ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Хр.Я. Христов

Р-1446

КОММУТИРУЮЩИЕ, ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ ПОЛЯ

Дубна 1963

Хр.Я. Христов

Р-1446

КОММУТИРУЮЩИЕ, ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ ПОЛЯ

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

Дубна 1963

1. Постановка задачи

Пусть $\phi(\vec{x})$ –вещественное операторное поле. Переменная $\vec{x}$; характеризующая различные операторы поля, представляет собой радиус-вектор точки в обычном трехмерном пространстве E. Без особых изменений все нижеследующие рассуждения можно обобщить на случай, когда $\vec{x}$ есть радиус-вектор в пространстве любого числа измерений с плоской /евклидовской или псевдоевклидовской/ метрикой. Физическое значение имеет именно указанный случай, которым мы и ограничимся. Векторы в этом пространстве будем обозначать буквами со стрелкой на верху. Все операторы действуют в некотором вообще бесконечномерном пространстве – в конфигурационном пространстве H.

Операторы $\phi(\vec{x})$ вещественны:

$$\phi^{+}(\vec{x}) = \phi(\vec{x}), \qquad /1/$$

причем + означает эрмитовское сопряжение, они коммутируют между собой:

$$\phi(\vec{x})\phi(\vec{y}) - \phi(\vec{y})\phi(\vec{x}) = 0 \qquad \text{при любых } \vec{x} \text{ и } \vec{y}, \qquad /2/$$

и обладают трансляционной инвариантностью:

$$\phi(\vec{a} + \vec{x}) = U(\vec{a})\,\phi(\vec{x})\,U^{-1}(\vec{a}) \qquad \text{при любых } \vec{a} \text{ и } \vec{x}, \qquad /3/$$

причем $U(\vec{a})$ – некоторое унитарное представление группы трансляций:

$$U^{-1}(\vec{a}) = U^{+}(\vec{a}). \qquad /4/$$

В этой работе мы найдем общий вид операторных полей $\phi(\vec{x})$, удовлетворяющих требованиям /1/ – /3/. Мы сведем эту задачу к нахождению определенных множеств решений некоторых обыкновенных линейных дифференциальных /или систем интегро-дифференциальных/ уравнений. Условия неэквивалентности и неразложимости искомых представлений мы не будем полностью использовать, так что общее решение наверно можно представить в еще более простом виде. Мы не будем исследовать вопросы сходимости бесконечных сумм и интегралов, так что доказательства будут в некоторой степени формальны.

Отметим, что рассматриваемая нами задача подобна задаче о нахождении представлений группы трансвляций:

$$\Phi(\vec{a} + \vec{x}) = U(\vec{a})\Phi(\vec{x}),$$

где $\Phi(\vec{x})$ и $\Phi(\vec{a} + \vec{x})$ – векторы в конфигурационном пространстве H, а матрицы $U(\vec{a})$, очевидно, коммутируют

$$U(\vec{a})\,U(\vec{b}) - U(\vec{b})U(\vec{a}) = 0 .$$

Решение этой задачи тривиально $- U(\vec{a}) = e^{\vec{a}\frac{\partial}{\partial \vec{x}}}$, а $\Phi(\vec{x})$ – любая функция переменной $\vec{x}$. Сравнение этих уравнений с /2/ и /3/ показывает различие между этими двумя задачами. Задачи рассматриваемого нами типа почти нигде не решались, и нет общих подходов к ним.

В квантовой теории поля исключительно важна задача о нахождении локально-коммутирующих, лоренцовски-инвариантных операторных полей $\phi(\vec{x})$, зависящих уже не только от пространственного радиус-вектора $\vec{x}$, но и от времени t: $x = (t, \vec{x})$ /1/, стр. 722/. В случае вещественного скалярного поля, очевидно, операторы $\phi(x)$ при любом фиксированном значении $t = t_0$ будут удовлетворять всем требованиям /1/ – /3/, которые мы наложили на $\phi(\vec{x})$. /Обратное утверждение, конечно, не имеет места – не каждое решение $\phi(\vec{x})$ уравнений /1/ – /3/ можно рассматривать как значение $\phi(x)$ при $t = t_0$ /. Следовательно, операторы $\phi(x)$ в квантовой теории поля являются однопараметрическими семействами $\phi(t, \vec{x})$ подходяще выбранных операторов, рассматриваемого нами типа:

$$\phi(x) = T(t)\,\phi(\vec{x})\,T^{-1}(t) ,$$

где $T(t)$ – некоторое представление группы трансляций во времени. Таким образом, задачу о нахождении $\phi(\vec{x})$ можно рассматривать как предварительную задачу к проблеме нахождения лоренцовски-инвариантных полей, коммутирующих в пространственно разделенных точках. С другой стороны, если мы заменим требование /3/ более жестким требованием, чтобы поле $\phi(\vec{x})$ получалось из лоренцовски-инвариантного поля $\phi(x)$ при $t = 0$, то ввиду лоренцовской инвариантности условие /2/ будет эквивалентно условию локальной коммутативности и мы бы получили ответ к задаче о нахождении локально-коммутативных, лоренцовски-инвариантных полей. Таким образом, наша задача является также моделью задачи о нахождении операторных полей в квантовой теории поля.

2. Общие уравнения для элементов матрицы $\phi(\vec{x})$

Как известно, все неприводимые унитарные представления $U(\vec{a})$ группы трансляций одномерны $e^{-i\vec{p}\cdot\vec{a}}$, где $\vec{p}$ – вещественный вектор в E. Следовательно, мы можем выбрать базис B в H так, чтобы матрица $U(\vec{a})$ была диагональна. Пусть при этом выборе B базисные векторы характеризуются значением одной переменной m, имеющей конечное или бесконечное число компонент, меняющихся в некотором множестве M. Каждому значению m соответствует одно значение $\vec{p}_m$ переменной $\vec{p}$, так что элементы матрицы $U(\vec{a})$ будут

$$U(m, \vec{a}, n) = \delta(m-n)\,e^{-i\vec{p}_m\cdot\vec{a}} ,$$

где n – переменная, аналогичная m и пробегающая те же самые значения, а $\delta(m-n)$ – обобщенный символ Кронекера в множестве M – произведение δ – символов /кронекеровские матрицы или функции Дирака/, соответствующих всем компонентам m. Тогда элементы $\phi(\vec{x})$ будут $\phi(m, \vec{x}, n)$ и /3/ принимает вид:

$$\phi(n_1, \vec{a} + \vec{x}, n) = e^{i\vec{p}_m\cdot\vec{a}}\;\phi(m, \vec{x}, n)\,e^{i\vec{p}_n\cdot\vec{a}} .$$

Обозначим $\phi(m,0,n) = \phi(m,n)$ и положим $\vec{x} \to 0$, $\vec{a} \to \vec{x}$. Находим

$$\phi(m, \vec{x}, n) = \phi(m, n)\,e^{i(\vec{p}_m - \vec{p}_n)\cdot\vec{x}} .$$

Следовательно, в базисе B каждый элемент матрицы $\phi(\vec{x})$ зависит экспоненциально от $\vec{x}$, причем коэффициент перед $\vec{x}$ в экспоненте равен умноженной на i разности значений $\vec{p}$, соответствующих двум индексам рассматриваемого элемента.

Отметим, что операторы невзаимодействующих полей обычно задаются в виде Фурье-интегралов по $\vec{x}$ /2/ стр. 30/, т.е. в виде линейных комбинаций экспоненциальных функций. Однако, имея ввиду обычное представление опереаторов рождения и уничтожения $a^{\pm}$ /3/ стр. 46/, легко проверить, что при любом фиксированном выборе m и n, т.е. для каждого элемента $\phi(m, \vec{x}, n)$, подынтегральная функция отлична от нуля не больше чем при одном значении интеграционной переменной, так что интеграл сводится к одной экспоненциальной функции в согласии с найденым здесь выражением для $\phi(m, \vec{x}, n)$.

С другой стороны, условие /2/, ввиду /1/, показывает, что при помощи одного унитарного преобразования $V(r, m)$ мы можем привести все матрицы $\phi(\vec{x})$ к диагональному виду:

$$\phi(m, \vec{x}, n) = \sum_r V^{-1}(m, r)\,\psi(r, \vec{x})\,V(r, n). \qquad /5/$$

Здесь r – новая переменная, аналогичная переменной m, характеризующая базисные векторы в новом, каноническом базисе B_0. Пусть R множество, которое она пробегает. Функция $\psi(r, \vec{x})$ дает диагональные элементы матрицы $\phi(\vec{x})$. Ввиду /1/ она вещественна. Матрица $V(r, m)$ унитарна и независящая от $\vec{x}$:

$$\sum V(r, m)\,V^{+}(m, s) = \delta(r-s) . \qquad /6/$$

Здесь переменная s аналогична r и пробегает те же самые значения, а $\delta(r-s)$ – символ Кронекера в базисе B_0. Приравнивая оба найденных выражения для $\phi(m, \vec{x}, n)$, мы получаем:

$$\phi(m,n) = \sum_r V^{-1}(m,r)\,\psi(r,\vec{x})\,V(r,n)\,e^{i(\vec{p}_m-\vec{p}_n)\cdot\vec{x}}.$$

Это уравнение, которое должно иметь место при любых m, n и $\vec{x}$, выражает необходимые и достаточные условия для $\phi(m,n)$, $\psi(r,\vec{x})$, $V(r,m)$ и $\vec{p}_m$, чтобы поле $\phi(\vec{x})$ было коммутативным и трансляционно-инвариантным.

