



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

И.П. Неद्याлков, Г.И. Пенчев

P - 1445

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ
НЕРЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ЛОУ

Дубна 1963

И.П. Недялков, Г.И. Пенчев

Р - 1445

2163/1 чг.
О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ
НЕРЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ЛОУ

Дубна 1963

§ 1. В в е д е н и е

В современных исследованиях при численном решении уравнений Лоу применяются два метода: N/D -метод^{/3/} и родственный ему метод Чу-Лоу-Зальцмана^{/2/}. Для обоих методов характерно то, что сначала уравнения Лоу регуляризуются, а потом решаются итеративным путем. Недавно предложенный алгебраический метод^{/8/} испробован только на модельных уравнениях.

В теории сингулярных интегральных уравнений^{/8/} подчеркнуто, что решения регуляризованных уравнений могут не соответствовать решениям исходных уравнений и поэтому в каждом случае необходимо проводить тщательное исследование. Так же обстоит дело и с вышеупомянутыми двумя методами. Из-за того, что знаменатели $D_\alpha(z)$ и $h_\alpha(z)$ могут иметь нули в комплексной плоскости, иногда получаются решения, которые не являются решениями первоначальных уравнений. Так как в практических расчетах не проводится исследование и нахождение нулей знаменателей, то применение этих двух методов связано с некоторым риском.

Цель настоящей работы - дать численный метод решения уравнений Лоу, свободный от недостатков N/D метода и метода Чу-Лоу-Зальцмана. Как и в случае с линейными сингулярными интегральными уравнениями^{/9, 10, 11/}, эту цель мы достигли путем непосредственного решения исходных уравнений, без применения регуляризации. Из-за наличия нелинейности в интегральных уравнениях, трудность численного решения намного больше, чем в работах^{/9, 10, 11/}.

Так как различия в отдельных видах уравнений несущественны с точки зрения метода решения, мы все время будем иметь в виду один специальный вид уравнений Лоу - уравнение Чу и Лоу^{/1/}, при помощи которого описывается P -волна пион-пионного рассеяния, при предположении, что нуклон фиксирован.

В § 2 сделана замена переменных и выведены основные формулы. В § 3 и 4 даются некоторые необходимые разъяснения относительно применения метода последовательных приближений при нахождении адиабатического и резонансного решений. В § 5 приведены некоторые численные результаты, полученные нами на электронной вычислительной машине в вычислительном центре ОИЯИ /Дубна/. В заключение указываются преимущества и недостатки предлагаемого метода.

§ 2. Преобразование уравнения

Уравнение Чу и Лоу можно записать в виде ^{/2/}:

$$h_a(z) = \frac{\lambda_a}{z} + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty d\omega' p'^3(\omega') v^2(p') \left[\frac{|h_a(\omega')|^2}{\omega' - z} + \sum_{\beta=1}^3 A_{a\beta} \frac{|h_\beta(\omega')|^2}{\omega' + z} \right], \quad (1.1)$$

где $h_a(z)$ — неизвестные функции, аналитические в плоскости z с разрезами $(-\infty, -1)$ и $(+1, +\infty)$ за исключением точки $z = 0$, где они имеют простые полюса с вычетами λ_a ; $z \rightarrow \omega + i\epsilon$ для $\omega > 1$, $z \rightarrow \omega - i\epsilon$ для $\omega < -1$,

$$(\lambda_a) = \frac{2}{3} f^2 \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ +2 \end{pmatrix}, \quad (A_{a\beta}) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 16 \\ -2 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

$p = (\omega^2 - 1)^{1/2}$ — импульс пиона в системе центра инерции, ω — полная энергия пиона в той же системе, f^2 — константа связи, $v(p) = \frac{1}{1 + p^2 a^2}$ — функция обрезания ($a = 0,27$), причем \hbar, c и масса покоя пиона положены равными единице, а a принимает значения:

$$a = 1 \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$a = 2 \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$a = 3 \rightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right).$$

Первый индекс в скобках — полный изотопический спин системы пион-нуклон, второй индекс — полный момент той же системы.

