитного поля В, от радкуса г соответствует реальному распределению магнитного поля в шестиметровом синхроциклотроне ОИЯИ (В,) напряжение на дуанте выбрано равным 12 кв. Все три области (рис. 4) имеют примерно один и тот же характер и смещены друг относительно друга по оси Δf. Из приведенных графиков видно, что при уменьшении апертуры дуанта область захвата смещается в сторону отрицательных значений Δf . Последнее связано с увеличением иабора энергии за оберот (см. уравнение (4)) на первой стадии ускорення. Если считать, что ордината области устойчивости по оси Δf при постоянном у пропорциональна числу ионов, захваченных в процесс ускорения, то можно построить график эффективности захвата ^X) в зависимости от апертуры дуанта для заданных значений еV₀, *п* и у (рис. 5). Видно, что с увеличением апертуры дуанта *D* эффективность захвата возрастает незначительно (на 10-12%). Этот результат для целей увеличения интенсивности ускоренных частиц не представляет особого интереса, так как увеличение апертуры дуаита влечет за собой соответствующее увеличение зазора электромагнита.

Для практики полезно рассмотреть как изменяются области захвата при более быстром спаде магнитного поля с радиусом. В частности, такое поле может быть использовано с целью улучшения вертикальной фокусировки пучка в центральной области ускорителя. Увеличение спада магнитного поля (рис. 6) приводит и возрастанию интервала частот, определяющих захват ионов, в $\sqrt{k_2/k_1}$ раз, а максимальное значение Δf смещается в сторону больших у пропорционально отношению k_2/k_1 . Здесь $k = 1 + \frac{n}{\beta^2}$ (n – показатель спада магнитного поля). Зависимость эффективности захвата от апертуры дуанта при поле *B* приведена на рис. 7.

Если амплитуду ускоряющего напряжения увеличить вдвое, то, как и следует ожидать, область захвата расширяется по оси у (рис. 8) вдвое. Интервал частот при которых еще происходит захват в ускорение увеличивается для этого случая в полтора раза.

Изменение ширины области захвата по оси у вызвано изменением масштаба $\cos \phi$, значение которого равное единице определяет правую точку границы устойчивости (при $\cos \phi > 1$ колебательное движение маятника переходит во вращательное). Для синхроциклотрона значение $\cos \phi$ можно записать в виде:

$$\cos\phi_{\mu} = \frac{\pi E \dot{\omega}}{2} , \qquad (15)$$

 $e V k \omega^{-}$ где индекс s характеризует равновесную частицу.

Перепишем это равенство следующим образом;

$$\cos \phi + \frac{C E_{eY}}{ky_{e}}$$
(16)

Здесь C = const, а у определяется уравиением (11). Выражение (16) определяет смещение правой точки границы области захвата при различных параметрах ускорителя $V_{\phi}K$ и D.

х) Это справедливо при линейном изменении частоты ускоряющего напряжения и постоянной частоте модуляции. В качестве примера приводится таблица 1, в которой даны численные значения $\cos \phi_{x}$, определяющие граничные точки областей захвата по оси y, найденные из решения уравнений (2).

 $Y_{k} = \frac{k v_{0}}{E C} .$

н — н -	,	Та	блица	a 1	1 .	1. 1.		,
Области устойчи- вости		Dh	D ₂ h ₂	D _s h _i	D ₁ h ₂	D ₂ h ₂	D _s h ₂	
Предель- ное значе-	Левая граница	0,03	0,04	0,03	0,05	0,05	0,05	
ние cos ф	Правая граница	0,975	0,99	0,985	n,995	0,92	0,88	

Таким образом, граннчные точки области захвата по оси γ с достаточной точностью определяются величиной созфили параметром, пропорциональным созф. Несколько иначе обстоит дело при рассмотрении границы области устойчивости по оси Δf. Максимальное значение φ в работе^{/1/} определяется выражением

 $\phi_{mox} = \pm \sqrt{\frac{2eV_{o}k\omega^{2}}{\pi E}} \sqrt{\sin \phi} - \phi \cos \phi \qquad (18)$

(17)

Если совместить нижнюю границу области захвата, полученную в работе ^{/1/} с одной из рассматриваемых в данной работе (рис. 9), то можно увидеть, что эти границы практически совпадают. Однако ординаты сопоставляемых областей различаются в 1,5-2 раза. Это различие можно объяснить в первую очередь отсутствием "щелевого" набора энергии за оборот в центре синхроциклотрона, так как при увеличении набора энергии за оборот границы области захвата по осн Δ сужаются и смещаются в сторону отрицательных значений у

На рис. 10 представлены кривые, показывающие зависимость максимально допустимых начальных значений Δf , определяющих захват ионов в процесс ускорения, от у при различных значениях V_{ρ} , D, n.