Дифференцированием по $\vec{x}$ /полагая это возможным/, исключаем $\phi(m,n)$:

$$i\sum_r V^{-1}(m,r)\,\frac{\partial\psi(r,\vec{x})}{\partial\vec{x}}\,V(r,n) -$$

$$-\sum_r \vec{p}_m V^{-1}(m,r)\,\psi(r,\vec{x})\,V(r,n) + \sum_r V^{-1}(m,r)\,\psi(r,\vec{x})\,V(r,n)\,\vec{p}_n = 0.$$

Умножаем это уравнение слева на $V(r,m)$ и справа на $V^{-1}(n,s)$, после того, как в нем вместо r написали t. Обозначаем

$$\vec{W}(r,s) = \sum_m V(r,m)\,\vec{p}_m\,V^{-1}(m,s) \qquad /7/$$

и имея в виду /6/ находим

$$i\,\frac{\partial\psi(r,\vec{x})}{\partial\vec{x}}\,\delta(r-s) + (\psi(r,\vec{x}) - \psi(s,\vec{x}))\,\vec{W}(r,s) = 0. \qquad /8/$$

3. Условие интегрируемости для V и ψ

Связь /8/ мы можем рассматривать как дифференциальное уравнение для $\psi(r,\vec{x})$. Так как ψ — однокомпонентная функция переменных r и $\vec{x}$, а /8/ — трехкомпонентное /векторное/ уравнение, которое должно иметь место при любых r, s и $\vec{x}$, то ясно, что функция $\vec{W}$ должна удовлетворять некоторым условиям интегрируемости, чтобы для $\psi(r,\vec{x})$ мы могли получить не тривиальные /зависящие от r и $\vec{x}$/ решения. Чтобы найти эти условия, отметим прежде всего, что все уравнения инвариантны по отношению к любой замене переменной

$$\bar{r} = \bar{r}(r), \qquad /9/$$

если при этом ввиду /5/ и /6/ положим

$$V(r,m) = \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial r}\right|\,\bar{V}(\bar{r},m), \quad \psi(r,\vec{x}) = \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial x}\right|\,\bar{\psi}(\bar{r},\vec{x}), \qquad /10/$$

где $\left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial r}\right|$ — якобиан преобразования /9/. Чтобы написать /10/ мы полагали, что преобразование /9/ непрерывно. Чтобы получить /10/ в случае, когда некоторые компоненты r и $\bar{r}$ пробегают только дискретные значения, мы можем заменить эти компоненты r и $\bar{r}$ другими непрерывно изменяющимися переменными

$\tilde{r}$ и $\tilde{\bar{r}}$, считая $\tilde{V}(\tilde{r},m)$, $\tilde{\bar{V}}(\tilde{\bar{r}},m)$, $\tilde{\psi}(\tilde{r},\vec{x})$, $\tilde{\bar{\psi}}(\tilde{\bar{r}},\vec{x})$ равными нулю вне первоначального множества, по которому изменяются r и $\bar{r}$ и имеющие δ- образные особенности в точках $\tilde{r} = r$ и $r = \bar{r}$, чтобы все вышеуказанные соотношения сохранялись при замене V и ψ на $\tilde{V}$ и $\tilde{\psi}$. Выписываем связь /10/ для преобразования $\tilde{\bar{r}} = \tilde{\bar{r}}(\tilde{r})$. Возращаясь теперь к первоначальным переменным r и $\bar{r}$, мы получаем обобщенный якобиан $\left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial r}\right|$, т.е. получаем искомое обобщение связей /10/. Преобразование /9/ мы можем рассматривать как переход к новому каноническому базису B_0 который отличается от исходного базиса B_0 только нумерацией базисных векторов. Следовательно, наложив на r некоторые дополнительные требования, но такие, что исходя из любого первоначального выбора r мы можем удовлетворить их при помощи надлежащего преобразования типа /9/, этими требованиями мы не суживаем общее решение задачи. Воспользуемся этой свободой при выборе переменной r и, вместо нее мы введем три новые переменные ρ', ρ и r', в общем, тоже многокомпонентные, так чтобы имели место следующие два условия.

1. При каждом фиксированном выборе переменной ρ' переменная r' принимает только счетное /или конечное/ множество значений, а при каждом фиксированном выборе переменных ρ' и r' некоторые из компонент ρ изменяются независимо и непрерывно в некоторой /открытой/области в пространстве этих компонент, причем остальные компоненты выражаются как функции первых. /Случаи, когда при заданных ρ' и r' все компоненты ρ могут изменяться независимо или когда ни одна компонента ρ не может изменяться непрерывно, не исключены/. Значит параметр r' характеризует различные области, которые пробегает ρ /или некоторые его компоненты/. Если имеется только одна такая область, параметр r' не нужен, но для единства все же мы будем считать, что переменная r' существует и принимает только одно значение.

2. Равенство
$$\psi(\rho'_1, \rho_1, r'_1, \vec{x}) = \psi(\rho'_2, \rho_2, r'_2, \vec{x})$$

имеет место при любом $\vec{x}$ тогда и только тогда, если $\rho_1 = \rho_2$ и $r'_1 = r'_2$. Это означает, что параметры ρ и r' характеризуют отличающиеся между собой функции $\psi(\vec{x})$ в семействе $\psi(r,\vec{x})$, а ρ' характеризует повторяющиеся функции в этом семействе. Обозначим через D' множество, которое пробегает ρ', через $R'(\rho')$ — то, которое пробегает r' при заданном выборе ρ' / оно вообще будет зависеть от ρ' / и через $D(\rho', r')$ — множество или, точнее, область, которую пробегает ρ при заданном выборе ρ' и r' /она вообще зависит от ρ' и r', причем для различных ρ' и r' может иметь различное число изменений/. Введем еще множество или, точнее, область $D(r')$, которую пробегает ρ при заданном r' и множество $D'(r', \rho)$, которое пробегает ρ' при заданных r' и ρ. Ввиду того, что множество $D(\rho', r')$ открыто, ясно, что если $F(\rho', \rho, r')$ – некоторая функция указанных переменных, то мы можем дифференцировать ее по каждой компоненте ρ / в области $D(\rho', r')$/, не опасаясь, что не будет иметь смысла выражение $F(\rho', \rho + \Delta\rho, r') - F(\rho', \rho, r')$, которое нужно образовать, чтобы найти производную, так как если $\Delta\rho$ достаточно мало, аргумент $\rho + \Delta\rho$ будет тоже в $D(\rho', r')$, т.е. останется во множестве, которое пробегают ρ', ρ и r'.

Покажем, как можно выделить параметры ρ', ρ и r', если задано семейство $\psi(r, \vec{x})$. Отбросим прежде всего из $\psi(r, \vec{x})$ все повторяющиеся функции $\psi(\vec{x})$, сохраняя по одной из них. Эти оставшиеся, различные между собой функции $\psi(\vec{x})$ характеризуются тем же параметром r, только он уже будет изменяться во множестве D'', более узком, чем первоначальное множество R. Обозначим через ρ'' эту переменную, отличающуюся только тем, что она изменяется в D'' а не в R. Конечно, мы можем не считать компонентами ρ'' те компоненты r, которым достаточно дать только одно значение /вообще зависящее от значений остальных компонент/, чтобы получить все отличные между собой функции $\psi(\vec{x})$ семейства $\psi(r, \vec{x})$. Каждому значению ρ'' соответствует некоторое множество значений r, при которых $\psi(r, \vec{x}) = \psi(\rho'', \vec{x})$ для каждого $\vec{x}$. Обозначим через ρ' все эти значения переменной r. Следовательно, ρ' пробегает те же самые значения, что и r, но каждому значению ρ'' соответствуют разные множества, которые ρ' пробегает. При этом тоже можно отбросить те компоненты r, которые при заданном ρ'' являются функциями остальных. Пусть компоненты переменной ρ'' при каждом заданном значении ρ' принимают значения, которые покрывают счетное число /открытых/ областей, вообще различного числа изменений /включая и 0, причем областью нулевого измерения будем считать точку/. Каждую из этих областей мы можем характеризовать значением некоторого дискретного параметра r' со счетным числом компонент, каждая из которых пробегает счетное множество значений, а независимые между собой непрерывно изменяющиеся компоненты r, соответствующие заданному r' /и ρ'/ представляют собой компоненты переменной ρ. Этим все параметры ρ', ρ и r' выделены.

Пусть $$\sigma'' = \sigma''(\rho'') \quad \text{и} \quad \sigma' = \sigma'(\rho', \rho'')$$

две произвольные обратимые функции /вторая при фиксированном ρ'' / и пусть s' и σ получаются из σ'' тем же способом, что r' и ρ – из ρ''. Очевидно, эти переменные σ', σ, s' удовлетворяют тем же условиям 1 и 2, и все переменные ρ', ρ, r', удовлетворяющие этим условиям, можно получить таким способом. Этим выяснен вопрос о неоднозначности в выборе переменных

Конечно, указанная процедура возможна, если ρ'' при заданном ρ' пробегает некоторое счетное множество областей/в общем разного числа измерений/, хотя бы при одном определенном выборе функций $\sigma''(\rho'')$ и $\sigma'(\rho', \rho'')$. Это условие не очень ограничительно. Например, если множество R, которое пробегает r, представляет собой область, а $\psi(r, \vec{x})$ является непрерывной функцией от r, легко показать, что оно выполняется. Мы будем считать, что это условие выполнено.