Из (1.1) и (1.2) следуют непосредственно некоторые свойства функций $h_a(\omega)$:

$$\operatorname{Re} h_a(\omega) = \frac{\lambda_a}{\omega} + \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_1^\infty d\omega' p'^3 v^2 \frac{|h_a(\omega')|^2}{\omega' - \omega} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 d\omega' p'^3 v^2 \frac{\sum A_{a\beta} |h_\beta(\omega')|^2}{\omega' + \omega} \quad (2.1)$$

$$\operatorname{Im} h_a(\omega) = p^3 v^2 |h_a(\omega)|^2 \geq 0 \quad (2.2)$$

$$h_a(-\omega) = \sum_{\beta=1}^3 A_{a\beta} h_\beta(\omega) \quad \text{для всех } \omega. \quad (3)$$

Функции $h_a(\omega)$ связаны с амплитудой рассеяния $\delta_a(\omega)$ P -волны при помощи соотношения

$$h_a(\omega) = \frac{\exp[i\delta_a(\omega)] \sin \delta_a(\omega)}{p^3(\omega) \cdot v^2(p)} \quad \text{при } \omega > 1. \quad (4)$$

Для нахождения функций $\operatorname{Re} h_a(\omega)$ и $\operatorname{Im} h_a(\omega)$ ($\omega > 1$) необходимо решить совместно уравнения (2.1) и (2.2), получая таким образом систему из трех нелинейных сингулярных интегральных уравнений и трех алгебраических уравнений. Мы воспользуемся соотношением ^{/4/}:

$$\frac{\sin \delta_a(\omega) \cos \delta_a}{p^3 v^2} = \frac{\lambda_a}{\omega} + \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_1^\infty d\omega' \frac{\sin^2 \delta_a(\omega')}{(\omega' - \omega) p'^3 v^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 d\omega' \frac{\sum A_{a\beta} \sin^2 \delta_\beta(\omega')}{(\omega' + \omega) p'^3 v^2(p')}. \quad (5)$$

Введем конечные пределы интегрирования путем замены переменных

$$\omega = \frac{1}{t}, \quad \omega' = \frac{1}{r}. \quad (6)$$

Для простоты, после замены переменных не будем вводить новые обозначения для функций h_a , δ_a , v и p .

Подставляя (6) в (5), получим систему

$$\frac{\sin \delta_a(t) \cos \delta_a(t) t^2}{(1-t^2)^{3/2} \cdot v^2(t)} =$$

$$= \lambda_a - \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_0^1 dr \frac{\sin^2 \delta_a(r) r^2}{(1-r^2)^{3/2} \cdot v^2(r) (r-t)} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 dr \frac{\sum A_{a\beta} \sin^2 \delta_\beta(r) r^2}{(1-r^2)^{3/2} \cdot v^2(r+t)}.$$

Ее можно записать следующим образом:

$$\sqrt{X_a(t)} [L(t) - X_a(t)] = \lambda_a - \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_0^1 dr \frac{X_a(r)}{r-t} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 dr \frac{\sum A_{a\beta} X_\beta(r)}{r+t}, \quad (8.1)$$

где

$$X_a(t) = \frac{\sin^2 \delta_a(t) \cdot t^2}{(1-t^2)^{3/2} \cdot v^2(t)}, \quad L(t) = \frac{t^2}{(1-t^2)^{3/2} \cdot v^2(t)} \quad (9)$$

Если обозначим правую часть равенства (8.1) через $Q_a(t)$, очевидно, что

$$X_a(t) = \frac{L(t) \pm \sqrt{L^2(t) - 4Q_a^2(t)}}{2}. \quad (8.2)$$

Наконец, умножая (7) на $t g \delta_a(t)$ и пользуясь обозначениями (9), получим:

$$X_a(t) = t g \delta_a(t) \left[\lambda_a - \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_0^1 dr \frac{X_a(r)}{r-t} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 dr \frac{\sum A_{a\beta} X_\beta(r)}{r+t} \right]. \quad (10)$$

При нахождении адиабатического решения знак перед квадратным корнем в (8.2) должен быть отрицательным, а для третьей фазы ($a = 3$) резонансного решения доказывается, что начиная с минуса, нужно четное число раз изменить этот знак ^{/4/}. В рассматриваемом нами решении мы меняем этот знак два раза.