На рис. 11 показаны зависимости эффективности захвата ϵ от у для условий, соответствующих синхроциклотрону ОИЯИ. Оптимальное значение ϵ при изменении $\gamma(\omega)$ и постоянных значениях V, n, B_0 и F(F – частота модуляция) по теория определяется функцией $L(\cos \phi)/\cos \phi$, где

$$L = G(\cos \phi_{\bullet}) P(\cos \phi_{\bullet})$$

$$G(\cos \phi_{\bullet}) = \sqrt{\sin \phi_{\bullet} - \phi_{\bullet}} \cos \phi_{\bullet}$$

3

σ

р ($\cos\phi_{0}$) – функция, учитывающая долю ионов, возврашающихся в первом фазовом колебании в центр ускорителя. Максимум функции $L(\cos\phi_{0})/\cos\phi_{0}$ (кривая *a*) соответствует $\gamma = 1,2\cdot 10^{-6}$ при "щелевом" наборе энергии и V = 12 кв. Как указывалось в работе $\binom{3}{2}$, значение γ для оптимальной эффективности захвата в синхроциклотроне ОИЯИ оказалось существенно меньшим, чем это следовало из теории (кривая б), Зависимость эффективности захвата ϵ от γ , полученная в настоящих расчетах, хорошо согласуется с экспериментальными результатами (кривая в).

Анализ большого числа расчетных радиально-фазовых траекторий позволяет представить картину формирования пучка протонов на начальной стадии ускорения. До раднуса *г* = 10 см ускоряемые протоны образуют сплошной вращающийся диск, в котором одна часть частиц ускоряется, другая - замедляется, постепенно выбывая из ускорения.

С раднуса r = 12 см от сплошного диска открывается цуг протонов с угловой протяженностью по азимуту в 1,2 π радиан и радиальной ширикой 12 см. До радиуса r = 50 см этот сгусток уплотняется до размеров 0,89 π раднан по азимуту и до 7 см по раднусу. За это время частицы совершают около 12-14 радиально-фазовых колебаний (число радиально-фазовых колебаний обратно пропорционально скорости изменения частоты ускоряющего напряжения ω).

Определенный интерес представляет рассмотрение процесса формирования пучка протонов для существующих параметров шестиметрового синхроциклотрона ОИЯИ на начальной стадии ускорения от r = 2 см до r = 50 см (область $D_{1}h_{1}$, $y = 0.5.10^{-6}$) рис. 12. Ионы при ускорения до радиуса 50 см совершают около 8000 оборотов; при этом происходит 14 радиально-фазовых колебаний. Следует отметить, что на начальной стадии ускорения амплитуды радиально-фазовых колебаний малой величины отсутствуют. Это хорошо видно из приведенных графиков на рис. 12. Зависимость амплитуд радиально-фазовых колебаний (фазы и приращения радиуса) от радиуса показана на рис. 13. При расчете частотной программы синхроциклотрона, обеспечивающей ускорение протонов до конечного радиуса без фазовых потерь, было предположено, что интеграл $J = 6 I \phi d \phi$, являющийся адиабатическим инвариантом при медленных нзменениях параметров системы, также является инвариантом н на начальной стадии ускорения в центре синхроциклотрона.

Анализ радиально-фазовых колебаний показал, что выражение вида $J = \oint I \dot{\phi} d \phi$ является инвариантом и на начальной стадии ускорения. На рис. 14 показаиы зависимости $\dot{\phi} = f(\phi)$ для нескольких радиусов. Из приведенных графиков видно, что отношение площадей областей устойчивости на раднусах r =15 см и r =50 см удовлетворяет расчету, проведенному в работе⁽³⁾. Так, например, из расчета следует, что площадь области устойчивости на r =15 см должна уменьшиться в 1,56 раза. Расчет площадей областей устойчивости для указанных радиусов для нескольких вариантов дает их отношение в интервале 1,55-1,62 раза.