В качестве примера рассмотрим семейство

$$\psi(r, \vec{x}) = (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2)\vec{x}^2 ,$$

где r_4, r_2, r_3, r_4, –четыре переменные, непрерывно изменяющиеся от $-\infty$ до $+\infty$. Очевидно, параметры

$$\rho''_1 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \qquad (-\infty < \rho''_1 < +\infty),$$

$$\rho''_2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 \qquad (0 \leq \rho''_2 < +\infty)$$

характеризуют различающиеся между собой функции $\psi(\vec{x})$ в семействе $\psi(r, \vec{x})$. Следовательно, их можно рассматривать как компоненты ρ''. Далее видно, что общее решение вышенаписанных уравнений можно представить в виде:

$$r_1 = \tfrac{1}{2}(\rho'_1 + \rho'_2 - \rho''_1) + \rho'_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\rho''_2 - s(\rho''_1, \rho)} ,$$

$$r_2 = \tfrac{1}{2}(\rho'_1 + \rho'_2 - \rho''_1) - \rho'_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\rho''_2 - s(\rho''_1, \rho')} ,$$

$$r_3 = \rho'_1 , \quad r_4 = \rho'_2 ,$$

где

$$s(\rho_1, \rho') = \rho_1'^2 + \rho_2'^2 + \tfrac{1}{2}(\rho'_1 + \rho'_2 - \rho_1)^2 ,$$

а $\rho'_0 = \pm 1$, $-\infty < \rho'_1, \rho'_2 < +\infty$ и, следовательно, ρ'_1, ρ'_2, и ρ'_0 можно рассматривать как компоненты ρ'. Чтобы для r_1, r_2, r_3, r_4 получились вещественные значения при фиксированном ρ', мы должны иметь $\rho''_2 \geq s(\rho''_1, \rho')$. Чтобы разложить на области это множество в пространстве переменной ρ'', достаточно ввести один параметр r'; принимающий два значения, например 0 и 1, и положить

$$\rho''_2 = s(\rho_1, \rho') \quad -\infty < \rho_1 < +\infty \text{ при } r' = 0,$$

$$\rho_2 > s(\rho_1, \rho') \quad -\infty < \rho_1 < +\infty \text{ при } r' = 1.$$

Следовательно, область $D(\rho', r')$ одномерна при $r' = 0$ и двумерна при $r' = 1$. Что касается множества $D'(r', \rho)$, оно определяется условием $\rho_2 = s(\rho_1, \rho')$ при $r' = 0$ и условием $\rho_2 > s(\rho_1, \rho')$ при $r' = 1$. Ввиду данного выражения для $s(\rho_1, \rho')$ ясно, что $D'(0, \rho)$ при каждом фиксированном ρ является эллипсом в плоскости ρ'_1, ρ'_2, а $D'(1, \rho)$ – внутренностью этого эллипса. Конечно, это один из возможных, но не единственно возможный способ ввести параметры $\rho'\cdot$, ρ и $r'\cdot$ в рассматриваемом примере.

Имея ввиду, что первый член в уравнении /8/ равен нулю при $r \neq s$, а первый множитель второго члена равен нулю при $r'\cdot \neq s'\cdot$ или $\rho \neq \sigma$ /из /11/ видно, что если $r'\cdot \neq s'\cdot$ или $\rho \neq \sigma$, он не может анулироваться !/, мы получаем, что матрица $\vec{W}(r,s)$ должна иметь вид

$$\vec{W}(r,s) = i\vec{u}_k(r)\delta(\rho'-\sigma'\cdot)\,\delta_k(\rho-\sigma)\,\delta(r'-s') + \vec{v}(r,\sigma'\cdot)\,\delta(\rho-\sigma)\,\delta(r'-s'), \qquad /12/$$

где r' изменяется в $R'\cdot$, ρ – в $D(r'\cdot)$, а ρ' – в $D'(r',\rho)$. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Здесь k характеризует компоненты ρ_k переменной ρ, а $\delta_k(\rho-\sigma)$ представляет собой производную функции $\delta(\rho-\sigma)$ по ρ_k. Естественно, размерность функции $\delta(\rho-\sigma)$ может зависеть от значения $r'\cdot$ /или, что все равно, от $s'\cdot$ /. Если некоторому значению $r'\cdot$ не соответствует непрерывно изменяющаяся переменная ρ, то, очевидно, в этом случае мы должны считать, что $\delta(\rho-\sigma)=1$, и, следовательно, первый член в правой стороне /12/ выпадает. Коэффициенты $\vec{v}$ и $\vec{u}_k$ при каждом k являются векторами в E с компонентами v^a и u_k^a $(a=1,2,3)$. Именно при выводе /12/ используется специальный выбор переменных ρ', ρ и r'. Вывод основывается на известной теореме /[4], стр. 121/, что уравнение

$$u(t)\delta(t) = tW(t),$$

где $u(t)$ – заданная функция, не исчезающая при $t=0$, не будет иметь решения, если t принимает только счетное множество значений, так что $\delta(t)$ представляет собой матрицу Кронекера, и будет иметь бесконечное множество решений

$$W(t) = -u(t)\delta'(t) + v\delta(t),$$

характеризуемых параметром v, если t изменяется непрерывно в некотором открытом интервале, так что $\delta(t)$ представляет собой функцию Дирака.

Так как переменная $\vec{p}$ вещественна, а матрица V унитарна, из /7/ получаем, что матрица $\vec{W}(r,s)$ самосопряженная. Следовательно, функции $\vec{u}_k$ тоже вещественны, а $\vec{v}$ – самосопряженная матрица по $\rho'\cdot$ и $\sigma'\cdot$:

$$\vec{u}_k(r) = \vec{u}^*_k(r), \quad \vec{v}(\rho',\rho,r',\sigma'\cdot) = \vec{v}^*(\sigma',\rho,r',\rho'\cdot), \qquad /13/$$

где * обозначает комплексное сопряжение.

Мы будем полагать, что функции ψ и V дифференцируемы по ρ. Это допустимо, так как множество, по которому изменяется ρ при заданных $\rho'\cdot$ и $r'\cdot$ открыто. Подставляем /12/ в /8/. После суммирования / или интегрирования/ по s находим

$$\vec{u}_k(r)\,\frac{\partial\psi(r,\vec{x})}{\partial\rho_k} = \frac{\partial\psi(r,\vec{x})}{\partial\vec{x}} \qquad /14/$$

Подставляем /12/ также в /7/. Заменяем в полученном уравнении m на n и умножаем справа на $V(s,m)$, подразумевая суммирование по s. Получаем

$$i\vec{u}_k(r)\,\frac{\partial V(r,m)}{\partial\rho_k} + \sum_{\sigma'}\vec{v}(r,\sigma')V(\sigma',\rho,r',m) = V(r,m)\vec{p}_m. \qquad /15/$$

Здесь, очевидно, при каждом заданном выборе ρ и $r'\cdot$ переменные $\rho'\cdot$ и σ' изменяются в $D'(r',\rho)$. Вместо m мы введем две новых переменных μ и $\vec{p}$ причем $\vec{p}=\vec{p}_m$, а μ – дополнительная переменная, которой характеризуются различные значения m, соответствующие данному значению $\vec{p}$. Тогда /15/ принимает вид

$$i\vec{u}_k(r)\,\frac{\partial V(r,\mu,\vec{p})}{\partial\rho_k} + \sum_{\sigma'}\vec{v}(r,\sigma')V(\sigma',\rho,r',\mu,\vec{p}) = V(r,\mu,\vec{p})\vec{p}. \qquad /16/$$

Отметим, что подстановка

$$\psi(r,\vec{x}) = \sum_{\vec{p}}\chi(r,\vec{p})\,e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

переводит /14/ в уравнение

$$i\vec{u}_k(r)\,\frac{\partial\chi(r,\vec{p})}{\partial\rho_k} = \chi(r,\vec{p})\vec{p},$$

которое подобно уравнению /16/, и наоборот, если положим

$$U(r,\mu,\vec{p},\vec{x}) = V(r,\mu,\vec{p})\,e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}, \qquad /17/$$

то эта функция будет удовлетворять уравнению

$$U_k(r)\,\frac{\partial U(r,\mu,\vec{p},\vec{x})}{\partial\rho_k} - i\sum\vec{v}(r,\sigma')U(\sigma',\rho,r',\mu,\vec{p},\vec{x}) = \frac{\partial U(r,\mu,\vec{p},\vec{x})}{\partial\vec{x}} \qquad /18/$$

типа /14/.

Итак, вопрос о нахождении $\phi(\vec{x})$ сводится к отысканию функций

$$\vec{u}_k(r),\ \vec{v}(r,\sigma'),\ \psi(r,\vec{x}) \quad \text{и} \quad V(r,\mu,\vec{p}),$$

удовлетворяющих уравнениям /14/ и /16/. При этом функции $\vec{u}_k$ вещественны, функция $\psi(r,\vec{x})$ тоже вещественна, причем она от ρ' не зависит ρ, при различных ρ и r' принимает различные значения, функция $\vec{v}(r,\sigma')$ самосопряженная по отношению к ρ' и $\sigma'\cdot$, а функция $V(r,\mu,\vec{p})$ представляет общий элемент одной унитарной матрицы. Следовательно, если мы рассматриваем $V(r,\mu,\vec{p})$ как семейство функций аргумента r, характеризуемых параметрами μ и $\vec{p}$, то они ортонормированы:

$$\sum_r V(r,\mu,\vec p\,)\,V^*(r,\nu,\vec q\,) = \delta(\mu-\nu)\,\delta(\vec p-\vec q\,) \qquad /19/$$

и образуют полный набор функций в H. Ввиду /13/ ясно, что оператор, действующий в левом члене уравнения /16/, самосопряженный и, следовательно, решения $V(r,\mu,\vec p\,)$ этого уравнения при различных $\vec p$ ортогональны и условие /19/ в этом случае автоматически выполняется. Что касается решений, соответствующих одному и тому же $\vec p$, любая их линейная комбинация является также решением, так что нетрудно их ортонормировать. Конечно, мы должны иметь достаточно много решений $V(r,\mu,\vec p)$, чтобы удовлетворить и условию полноты.