В работе ^{/5/} показано, что для другого вида уравнений типа Лоу — уравнения,

описывающего пион-пионное рассеяние, возможны три типа решений с различным асимптотическим поведением при больших энергиях ($\frac{1}{\ln \omega}, \omega^{-1}$ и ω^{-2}). Мы будем искать решения, которые в бесконечности стремятся к нулю.

§ 3. Адиабатическое решение

Отметим следующий факт. Вполне очевидно, что системы (8) и (10) эквивалентны, т.е. если вычисления производятся с достаточно большой точностью, полученные решения будут одни и те же, независимо, какой из этих двух систем мы пользуемся. Однако из-за ограничений в точности, эти две системы могут оказаться не одинаково эффективными. Например, оказывается, что с той точностью, с которой проведены вычисления в этой работе, нельзя получить адиабатическое решение задачи при $f^2 \geq 0,05$ потому что около максимума функции $X_1(t)$ подкоренная величина в (8.2) становится отрицательной. Поэтому адиабатическое решение будем искать, решая систему (10) и пользуясь соотношением (9.1). Для применения метода последовательных приближений необходимо только задать значение константы связи f^2 и выбрать первые приближения для амплитуд δ_α ($\alpha = 1, 2, 3$). Так как итерационный процесс сходится тем быстрее, чем удачнее первое приближение, то обычно применяется программа, которая может не давать очень быстрой сходимости, но ее преимущество заключается в систематичности; кроме того, физически она соответствует известному представлению об адиабатическом включении взаимодействия, состоящем в том, что при $f^2 = 0$ все сдвиги фаз тождественно равны нулю. Тогда первое приближение при малых f^2 можно получить с помощью формул (8.2), полагая $Q_\alpha = \lambda_\alpha$. Следующие приближения, при выбранном f^2 , будем получать, решая систему (10). Потом, меняя f^2 на достаточно малое приращение Δf^2 , при любом значении f^2 , в качестве нулевого приближения, будем использовать полученное решение, соответствующее предыдущему f^2 .

§ 4. Резонансное решение

Наши исследования показали, что адиабатическое решение не согласуется с экспериментом даже качественно. Поэтому в этой работе мы ставим перед собой задачу изучить и резонансные решения. Но поскольку может существовать бесконечно много таких решений, мы будем искать из этих решений такое, которое близко к результатам эксперимента. Это означает, что мы должны получить решение, в котором первые две фазы $/\alpha = 1,2/$ малы по сравнению с третьей фазой, для которой существует резонанс. Используемая нами программа при получении адиабатического решения непригодна для отыскания резонансного решения. При данном значении константы связи в качестве первого приближения амплитуду δ_1 и δ_2 можно взять $\delta_1(t) = 0$ и $\delta_2 = 0$. Первое приближение для третьей фазы получим из формулы

$$\cot \delta_3(\omega) = \frac{3}{4f_0^2} \cdot \frac{\omega^*(\omega_0 - \omega^*)}{\omega_0 \cdot p^3(\omega) v^2(p)} \quad (11)$$

где $\omega_0 = 2,17$, $f_0^2 = 0,087$, $p = \sqrt{\omega^2 - 1}$, $M = 6,67$ - масса нуклона, $\omega^* = \omega + \sqrt{\omega^2 + M^2 - 1} - M$

Последняя формула, как показано в работе Лейсона^{/7/}, дает хорошее совпадение с результатами, полученными для δ_3 экспериментальным путем.