Из траекторий радиально-фазовых колебаний в центральной области синхроциклотрона можно определить экстремальные точки фазовых колебаний ϕ и ϕ . Знание граничных точек фазовых колебаний позволяет найти значение $\cos \phi$ и сравнить его с величиной, определяемой непосредственно через параметры синхроциклотрона из уравнения (15), в котором учитывается зависимость набора энергии за оборот от радиуса.

Результаты сравнения для области h_i D_i , $y = 0.5.10^{-6}$, $V_0 = 12$ кв приведены в таблице у. Усреднение проводилось по трем кривым рис. 12.

r CM	Ni ¢ ₁		¢ 2	ωsφ.	cos φ	Расчетное значение созф	
	i	-0,42	2,84	0,215			
15	2	0,35	2,34	0,195	0,203	0,206	
	3	0,68	2,02	0,205			
	1	-0,2	2,62	0,25		2	
50	2	0,44	2,12	0,257	0,25	0,266	
	3	0,78	1,84	0,245		· · · · ·	

Таблица II

Таким образом, рассмотрение траекторий радиально-фазовых колебаний на начальной стадии ускорения в синхроциклотроне, полученных при решении уравнений (2), дает наглядную картину формирования пучка ускоряемых ионов от центра до радиуса r = 50 см. Получены области захвата в зависимости от различных параметров ускорителя D, V, n, B. Некоторые результаты настоящей работы совпадают с результатами общепринятой теории захвата и фазового движения.

Существуют также и расхождения так, например, в ходе границ областей устойчивости, оптимальном значении ω и др.

10

Оптимальное значение $\dot{\omega}$, найденное для синхроциклотрона ОИЯИ экспериментально, хорошо согласуется с оптимальным значением γ , полученным в настоящей \mathcal{V} работе. Показано также, что интеграл действия является инвариантом и на начальной стадии ускорения в центральной области синхроциклотрона, где $eV_{max} = f(\tau)$.

В заключение авторы считают своим долгом выразить благодарность Б.И.Замолодчикову, С.П. Ломневу за ценные советы и предварительные расчеты на БЭСМ, лаборантам вычислительного центра ОИЯИ Ракитскому А.В., Макаренковой А.Д., Марковой Н.Ф. и Кузнецовой Г.Ф. за помощь в обработке данных, полученных с электронной счетной машины.

Литература

1. D.Bohm and L.L.Foldy. Phys. Rev., 72, 649(1947).

2. М.С. Рабинович. Journ. Phys. USSR. 10, 530 (1946).

З. Б.И. Замолодчиков, Д.Л. Новиков, Э.А.Полферов. Препринт ОИЯИ, Р-720, 1961 г.
4. С.П. Ломнев, Г.А. Тягунов. Ускорители, 1960. Атомиздат.

. 12

Рукопись поступила в издательский отдел 31 октября 1963 г.



функции

3

раэличных

для

энергии

набор

Относительный

Рис.

8

3

6

S

10

ÃÃ Ă



.





<u>16</u> D (cm) . [= 0.3 . 5 = 0.2 6 = 2.0 F = 1.5 F = 1.0 - 8- 0.5 THOFO 4 дуа 2 8 3abi LOE > f(mrry) 0,203 Рис. 0105 0.153 0.051

Рис. 6. Области захвата при $V_0 = 12$ кв в магнитном поле D_2 с большим спадом

18



雨







D₁ = 16 cm, D₂ = 12 cm, D₃ = 8 cm. I - Vo = 12 kb, h = 0.4 m² <u>m</u> - Vo = 12 kb, h = 0.6 m² <u>m</u> - Vo = 24 kb, h = 0.4 m² <u>r</u> - Vo = 24 kb, h = 0.6 m²

21





Ģ



Рис. 12. Радиально-фазовые траектории ионов для $V_0 = 12$ кв, рабочего поля B_1 , $\gamma = 0.5 \cdot 10^{-6}$, D_1 .

22



 \mathcal{O}