При заданных $\vec u_k$ и $\vec v$ мы можем рассматривать /14/ и /16/ как уравнения для ψ и V. Первое из этих уравнений дифференциальное, а второе – тоже дифференциальное или, точнее, представляет собой систему интегро-дифференциальных уравнений, так как $\sum_{\sigma'}$ означает суммирование по дискретным и интегрирование по непрерывным компонентам переменной σ. Решение уравнения /14/ облегчается тем, что в нем нет дифференцирования ни суммирования или интегрирования по r' и ρ' и поэтому оно распадается на отдельные подсистемы для каждой компоненты ψ, соответствующей заданному выбору ρ' и r'. В /16/ нет ни дифференцирования, ни суммирования по r', так что оно тоже распадается. С другой стороны, решение этих уравнений затрудняется тем, что они являются трехкомпонентными /векторными/ уравнениями, которые должны иметь место при любых r и $\vec x$, соответственно r, μ и $\vec p$, тогда как ψ и V являются однокомпонентными функциями r', ρ и $\vec x$, соответственно r, μ и $\vec p$, и, следовательно, при произвольном выборе $\vec u_k$ и $\vec v$ они не будут иметь решения. Чтобы решения существовали, должны иметь место некоторые условия интегрируемости – функции $\vec u_k$ и $\vec v$, которые от μ и $\vec p$ не зависят, должны быть выбраны так, чтобы: 1/ последовательность всех уравнений /16/, характеризуемых значениями параметра r', допускала некоторую последовательность решений $V(r,\mu,\vec p\,)$, характеризуемых переменными μ и $\vec p$, которые образуют полный набор функций по отношению ко всем функциям $F(r)$ в пространстве переменной r; 2/ различным значениям ρ и r' соответствовали различные, не зависящие от ρ', решения $\psi(r,\vec x\,)$ уравнения /14/.

4. Условия интегрируемости для $\vec u_k$ и $\vec v$

Согласно /17/, каждому решению уравнения /16/, или более общо, каждой их линейной комбинации соответствует одно решение уравнения /18/, причем обе эти функции совпадают при $\vec x = 0$. Тогда условие полноты, которое утверждает, что

любую функцию $F(r)$ можно представить в виде линейной комбинации решений уравнения /16/ при подходящих $\vec p$, показывает, что уравнение /18/ тоже должно иметь решение, которое при $x=0$ сводится к произвольной заранее заданной функции $F(r)$. Это означает, что уравнение /18/ должно быть не только интегрируемым, т.е. иметь неисчезающее решение, но и вполне интегрируемым, т.е. иметь решение, которое при $\vec x = 0$ сводится к любой заранее заданной функции $F(r)$. Чтобы найти это условие полной интегрируемости, прежде всего напишем /18/ символически в виде

$$\left(\delta\,\vec u_k \frac{\partial}{\partial\rho_k} - i\,\vec v\,\right) U = \frac{\partial U}{\partial \vec x}\,. \qquad /20/$$

Здесь ради краткости аргументы не выписаны, δ представляет собой функцию $\delta(\rho'-\sigma')$, а суммирование по σ' подразумеваем, ввиду того, что δ и $\vec v$ являются матрицами по отношению к аргументам ρ' и σ'. Берем вихрь из этого уравнения и получаем

$$\left(\delta\,\vec u_k \frac{\partial}{\partial\rho_k} - i\vec v\,\right) \times \frac{\partial U}{\partial \vec x} = 0\,,$$

причем $\times$ обозначает векторное произведение в трехмерном пространстве E. /Если бы пространство E имело больше трех измерений, вместо векторного произведения явилась бы антисимметричная часть прямого произведения/. Исключая производные по $\vec x$, из этих двух уравнений мы находим

$$\left(\delta\vec u_k \frac{\partial}{\partial\rho_k} - i\vec v\,\right) \times \left(\delta\vec u_\ell \frac{\partial}{\partial\rho_\ell} - i\vec v\,\right) U = 0\,.$$

Ввиду того, что произведение антисимметричной матрицы $\vec u_k \times \vec u_\ell$ на симметричную матрицу $\dfrac{\partial^2 U}{\partial\rho_k\,\partial\rho_\ell}$ равно 0, это уравнение преобразуется в

$$\left[-\delta\vec u_k \times \frac{\partial\vec u}{\partial\rho_k} + i(\vec u_\ell \times \vec v + \vec u_\ell)\right] \frac{\partial U}{\partial\rho_\ell} + \left[i\vec u_k \times \frac{\partial\vec v}{\delta\rho_k} + \vec v \times \vec v\,\right] U = 0\,. \qquad /21/$$

Условие полной интегрируемости уравнения /18/ показывает, что это соотношение должно иметь место при любом выборе U при $\vec x = 0$, а так как коэффициенты перед U и $\dfrac{\partial U}{\partial\rho_\ell}$ от $\vec x$ не зависят, мы получаем следующие уравнения для $\vec u_k$ и $\vec v$

$$\delta\vec u_k \times \frac{\partial\vec u_\ell}{\partial\rho_k} + i(\vec u_\ell \times \vec v + \vec v \times \vec u_\ell) = 0\,, \qquad /22/$$

$$\vec u_k \times \frac{\partial\vec v}{\delta\rho_k} + i\vec u \times \vec v = 0\,. \qquad /23/$$

Уравнение /14/ тоже должно быть интегрируемым при каждом значении r'. /Этот аргумент в дальнейшем мы не будем писать/. Оно должно иметь решение $\psi(\rho,\vec x\,)$, которое от ρ' не зависит /хотя и коэффициенты $\vec u_k$ от ρ' могут зависеть/ и при этом такое, что согласно /11/, если $\rho_1 \neq \rho_2$, то

$$\psi(\rho_1,\vec x\,) \neq \psi(\rho_2,\vec x\,) \qquad /24/$$

хотя бы для одного $\vec{x}$. Если мы возьмем вихрь из /14/ при $\rho' = \rho'_1$, мы получаем

$$\vec{u}_{1k}\frac{\partial}{\partial \rho_k} \times \frac{\partial \psi}{\partial \vec{x}} = 0,$$

где $\vec{u}_{1k} = \vec{u}_k(\rho'_1, \rho)$. Кроме того, из /14/ при $\rho' = \rho'_2$ имеем

$$\vec{u}_{2k}\frac{\partial \psi}{\partial \rho_k} = \frac{\partial \psi}{\partial \vec{x}},$$

так что исключая производную по $\vec{x}$, находим

$$\vec{u}_{1k}\frac{\partial}{\partial \rho_k} \times \vec{u}_{2\ell}\frac{\partial \psi}{\partial \rho_\ell} = 0,$$

или

$$\vec{u}_{1k} \times \vec{u}_{2\ell}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho_k \partial \rho_\ell} + \vec{u}_{1k} \times \frac{\partial \vec{u}_{2\ell}}{\partial \rho_k}\frac{\partial \psi}{\partial \rho_\ell} = 0. \qquad /25/$$

Это соотношение представляет собой систему векторных дифференциальных уравнений, характеризуемых значениями ρ_1 и ρ_2, которым должна удовлетворять функция ψ при каждом фиксированном $\vec{x}$. Оно выражает условие интегрируемости – если $\psi(\rho)$ – некоторая функция, удовлетворяющая этим уравнениям, то можно найти функцию $\psi(\rho, \vec{x})$, удовлетворяющую /14/, которая сводится к $\psi(\rho)$ при любом заданном значении $\vec{x} = \vec{x}_0$. В частности, при $\rho'_1 = \rho'_2 = \rho$ первый член в этом равенстве будет 0, и мы получаем уравнения первого порядка для $\psi(\rho)$:

$$\vec{u}_k \times \frac{\partial \vec{u}_\ell}{\partial \rho_k}\frac{\partial \psi}{\partial \rho_\ell} = 0. \qquad /26/$$

Пусть $\psi^n(\rho)$ – полный набор функционально независимых /и не зависящих от $\vec{x}$/ решений уравнений /25/, так что любое их решение можно представить в виде

$$\psi(\rho) = F(\psi^n(\rho)). \qquad /27/$$

Очевидно, если система /25/ сводится к /26/, функция F будет произвольна. В общем случае она не произвольна, но все же существует, так как общее решение любого линейного уравнения можно представить как линейную однородную функцию некоторых его решений. Так как /25/ выражает условие интегрируемости, любое решение $\psi(\rho, \vec{x})$ уравнения /14/ можно представить в виде

$$\psi(\rho, \vec{x}) = F(\psi^n(\rho), \vec{x}). \qquad /28/$$

Если решения $\psi^n(\rho)$ таковы, что существует, по крайней мере одна пара значений ρ_1 и ρ_2, такая что $\psi^n(\rho_1) = \psi^n(\rho_2)$ при всех n, то согласно /28/ мы будем иметь также $\psi(\rho, \vec{x}) = \psi(\rho_2, \vec{x})$ при любом $\vec{x}$, как бы мы ни выбирали F. Но согласно /24/ это невозможно. Следовательно, решений $\psi^n(\rho)$ должно быть

достаточно много, чтобы если $\rho_1 \neq \rho_2$, то $\psi^n(\rho_1) \neq \psi^n(\rho_2)$ хотя бы для одного n. Из этого следует, что набор $\psi^n(\rho)$ полный – не только любое решение уравнений /25/, но и любую функцию $\psi(\rho)$ можно представить в виде /27/ при надлежащем F /конечно, уже не требуя, чтобы функция $F(\rho)$ удовлетворяла /25//. В частности, если число K компонент переменной ρ конечно, то система /25/ должна иметь также по крайней мере K функционально независимых решений – если бы их число было меньше K, то уравнения $\psi^n(\rho) = c^n$ при заданном выборе c^n имели бы больше одного решения для ρ, что противоречит только что доказанному. Тогда, имея в виду, что любая линейная комбинация решений уравнений /25/ есть также решение, мы получаем, что если ρ^0 и ℓ^0 некоторые значения ρ и ℓ, то мы можем найти такое решение ψ^0 уравнений /25/, чтобы при $\rho = \rho^0$ все производные $\frac{\partial \psi^0}{\partial \rho_\ell}$ равнялись нулю, за исключением $\frac{\partial \psi^0}{\partial \rho_{\ell^0}}$, которая равнялась единице. Подставляя в /26/, получаем, что $\vec{u}_k$ удовлетворяют уравнению

$$\vec{u}_k \times \frac{\partial \vec{u}_\ell}{\partial \rho_k} = 0 \qquad /29/$$