Как уже упомянуто в § 3, системы (8) и (10) могут оказаться не одинаково эффективными. Особенно сильно это проявляется при нахождении резонансного решения. Сделанные нами численные расчеты на машине показали, что итерационным путем невозможно получить резонансное решение, пользуясь уравнениями (8.1) и (8.2). Мы уже отметили, что для первых двух фаз надо взять знак минус перед квадратным корнем, а для δ_3 , из-за наличия резонанса, необходимо два раза менять знак. Оказывается, что в тех местах, где происходит смена знака (для $t = 0,4$ и $t = 0,57$), появляются скачки, которые нарушают непрерывность решения. Уравнения (10) к резонансному решению тоже неприменимы, потому что они содержат $\lg \delta_\alpha$, а для $t = 0,5$ ($\omega = 2$) $\delta_3 = \frac{\pi}{2}$. Поэтому мы решили пользоваться комбинированным методом, который заключается в следующем: в начале интервала, до $t = 0,45$, вычисления производятся по формулам (10) и (9.1); в середине интервала, от $t = 0,45$ до $t = 0,55$, - по формулам (8.1), (8.2) и (9), взяв в (8.2) знак минус для δ_1 и δ_2 и знак плюс для δ_3 ; в конце интервала - снова по формулам (10) и (9.1). Таким образом устранены все недостатки системы (8) и (10). В процессе вычислений, однако, оказалось, что необходимо сглаживать искусственным образом функцию δ_3 в тех местах, где делается описанная выше замена уравнений, ибо с увеличением числа итераций в этих точках ($t = 0,45$ и $t = 0,55$) постепенно появляется разрыв.

§ 5. Численные результаты

По описанному в §§ 2, 3, 4 методу были выполнены численные расчеты на электронной вычислительной машине. Интервал от 0 до 1 для t разбивался на 100 подынтервалов. Кроме того, для улучшения точности, интегралы вычислялись с автоматическим выбором шага; в точках, отличных от выбранных узлов, делалась интерполяция. Интегралы считались с относительной точностью $5 \cdot 10^{-4}$, а итерации продолжались до тех пор, пока разница между двумя последовательными приближениями по модулю не окажется меньше, чем $5 \cdot 10^{-3}$. На один полный цикл затрачивалось около пяти минут машинного времени.

При нахождении адиабатического решения константу связи меняли через $\Delta f = 0,01$. Итерации сходились для $f \leq 0,07$. При этом с увеличением f^2 число

итераций увеличивалось, начиная с семи итераций, для $f^2 = 0,01$, и кончая двадцатью одной - для $f^2 = 0,07$. Необходимо отметить, что для $f^2 = 0,07$ наблюдалась такая картина: до тринадцатой итерации процесс сходился нормально, с четырнадцатой по восемнадцатую в значении δ_1 появлялись два пика, для $t = 0,14$ и $t = 0,22$, потом они сливались в один, для $t = 0,18$, и результат двадцати второй итерации являлся решением задачи. При продолжении итерационного процесса для $f^2 = 0,07$ повторялось тоже самое, и, как следовало ожидать, при $f^2 = 0,08$ последовательные приближения уже не сходились.

Для всех полученных функций мы делали проверку, действительно ли они являются решениями поставленной задачи. Оказалось, что для адиабатического случая найденные нами решения удовлетворяют перекрестному соотношению (3) с точностью 0,01%, а для резонансного - около 0,1%.

Ниже приводятся некоторые из этих решений для различных значений константы связи. На рис. 1 нанесены $\delta(\omega)$ ($\alpha = 1, 2, 3$) в градусах для адиабатического случая, на рис. 2 - $\delta_1(\omega)$ и $\delta_2^{\alpha}(\omega)$ - резонансного решения, а $\delta_3(\omega)$ того же решения дается в виде таблицы.

8. З а к л ю ч е н и е

Исследования показали, что предлагаемый в этой работе метод прямого решения нерегуляризованных уравнений Лоу удобен для практического применения. Этим методом можно считать как адиабатические, так и резонансные решения. Итерационный процесс сходится в несколько раз медленнее, чем при N/D - методе или при методе Чу-Лоу-Зальцмана. Тем не менее, прямое решение нерегуляризованных уравнений следует предпочесть, так как в случаях, интересных с физической точки зрения, нет гарантий, что решения, полученные при помощи N/D метода или метода Чу-Лоу-Зальцмана, являются решениями исходных уравнений. По нашему мнению, этот недостаток является причиной неправильного асимптотического поведения функции $\delta_2(\omega)$ (см. работу ^{12/}).