при $\rho = \rho^0$ и $\ell = \ell^0$, т.е. при всех ρ и ℓ, так как ρ^0 и ℓ^0 можно выбрать произвольно. Мы покажем еще, что функции $\vec{u}_k(r)$ от ρ' зависеть не могут. На самом деле, пусть ρ'_1 и ρ'_2 – два значения ρ', такие, что при $r' = r'^0$, $\rho = \rho^0$, $k = k^0$ и $a = a^0$ мы имеем

$$u^{a^0}_{k^0}(\rho'_1, \rho^0) \neq u^{a^0}_{k^0}(\rho'_2, \rho^0). \qquad /30/$$

Уравнение /14/ при $a = a^0$ и при $\rho' = \rho'_1$ или $\rho' = \rho'_2$ дает

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_{a^0}} = u^{a^0}_k(\rho'_1, \rho)\frac{\partial \psi}{\partial \rho_k}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_{a^0}} = u^{a^0}_k(\rho'_2, \rho)\frac{\partial \psi}{\partial \rho_k}.$$

Подставляя здесь $\rho = \rho^0$, $\psi = \psi^0$, мы получаем

$$\frac{\partial \psi^0}{\partial x_{a^0}} = u^{a^0}_{k^0}(\rho'_1, \rho^0), \quad \frac{\partial \psi^0}{\partial x_{a^0}} = u^{a^0}_{k^0}(\rho'_2, \rho^0),$$

что невозможно ввиду /30/. Этим доказано, что $\vec{u}_k(r)$ от ρ' не зависит. Тогда условие интегрируемости /25/ сводится к /26/, а оно удовлетворено ввиду /29/. Следовательно, уравнение /14/ вполне интегрируемо – при любом выборе $\psi(\rho)$ имеется решение $\psi(\rho, \vec{x})$, такое, что $\psi(\rho, \vec{x})_{x=0} = \psi(\rho)$. Кроме того, поскольку $\vec{u}_k$ от ρ' не зависят, мы получаем $\vec{u}_k \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u}_k = 0$ и, следовательно, /22/ тоже сводится к /29/. Так условия интегрируемости уравнений /14/ и /16/ сводятся к дифференциальному уравнению /29/ для $\vec{u}_k$ и к уравнению /23/, которое после того, как в него подставлено некоторое решение уравнения /29/, превращается в систему интегро-дифференциальных уравнений для $\vec{v}$. Эта система проста в смысле, что дифференцирование и интегрирование производятся по разным переменным ρ и ρ'.

5. Нахождение функций $\vec{u}_k$

Оба уравнения /29/ и /23/ не стандартны в смысле, что ввиду наличия векторных произведений определители коэффициентов перед производными неизвестных $\vec{u}_k$ и $\vec{v}$ по любой из независимых переменных ρ_k равны 0. Поэтому эти уравнения нельзя разрешить по отношению к производным от неизвестных по некоторому ρ_k и, следовательно, нельзя применить теорему Коши, чтобы узнать, имеют ли они решения, и если имеют, то какие произвольные элементы содержат общие их решения. Мы приведем системы /29/ и /23/ к более простому виду подходящим выбором переменных ρ_k. Произведем замену переменных типа /9/:

$$\bar{\rho}_\ell = \bar{\rho}_\ell(\rho_k). \qquad /31/$$

При этом мы будем иметь

$$\delta(\rho-\sigma) = \left|\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\rho}\right| \delta(\bar{\rho}-\bar{\sigma})$$

и

$$\delta_k(\rho-\sigma) = \frac{\partial}{\partial\rho_k}\left|\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\rho}\right| \delta(\bar{\rho}-\bar{\sigma}) + \left|\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\rho}\right| \frac{\partial\bar{\rho}_\ell}{\partial\rho_k}\, \delta_\ell(\bar{\rho}-\bar{\sigma}).$$

Следовательно, чтобы сохранить дефиниционные равенства /6/, /5/, /7/ и /12/, в качестве законов преобразования для V, ψ, $\vec{W}$, $\vec{u}_k$, и $\vec{v}$ мы должны принять равенства

$$V(r,m) = \left|\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\rho}\right|^{1/2} \bar{V}(\bar{r},m), \quad (\bar{r} = (\rho', \bar{\rho}, r')),$$

$$\psi(r,\vec{x}) = \left|\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\rho}\right|^{-1} \bar{\psi}(\bar{r},\vec{x}),$$

$$\vec{W}(r,s) = \left|\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\rho}\right| \bar{\vec{W}}(\bar{r},\bar{s}), \qquad /32/$$

$$\bar{\vec{u}}_\ell(\bar{r}) = \vec{u}_k(r)\, \frac{\partial\bar{\rho}_\ell}{\partial\rho_k},$$

$$\bar{\vec{v}}(\bar{r},\sigma') = \vec{v}(r,\sigma') + \vec{u}_k \frac{\partial}{\partial\rho_k} \ln\left|\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\rho}\right|,$$

аналогичные равенствам /10/. Тогда все найденные выше соотношения сохраняются. В частности, уравнения /29/, /23/, /16/ и /14/ для $\vec{u}_k$, $\vec{v}$, V и ψ также остаются. Следовательно, теория инвариантна по отношению к замене переменных /31/, как и следовало бы ожидать ввиду того, что мы еще не накладывали на выбор ρ никакого специального ограничения, кроме общего требования непрерывности. Пользуясь этой свободой, мы можем при каждом фиксированном значении r' совершить замену переменных типа /31/, такую, чтобы новые функции $\vec{u}_k$ получили возможно простой вид, например, возможно большее число их компонент сделать равными 0 или 1. Пусть нам дано одно решение $\vec{u}_k(\rho)$ уравнений /29/.

Приведем к каноническому виду прежде всего компоненты $u_k^1 (k = 1, 2, \ldots)$. Рассмотрим общий случай, когда среди них есть по крайней мере одна отличная от нуля в некоторой области переменных ρ_k. Согласно /32/, функции $\bar{\rho}_\ell(\rho_k)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\bar{u}_\ell^1 = u_k^1(\rho_m)\, \frac{\partial\bar{\rho}_\ell(\rho_m)}{\partial\rho_k}. \qquad /33/$$

Следовательно, если бы мы хотели сделать все $\bar{u}_\ell^1$ равными нулю, то $\bar{\rho}_\ell(\rho_k)$ должны представлять собой функционально-независимые решения уравнения

$$u_k^1(\rho_m)\, \frac{\partial\bar{\rho}(\rho_m)}{\partial\rho_k} = 0,$$

чтобы преобразование было однозначным и обратимым. В частности, если ρ имеет конечное число K компонент, то это уравнение должно иметь K функционально независимых интегралов. Но, как известно, линейное однородное уравнение, у которого не все коэффициенты равны 0, не имеет столько функционально независимых решений. Следовательно, одна из компонент $\bar{u}_k^1$ должна быть отличной от 0 и самый простой вид величин $\bar{u}_k^1$ будет

$$\bar{u}_1^1 = 1, \quad \bar{u}_k^1 = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots). \qquad /34/$$

Преобразование /31/, которое переводит u_k^1 в такой вид, задается через

$$u_k^1(\rho_m)\, \frac{\partial\bar{\rho}_1(\rho_m)}{\partial\rho_k} = 1, \quad u_k^1(\rho_m)\, \frac{\partial\bar{\rho}_K(\rho_m)}{\partial\rho_k} = 0.$$

Эти уравнения уже всегда имеют функционально независимые решения, так что сведение к /34/ возможно. После этого преобразования уравнение /29/ становится

$$u_k^2 \frac{\partial u_\ell^3}{\partial\rho_k} - u_k^3 \frac{\partial u_\ell^2}{\partial\rho_k} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho_1} u_\ell^2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\rho_1} u_\ell^3 = 0.$$

Из последних двух уравнений находим

$$u_\ell^2 = F_\ell^2(\rho\ \ ),\quad u_\ell^3 = F_\ell^3(\rho_k)\quad (\kappa = 2,3,\ldots), \qquad /35/$$

а подстановка этих выражений в первое уравнение дает

$$F_\kappa^2 \frac{\partial F_\ell^3}{\partial \rho_\kappa} - F_\kappa^3 \frac{\partial F_\ell^2}{\partial \rho_\kappa} = 0 \quad (\kappa = 2,3,\ldots;\ \ell = 1,2,\ldots). \qquad /36/$$

/Суммирование по повторяющемуся индексу κ подразумевается/. В дальнейшем эти переменные $\vec{\rho}_k$ и функции $\vec{u}_k$ будем обозначать просто через ρ_k и $\vec{u}_k$. Условиями /34/ переменные ρ_k, конечно, однозначно не определяются. Мы воспользуемся оставшейся свободой, чтобы, сохраняя /34/, перевести и u_k^2 в канонический вид. Это второе преобразование задается опять через /31/. Ввиду /34/ и первого уравнения /29/ мы должны иметь

$$\frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial \rho_1} = 1, \quad \frac{\partial \rho_\kappa}{\partial \rho_1} = 0,$$

откуда получаем

$$\bar{\rho}_1 = \rho_1 + F_1(\rho_\lambda),\quad \bar{\rho}_\kappa = F_\kappa(\rho_\lambda)\quad (\bar{\kappa},\lambda = 2,3,\ldots). \qquad /37/$$