Л и т е р а т у р а

1. G.F.Chew and F.E.Low. Phys. Rev. 101, 1570 (1956).
2. G.Salzman and Salzman. Phys. Rev. 108, 1619, 467 (1957).
3. G.F.Chew and S.Mandelstam. Phys. Rev. 119, 467 (1960)
4. Р.Денчев. Препринт ОИЯИ Р-901.

5. А.В.Ефремов и др., Препринт ОИЯИ Д-757
6. П.Бырнев, В.Мешеряков, И.П.Недялков. Препринт ОИЯИ Р-949
7. W.M.Layson., preprint 896, 168. (1961).
8. Н.И. Мусхелишвили. "Сингулярные интегральные уравнения" Физматгиз 1962 г.
9. В.В.Иванов. ДАН, т.110 стр. 15, 1958 г.
10. В.В.Иванов. ДАН т.111, стр. 993, 1958 г.
11. И.Д.Софронов. ДАН т. 111 стр. 37, 1957 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 октября 1963 г.

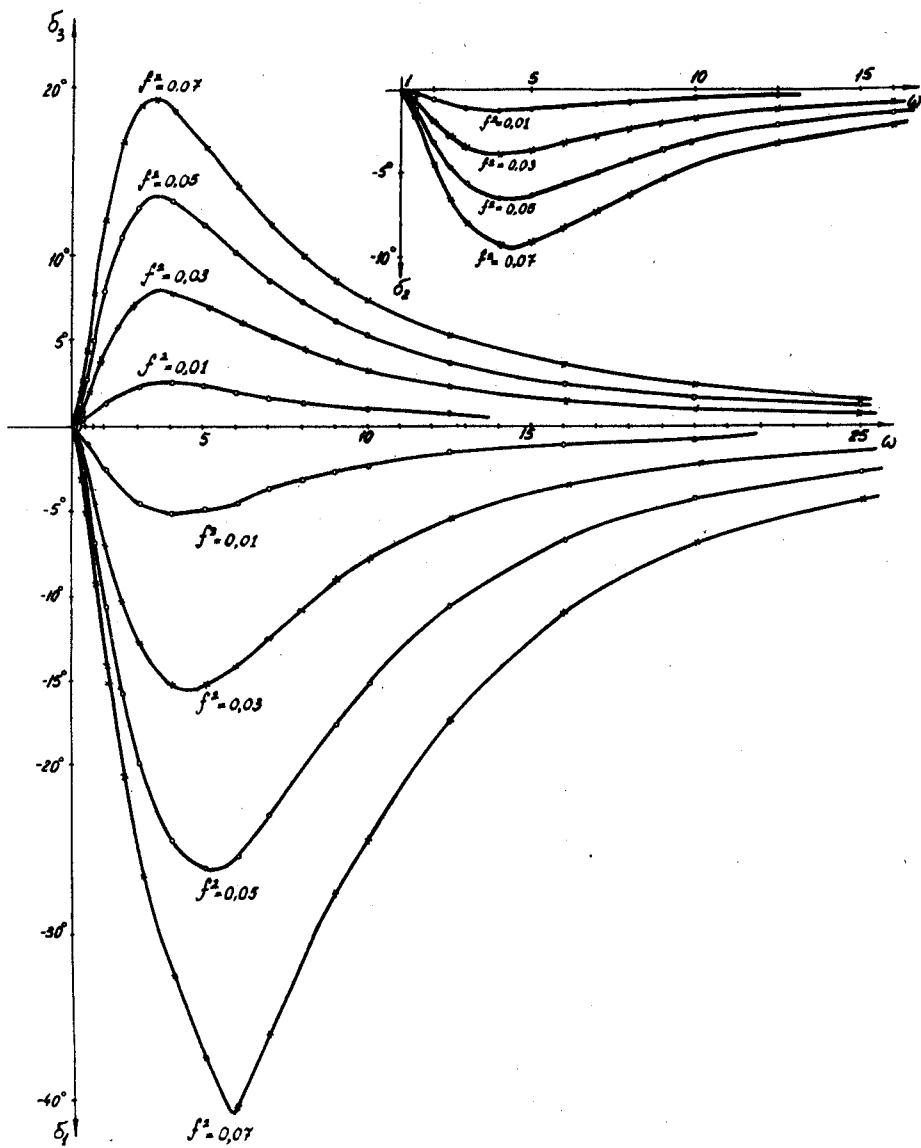


Рис. 1.