Тогда, ввиду /35/, второе уравнение /29/ сводится к

$$\vec{u}_\ell^{\,2} = u_k^2 \frac{\partial \vec{\rho}_\ell}{\partial \rho_k} = \begin{cases} u_1^2 + u_\kappa^2 \dfrac{\partial F_1}{\partial \rho_\kappa} = F_1^2 + F_\kappa^2 \dfrac{\partial F_1}{\partial \rho_\kappa} & \text{при } \ell = 1 \\[2ex] u_\kappa^2 \dfrac{\partial F_\lambda}{\partial \rho_\kappa} = F_\kappa^2 \dfrac{\partial F_\lambda}{\partial \rho_\kappa} & \text{при } \ell = \lambda = 2,3,\ldots \end{cases} \qquad /38/$$

Лучше всего было бы положить все $\vec{u}_\ell^{\,2}$ равными 0, однако это невозможно, потому что в общем случае, когда не все u_κ^2 равны 0, уравнение $F_\kappa^2 \dfrac{\partial F}{\partial \rho_\kappa} = 0$ не имеет столько функционально независимых решений, чтобы преобразование /31/ было однозначным и обратимым. В частности, если k пробегает конечное число K значений, а κ $- K-1$ значений, то ясно, что уравнение $F_\kappa^2 \dfrac{\partial F}{\partial \rho_\kappa} = 0$ будет иметь только $K-2$ функционально независимых решений, а условие невырожденности преобразования /31/ требует $K-1$ таких решений. Поэтому мы положим

$$\bar{u}_1^2 = F_1^2 = 0,\quad \bar{u}_2^2 = F_2^2 = 1,\quad \bar{u}_\mu^2 = F_\mu^2 = 0\quad (\mu = 3,4,\ldots), \qquad /39/$$

так как по предположению не все u_λ^2 равны 0, и, следовательно, функции F_λ^2 можно определить так, чтобы все эти равенства имели место. Что касается компоненты F_1^2, то из /35/ ясно, что требование обратимости преобразования /31/ не накладывает никаких ограничений на нее и, безусловно, мы можем положить

$u_1^2 = F_1^2 = 0$. Подставляя в /36/, мы получаем $\dfrac{\partial}{\partial \rho_2} F_\ell^2 = 0$ и, следовательно,

$$u_\ell^3(\rho\ \ ) = F_\ell^3(\rho\ \ ) = G_\ell^3(\rho_\mu)\quad (\mu = 3,4,\ldots).$$

Некоторая свобода в выборе переменных ρ_k все еще остается, и мы ее используем, чтобы упростить и $u_\ell^3(\rho_\kappa) = G_\ell^3(\rho_\mu)$, конечно, сохраняя /34/ и /39/. Ввиду /34/, второе уравнение /31/ дает

$$\frac{\partial}{\partial \rho_2} \bar{\rho}_1 = 0,\quad \frac{\partial}{\partial \rho_2} \bar{\rho}_2 = 0,\quad \frac{\partial}{\partial \rho_2} \bar{\rho}_\mu = 0.$$

Подставляем /37/ и интегрируем. Находим

$$\bar{\rho}_1 = \rho_1 + F_1 = \rho_1 + G_1(\rho_\mu),\ \bar{\rho}_2 = F_2 = \rho_2 + G_2(\rho_\mu),\ \bar{\rho}_\nu = F_\nu = G_\nu(\rho_\mu).$$
$$(\mu,\nu = 3,4,\ldots).$$

Тогда третье уравнение /32/ сводится к

$$\vec{u}_\ell^{\,3} = u_k^3 \frac{\partial \bar{\rho}_\ell}{\partial \rho_k} = \begin{cases} u_1^3 + u_\mu^3 \dfrac{\partial G_1}{\partial \rho_\mu} = G_1^3 + G_\mu^3 \dfrac{\partial G_1}{\partial \rho_\mu} & \text{при } \ell = 1, \\[2ex] u_2^3 + u_\mu^3 \dfrac{\partial G_2}{\partial \rho_\mu} = G_2^3 + G_\mu^3 \dfrac{\partial G_2}{\partial \rho_\mu} & \text{при } \ell = 2, \\[2ex] u_\mu^3 \dfrac{\partial G_\nu}{\partial \rho_\mu} = G_\mu^3 \dfrac{\partial G_\nu}{\partial \rho_\mu} & \text{при } \ell = \nu = 3,4,\ldots \end{cases} \qquad /40/$$

Исходя из тех же самых соображений, как при рассмотрении /38/, мы получаем, что можно положить

$$\vec{u}_1^{\,3} = \vec{u}_2^{\,3} = 0,\quad \vec{u}_3^{\,3} = 1,\quad \vec{u}_\vartheta = 0\ (\vartheta = 4,5,\ldots), \qquad /41/$$

чем редукция векторов $\vec{u}_k$ закончена.

6. Нахождение функции $\vec{v}$

Мы нашли, что без ограничения общности можем пользоваться значениями /34/, /39/ и /41/ для $\vec{u}_k$:

$$\vec{u}_1 = (1,0,0),\quad \vec{u}_2 = (0,1,0),\quad \vec{u}_3 = (0,0,1),\quad \vec{u}_\vartheta = 0\ (\vartheta = 4,5,\ldots).$$

Тогда уравнение /23/ сводится к

$$\vec{u}_a \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial \rho_a} + i\vec{v} \times \vec{v} = 0. \qquad /42/$$

Ввиду примечания к уравнению /19/ это уравнение записывается в развернутом виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v^3}{\partial \rho_2} - \frac{\partial v^2}{\partial \rho_3} + i(v^2 v^3 - v^3 v^2) = 0, \\ &\frac{\partial v^1}{\partial \rho_3} - \frac{\partial v^3}{\partial \rho_1} + i(v^3 v^1 - v^1 v^3) = 0, \\ &\frac{\partial v^2}{\partial \rho_1} - \frac{\partial v^1}{\partial \rho_2} + i(v^1 v^2 - v^2 v^1) = 0. \end{aligned} \qquad /43/$$

или еще в виде

$$\operatorname{rot}_{\rho}\vec{v}(\rho',\rho,\sigma')+i\sum_{\tau'}\vec{v}(\rho',\rho,\tau')\times\vec{v}(\tau',\rho,\sigma'), \qquad /44/$$

где $\operatorname{rot}_{\rho}$ обозначает вихрь в пространстве переменных ρ_1, ρ_2, ρ_3.

Остальные аргументы ρ_{ν} в явном виде в /43/ не входят, но все равно $\vec{v}$ от них может зависеть, так что все произвольные элементы /константы и функции/, которые появятся в общем решении этого уравнения, будут зависеть произвольным образом и от ρ_{ν}.

Мы покажем, что можно выбрать произвольно v^1, $v^2_{\rho=c}$ и $v^3_{\rho_1=c_1,\rho_2=c_2}$ при любых значениях остальных аргументов, чем решение уравнения /43/ или, что все равно, /44/ однозначно определяется. Возьмем дивергенцию от /44/. Получаем

$$\vec{v}\cdot\operatorname{rot}_{\rho}\vec{v}-\operatorname{rot}_{\rho}\vec{v}\cdot\vec{v}=0. \qquad /45/$$

Если здесь вместо $\operatorname{rot}_{\rho}\vec{v}$ согласно /44/ подставим $-i\vec{v}\times\vec{v}$, получаем матричное тождество

$$\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{v})-(\vec{v}\times\vec{v})\cdot\vec{v}=0. \qquad /46/$$

Это показывает, что условие полной интегрируемости удовлетворено. Обратным путем получаем, что если второе и третье уравнения /43/ имеют место при любых ρ_k, а первое – при некотором заданном значении ρ_1, то производная левого его члена будет равняться 0 при том же значении ρ_1. На самом деле, при указанных предположениях из тождества /46/ следует /45/. Отсюда получаем, что дивергенция левого члена /44/, т.е. сумма производных его компонент по ρ_1, ρ_2 и ρ_3 равна 0. Но поскольку задано, что последние два уравнения имеют место при любом ρ_k, из этого следует, что производная по ρ_1 первого уравнения /43/ тоже должна быть ноль, чем и доказано утверждение.

Так как v^1, $v^2_{\rho_1=c_1}$ и $v^3_{\rho_1=c_1,\rho_2=c_2}$ при всех значениях остальных аргументов заданны из первого уравнения /43/ при $\rho_1=c_1$ мы можем определить $v^3_{\rho_1=c_1}$ так, чтобы это уравнение имело место при $\rho_1=c_1$ – дело сводится к решению одного обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка /или, точнее, к одной системе интегро-дифференциальных уравнений ввиду суммирования по τ' в /44//. После того как мы показали, что это уравнение имеет место при $\rho_1=c_1$, то по выше доказанному оно будет иметь место и при любом ρ_1. Зная v^1, $v^2_{\rho_1=c_1}$ и $v^3_{\rho_1=c_1}$, из последних двух уравнений /43/ мы получаем возможность однозначно определить v^2 и v^3 при любом ρ_1 – дело сводится к решению двух линейных неоднородных дифференциальных /или систем интегро-дифференциальных/ уравнений в обыкновенных производных, в первое из которых входит только v^2, а во второе – v^3.

7. Случаи вырождения

Разделы 5 и 6 исчерпывают общий случай, когда $K\geq 3$ и при этом среди компонент u^1, u^2_{κ} и u^3_{μ} имеется по крайней мере по одной отличной от нуля /случай A/. Если $K<3$ или в некотором из уравнений /33/, /38/, /40/ все u^1_k, u^2_{κ} или u^3_{μ} оказываются нули, получаются разные вырожденные случаи, которые можно свести к следующим трем.

Случай B – $\vec{u}_1=(1,0,0)$, $\vec{u}_2=(0,1,0)$, $\vec{u}_{\mu}=0$. Тогда уравнение /42/ сводится к

$$\frac{\partial v^3}{\partial\rho_2}+i(v^2v^3-v^3v^2)=0,\quad -\frac{\partial v^3}{\partial\rho_1}+i(v^3v^1-v^1v^3)=0, \qquad /47/$$

$$\frac{\partial v^2}{\partial\rho_1}-\frac{\partial v^1}{\partial\rho_2}+i(v^1v^2-v^2v^1)=0.$$

Сумма производных по ρ_1 и ρ_2 первых двух из этих уравнений ввиду этих самых уравнений исчезает тождественно. Следовательно, условие интегрируемости выполнено – как и в случае A мы можем взять произвольно v^1, $v^2_{\rho_1=c_1}$ и $v^3_{\rho_1=c_1,\rho_2=c_2}$. Тогда третье уравнение /47/ определяет однозначно v^2, а первые два – v^3 при всех значениях ρ.

Случай C – $\vec{u}_1=(1,0,0)$, $\vec{u}_{\kappa}=0$. Уравнение /42/ сводится к

$$v^2v^3-v^3v^2=0, \qquad /48/$$

$$-\frac{\partial v^3}{\partial\rho_1}+i(v^3v^1-v^1v^3)=0,\quad \frac{\partial v^2}{\partial\rho_1}+i(v^1v^2-v^2v^1)=0.$$

Здесь можно взять произвольно v^1, $v^2_{\rho_1=c_1}$ и $v^3_{\rho_1=c_1}$, лишь бы только $v^2_{\rho_1=c_1}$ и $v^3_{\rho_1=c_1}$ коммутировали. Тогда нетрудно проверяется, что условие интегрируемости выполнено – производные левого члена первого уравнения равны нулю, так что оно выполнено при любом ρ_1. Следовательно, второе и третье уравнения определяет однозначно v^2 и v^3 при любом ρ_1.

Случай D – все $\vec{u}_k$ равны нулю. Тогда /42/ сводится к

$$\vec{v}\times\vec{v}=0. \qquad /49/$$

Компоненты вектора $\vec{v}$ задаются тремя произвольными коммутирующими матрицами $v^{a}(\rho',\sigma')$.

8. Решение полученных уравнений

Приведенный выше анализ не только показывает, в какой мере векторы $\vec{u}_k$ и $\vec{v}$ произвольны, но также сводит нахождение $\vec{u}_k$ к четырем случаям

A, B, C, D, а нахождение $\vec{v}$ – к решению отдельных обыкновенных дифференциальных /или систем интегро-дифференциальных/ уравнений для каждой компоненты $\vec{v}$. Эта сводка не тривиальна, так как исходные уравнения /29/ и /26/ представляют собой системы нелинейных частных дифференциальных /или интегро-дифференциальных/ уравнений, в каждое из которых входят все компоненты $\vec{u}_k$ соответственно $\vec{v}$.

Все уравнения /43/, /47/, /48/ и /49/, которые мы должны решить, чтобы найти v^1, v^2 и v^3, являются линейными неоднородными обыкновенными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами и свободными членами, за исключением первого уравнения /48/ и уравнения /49/, которые просто выражают коммутативность некоторых из матриц v^1, v^2 и v^3. Общие решения этих последних уравнений просты и, чтобы их найти, мы можем взять любой набор диагональных матриц и подвергнуть их произвольному унитарному преобразованию. Что касается остальных уравнений, они все являются уравнениями типа

$$i\frac{\partial S}{\partial t} = SH - HS + H_0, \qquad /50/$$

где S – искомая, а H и H_0 –заданные эрмитовские матрицы, все зависящие от t. В нашем случае t может быть ρ_1 или ρ_2, S – v^2 или v^3, H – различные, уже известные компоненты v^1, v^2, v^3, а H_0 – их производные. Базисные векторы в конфигурационном пространстве этих операторов характеризуются значениями переменной ρ'. Чтобы решить эти уравнения, как известно из квантовой теории поля, где такие уравнения встречаются, подставляем

$$S(t) = E^{-1}(t)R(t)E(t), \qquad E(t) = Te^{i\int_{t_0}^{t} H(t)\,dt}$$

причем T указывает на то, что мы должны упорядочить по t следующее после T экспоненциальное выражение. Подставляя в /50/ мы находим

$$\frac{\partial R(t)}{\partial t} = E(t)H_0(t)E^{-1}(t),$$

и, следовательно,

$$R(t) = R_0 + \int_{t_0}^{t} E(t)H_0(t)E^{-1}(t)\,dt,$$

где R_0 –произвольная, не зависящая от t матрица. Так мы получаем общее решение уравнения /50/ в виде

$$S(t) = E^{-1}(t)\left[R_0 + \int_{t_0}^{t} E(t)H_0(t)E^{-1}(t)\,dt\right]E(t). \qquad /51/$$

Переменные ρ_β $(0 < \beta < a;\ a = 3,2,1,0$ соответственно в случаях $A, B, C, D)$ выделены по отношению к остальным компонентам ρ_ξ переменной ρ. Эти последние повсюду входят тем же самым образом, как и r' – разница только в том, что r' принимает дискретные значения, а компоненты ρ_ξ – непрерывно изменяющиеся.

Поэтому целесообразно изменить обозначения – новая переменная ρ будет объединять только ρ_β –значит, число ее компонент не больше трех, а новая переменная r' будет объединять старую переменную r' и все величины ρ_ξ –значит, она будет иметь не только дискретные, но и непрерывно изменяющиеся компоненты. После того как $\vec{u}_k$ и $\vec{v}$ найдены, следует подставить полученные выражения в /14/ и /16/, чтобы найти ψ и V. Уравнение /14/ сводится к

$$\frac{\partial\psi(\rho, r', \vec{x})}{\partial \vec{x}_\alpha} = \gamma_a^{\alpha\beta}\frac{\partial\psi(\rho, r', \vec{x})}{\partial\rho_\beta}, \qquad \gamma_a^{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{если } \alpha = \beta \leq a \\ 0 & \text{если } \alpha = \beta > a \text{ или } \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

причем суммирование по повторяющемуся индексу β подразумевается. Отсюда сразу получаем общее решение

$$\psi(\rho, r', \vec{x}) = F_a(\rho_\beta + x_\beta, r')\ (0 \leq \beta \leq a \leq 3). \qquad /52/$$

Здесь функция $F_a(x_\beta, r')$ определена при всех x_β. Согласно /24/, у нее не могут быть периоды T по отношению к x_β, которые содержатся в $D(r')$, а если $r'_1 \neq r'_2$, то $F_a(x_\beta, r'_1) \neq F_a(x_\beta, r'_2)$, хотя бы для одного x_β. Следовательно, в случаях A, B, C функция ψ зависит соответственно от 3,2 или 1 компоненты x_β и ρ_β, а в случае D она не зависит от $\vec{x}$ ни, конечно, от ρ, так как при $a = 0$ такой переменной нет. Уравнение /16/ сводится к

$$i\gamma_a^{\alpha\beta}\frac{\partial V(\rho', \rho, r', \mu, \vec{p})}{\partial\rho_\beta} + \sum_{\sigma'} v^\alpha(\rho', \rho, r', \sigma')V(\sigma', \rho, r', \mu, \vec{p}) = V(\rho', \rho, r', \mu, \vec{p})p^\alpha, \qquad /53/$$

причем v^α выбраны так, чтобы условие интегрируемости /42/ выполнялось. Решение этого интегро-дифференциального уравнения можно свести к чисто интегральному уравнению. Для этой цели мы вводим Фурье-образ Q функции V:

$$V(\rho', \rho, r', \mu, \vec{p}) = \int dy\, e^{-iy\cdot\rho}\, Q(\rho', y, r', \mu, \vec{p}), \qquad /54/$$

где y имеет компоненты y_β $(0 < \beta < a)$. Ввиду того, что ρ изменяется только в некоторой области $D(\rho', r')$, это определение не является однозначным. Чтобы устранить эту неоднозначность, без ограничения общности мы можем принять, например, что $V = 0$ повсюду вне области $D(\rho', r')$. Подстановка /54/ переводит /53/ в

$$\sum_{\sigma', z} w^\alpha(\rho', y, r', z, \sigma')Q(\sigma', z, r', \mu, \vec{p}) + \gamma_a^{\alpha\beta}y_\beta Q(\rho', y, r', \mu, \vec{p}) = Q(\rho', y, r', \mu, \vec{p})p^\alpha, \qquad /55/$$

где

$$\vec{w}(\rho', y, r', z, \sigma') = \int d\rho\, e^{i(y-z)\cdot\rho}\ \vec{v}(\rho', \rho, r', \sigma'). \qquad /56/$$

Здесь z –переменная, аналогичная y и пробегающая те же самые значения. Так вопрос о нахождении Q сводится к отысканию совместных собственных функций и соответствующих собственных значений трех операторов

$$w^{a}(\rho', y, r', z, \sigma') - \delta(y-z)\gamma^{\alpha\beta}_{a} y_{\beta} \; (a = 1,2,3). \qquad /57/$$

После того как уравнение /55/ решено, т.е. после того как мы нашли ортонормированные совместные собственные функции Q и соответствующие собственные значения $\vec{p}$ операторов /57/, по /54/ мы находим V. Имея в виду /42/ и /56/, нетрудно показать, что операторы /57/ самосопряженные и коммутирующие между собой, так что они имеют точно необходимое множество решений, чтобы сконструировать унитарную матрицу Q, а, следовательно, и V при каждом r'. Эти решения при каждом r' характеризуются параметром $\vec{p}$, пробегающим спектр собственных значений операторов /57/ и еще одним параметром μ', характеризующим в случае вырождения различные взаимно ортогональные собственные функции, соответствующие данному $\vec{p}$. Этим определяются множества P и $M'(\vec{p})$ на которых заданы $\vec{p}$ и μ' Отметим, что в случае D операторы w^a как и операторы /57/, сводятся к v^a, а Q сводится к V, так что /55/ сводится к

$$\sum_{\sigma} \vec{v}(\rho', r', \sigma') V(\sigma', r', \mu', \vec{p}) = V(\rho', r', \mu', \vec{p})\vec{p}. \qquad /58/$$