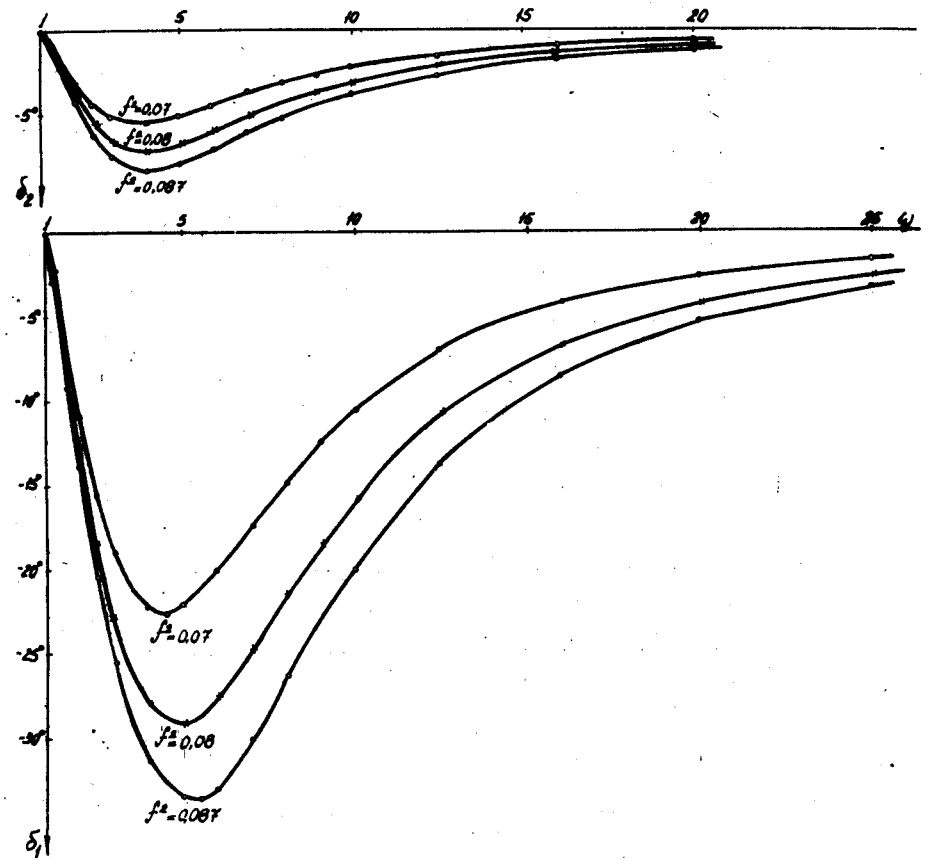


Рис. 2.

ω	$\delta_3(\omega)$ для $f^2 = 0,07$	$\delta_3(\omega)$ для $f^2 = 0,08$	$\delta_3(\omega)$ для $f^2 = 0,087$
1	0	0	0
1.11	1°09'	1°12'	1°18'
1.25	4°25'	4°34'	4°54'
1.43	12°09'	12°18'	13°04'
1.67	34°16'	33°21'	32°44'
2	97°02'	96°18'	94°05'
2.5	141°32'	147°34'	145°44'
3	157°12'	164°46'	165°43'
4	170°56'	178°06'	180°26'
5	176°57'	182°55'	185°05'
7	180°56'	184°40'	186°12'
10	181°38'	183°39'	184°39'
20	180°45'	181°21'	181°41'