Обозначим через $Q_{r'}(\vec{\rho}', \vec{\mu}', \vec{p})$ решения уравнения /55/ при каждом заданном r'. Они, а следовательно, согласно /54/ и функции $V(\vec{\rho}', \vec{\rho}, \vec{\mu}', \vec{p})$, образуют полные ортонормированные системы векторов в пространстве H_r, соответствующем заданному значению r'. Все эти пространства ортогональны друг другу, потому что, как видно из /5/ и из определения переменных ρ', ρ и r', они соответствуют различным собственным значениям самосопряженных операторов $\phi(\vec{x})$. Следовательно, чтобы получить унитарную матрицу $V(r, m)$ достаточно положить

$$V(r, m) = V(\rho', \rho, r', m', \mu', \vec{p}) = \delta(r' - m') V_{r'}(\rho', \rho, \mu', \vec{p}), \qquad /59/$$

где переменная m' аналогична r' и пробегает те же самые значения как r', так что $m = (m', \mu', \vec{p})$.

Отметим в заключение, что базис B, в котором мы нашли элементы матрицы $\phi(\vec{x})$, не произволен – в нем представление группы трансляций $U(\vec{a})$ имеет диагональный вид. Но ввиду того, что различным m могут соответствовать одинаковые $\vec{p}_m$, ясно, что этим условием базис B однозначно не определяется. Следовательно, между найденными полями $\phi(\vec{x})$ могут быть и эквивалентными.Что касается разложимости найденных решений, они, наверно, разложимы, так как операторы $\phi(\vec{x})$ коммутируют и, следовательно, их все можно привести к диагональному виду, а решение, которое мы нашли в общем случае, не диагонально. Однако неразложимые в этом смысле решений неинтересны в задачах рассматриваемого нами типа, потому что они не инвариантны по отношению к /3/ – при трансляциях они будут переходить одно в другое. Поэтому мы введем понятие полной разложимости, требующее, чтобы прямая сумма, в виде которой представляется одно разложимое решение, сохранялась при любой трансляции /3/. Полная разложимость требует разложения не только всех матриц $\phi(\vec{x})$, но и всех $U(\vec{a})$ или, все равно, решение $\phi(\vec{x})$ будет вполне разложимо, если имеется матрица, не кратная единичной, которая коммутирует не только со всеми $\phi(\vec{x})$, но и со всеми $U(\vec{a})$. Наличие множителя $\delta(r' - m')$ в /59/, ввиду того, что матрицы $\delta(r-s)\psi(r, \vec{x})$ и $U(\vec{a})$ диагональны, показывает, что если m' принимает больше чем одно значение, то поле $\phi(\vec{x})$ вполне разложимо – отдельные клетки матрицы $\phi(\vec{x})$, а также и матрицы $U(\vec{a})$, характеризуемые значениями m' и n' /n' – параметр, аналогичный m' и пробегающий те же самые значения/, равны нулю при $m' \neq n'$. Отбрасывая решения, о которых ясно, что они вполне разложимы, мы дальше не будем писать переменные m' и n', а также и r' и s', так как они не изменяются. Этим, конечно, вопрос о полной разложимости и об эквивалентности не исчерпан – мы не можем утверждать, что все оставшиеся решения не эквивалентны и не вполне разложимы. Этим вопросом мы здесь не будем заниматься, хотя он и важен – полное использование этих двух условий, наверно, сведет общее решение к еще более простой форме.

9. Построение операторного поля $\phi(\vec{x})$

Мы показали, что операторное поле $\phi(\vec{x})$, удовлетворяющее условиям /1/–/3/, выражается через функции $\psi(\rho, \vec{x})$ и $V(\rho', \rho, \mu', \vec{p})$ которые со своей стороны находятся при помощи $\vec{u}(\rho)$ и $\vec{v}(\rho', \rho, \sigma')$, и нашли уравнения, которым должны удовлетворять все эти функции. В заключение покажем, какие операции в каком порядке нужно выполнить, чтобы практически построить искомое поле $\phi(\vec{x})$. Тем самым будет показано, что найденные уравнения являются не только необходимыми, но и достаточными условиями, характеризующими поле $\phi(\vec{x})$ и функции $\psi, V, \vec{u}_k$ и $\vec{v}$. При этом, как уже договорено, мы не будем писать переменные m', n', r' s'. Построение сводится к следующим операциям:

1. Выбираем переменные ρ' и ρ, т.е. выбираем обозначения для их компонент и указываем множество D', в котором меняется ρ' и область $D(\rho')$,

с которой изменяется ρ при заданном ρ'. При этом $a(\rho')$ – число компонент ρ не больше 3. Находим так же область D и множество $D'(\rho)$ по которым изменяются ρ и ρ' при заданном ρ.

2. Выбираем произвольные функции, которые содержит общее решение уравнений /43/, /47/, /48/ или /49/ в зависимости от числа компонент a. Именно:

A. $a = 3$. Произвольными являются $v^1 = v^1(\rho', \rho_1, \rho_2, \rho_3, \sigma')$, $v^2_{\rho_1=c_1} = v^2(\rho', \rho_2, \rho_3, \sigma')$ и $v^3_{\rho_1=c_1, \rho_2=c_2} = v^3(\rho', \rho_3, \sigma')$.

B. $a = 2$. Произвольными являются $v^1 = v^1(\rho', \rho_1, \rho_2, \sigma')$, $v^2_{\rho_1=c_1} = v^2(\rho', \rho_2, \sigma')$ и $v^3_{\rho_1=c_1, \rho_2=c_2} = v^3(\rho', \sigma')$.

C. $a = 1$. Произвольными являются $v^1 = v^1(\rho', \rho_1, \sigma')$, $v^2_{\rho_1=c_1} = v^2(\rho', \sigma')$ и $v^3_{\rho_1=c_1} = v^3(\rho', \sigma')$, причем, $v^2_{\rho_1=c_1}$ и $v^3_{\rho_1=c_1}$ коммутируют.

$a = 0$. Произвольными являются все $v^a = v^a(\rho', \sigma')$, и все они коммутируют.

При этом все эти v^a самосопряженны по ρ' и σ'.

3. Находим все остальные компоненты $\vec{v}$ при всех остальных значениях переменной ρ, используя:

A. Первое уравнение /43/ при $\rho_1 = c_1$, чтобы определить $v^3_{\rho_1=c_1}$ и остальные два уравнения /43/, чтобы определить v^2 и v^3 при любом ρ_1.

B. Третье уравнение /47/, чтобы определить v^2 и первые два, чтобы определить v^3.

C. Второе и третье уравнения /48/, чтобы определить v^2 и v^3.

При этом ρ изменяется в D, а ρ' – в $D'(\rho)$.

4. Выбираем функцию $F_a(x_\beta)$, удовлетворяющую требованиям, указанным при выводе /52/, и при помощи этого уравнения определяем $\psi(\rho, \vec{x}) = F_a(\rho_\beta + x_\beta)$ $(0 \leq \beta \leq a)$.

5. По /56/ определяем $\vec{w}$. После этого по /55/ находим совместные ортонормированные функции Q и соответствующие собственные значения $\vec{p}$ операторов /57/. Тем самым определяется множество P возможных значений переменной $\vec{p}$ как спектр операторов /57/ и множество $M'(\vec{p})$ возможных значений переменной μ'.

6. После того как ψ и V найдены, подставляем их в /5/ и находим элементы $\phi(\mu', \vec{p}, \vec{x}, \vec{q}, \nu')$ искомого операторного поля $\phi(\vec{x})$ в базисе B.

Различные найденные нами решения $\phi(\vec{x})$ характеризуются а/выбором множеств D' и $D(\rho')$, указанных при операции 1; в/ выбором функций v^a, указанных при операции 2; с/ выбором функции $F_a(x_\beta)$, указанной при операции 4; d /выбором ортонормированных собственных векторов операторов /57/, соответствующих каждому $\vec{p}$.

Каждое из этих решений характеризуется параметром $r' - \phi(\vec{x}) = \phi_{r'}(\vec{x})$. Чтобы найти самое общее решение, очевидно, мы должны выбрать еще унитарную матрицу $T(m', r')$ и положить

$$\phi(\vec{x}) = \phi(m', \mu', \vec{p}, \vec{x}, \vec{q}, \nu', n') = \sum_{r'} T(m', r')\, \phi_{r'}(\mu', \vec{p}, \vec{x}, \vec{q}, \nu')\, T^{-1}(r', n').$$

Считаю приятным долгом выразить свою глубокую благодарность акад. Н.Н. Боголюбову и проф. А.А. Логунову за интерес к работе, а также д-ру И.Т. Тодорову за исключительно полезные дискуссии и критические замечания по ходу работы и д-ру Черникову Н.А. за стимулирующие беседы и помощь при ее оформлении.

Литература

1. S.S.Schweber. An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory. Peterson and Co. New York (1961).
2. Н.Н. Боголюбов и Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. ГИТТЛ, Москва, 1957.
3. Г. Вентцель. Введение в квантовую теорию волновых полей. ГИТТЛ, Москва, 1947.
4. L.Schwartz. Théorie des distributions, T.I.Hermann Editeurs, Paris (1950).

Рукопись поступила в издательский отдел
22 октября 1963 г.