ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М. Углирж

Р-1443

ЗАМЕЧАНИЯ К ПРОБЛЕМЕ ГЕОМЕТРИЗАЦИИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Дубна 1963

М. Углирж

Р-1443

ЗАМЕЧАНИЯ К ПРОБЛЕМЕ ГЕОМЕТРИЗАЦИИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Направлено в Acta Physica Polonica

Дубна 1963

Введение

В последние годы физики снова начали изучать проблему инвариантности основных законов физики при конформных преобразованиях и вытекающие из нее физические следствия.

Например, в работе [1] приводится краткий исторический обзор и список некоторых работ на эту тему. Объясняется связь между конформно-метрическом преобразованием

$$g_{ij} \to g^{c}_{ij} = \sigma(x) g_{ij}$$

и 15-параметрической группой Ли C_0, здесь называемой "ограниченной (*restricted*) группой конформных преобразований", введенной Куннингемом [2] и Бэйтменом [3]. Эти авторы показали, что уравнения Максвелла инвариантны при преобразованиях группы C_0, содержащей однородную собственную группу Лоренца, пространственно-временные смещения, постоянную дилатацию (или масштабное преобразование) и так называемые преобразования ускорения. Группа C_0 является подгруппой группы C, которая содержит все метрически-конформные преобразования:

$$g_{ij} \to g^{c}_{ij}$$

и все координатиые преобразования.

В работе [1] показана инвариантность уравнений Максвелла и законов сохранения для электромагнитного поля при преобразованиях группы C. Но уравнения Лоренца инвариантны только при предположении, что масса покоя электрона преобразуется при конформных преобразованиях следующим образом:

$$m \to m_c = \frac{m}{\sqrt{\sigma(x)}} .$$

Физические причины такого поведения массы покоя иллюстрируются авторами [1] в частном случае: ускорение эквивалентно введению постоянного однородного гравитационного поля. Масса покоя частицы в гравитационном поле изменится следующим образом:

$$m \to m_c = m + \frac{m g h(x)}{c^2} = \frac{m}{1 + \frac{g h(x)}{c^2}} ,$$

т.е. так же, как в случае конформной инвариантности.

Другое физическое истолкование метрически-конформиых преобразований дает Дике [4]. В ряде работ он и Бранс стремятся использовать идею Дирака (по которой гравитационная постоянная в действительности не является постоянной) и изменить общую теорию относительности таким образом, чтобы она не противоречила принципу Маха. Насколько нам известно, Дике и авторы /1/ первые дали физический смысл скалярной функции, осуществляющей конформное преобразование.

Настоящая работа сделана независимо от вышеупомянутых работ. В ней решается следующая задача: постулируем (в плоском пространстве Минковского) уравнения движения классической релятивистской частицы в скалярном поле; есть возможность дать пространству такую геометрическую структуру (в рамках геометрии Римана), что геодезические в этом римановом пространстве V_4 являются траекториями частиц в плоском пространстве. Эта задача может быть решена и приводит к пространству Римана V_4, которое и находится в конформном соответствии к пространству Минковского. Пространственные компоненты геодезических (по параметру t) в таком V_4 те же самые, как пространственные компоненты уравнений движения частицы в скалярном поле (по тому же параметру), которые обыкновенно считаются правильными в рамках специальной теории относительности. Введением нового инвариантного параметра в уравнения геодезических получаем наши постулированные уравнения движения, пространственные компоненты которых (по параметру t) тоже тождественны тем же компонентам обыкновенных уравнений. С геометрической точки зрения введение нового параметра ds эквивалентно переходу к пространству L_4, которое находится в проективном соответствии к V_4.

Следствием этой теории является то, что масса покоя частицы зависит от скалярного поля $\phi(x)$ следующим образом:

$$m = m_0 e^{\kappa\phi(x)} .$$

Похожие результаты получили многие авторы /1/-/8/,/10/, но на основе более формальных рассуждений.

Непротиворечивость этой теории доказана тем, что ее можно представить в форме уравнений Гамильтона, Лагранжа и Гамильтона-Якоби.

А. Классические уравнения движения

Будем рассматривать пространство Римана, определенное метрическим тензором

$$g_{ij} = \mu_{ij}\, e^{2\kappa\phi(x)} .$$

Здесь $\phi(x)$ – скалярная функция пространственно-временных переменных x^i $(i=1,2,3,4)$ и μ_{ij} – метрический тензор второго риманова пространства $\overset{0}{V}_4$. $\overset{0}{V}_4$ находится в конформном соответствии к V_4. Будем предполагать, что $\overset{0}{V}_4$ –псевдоевклидово пространство. В таком случае уравнения геодезических, которые можно получить из вариационного принципа

$$\delta \int \sqrt{-g_{ij}\, dx^i dx^j} = 0$$

(сигнатура нашего пространства $+++-$), имеют форму

$$\frac{d^2x^\ell}{d\tau^2} + \tilde{\Gamma}^\ell_{ij} \frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} = 0 . \qquad (1)$$

Здесь τ –инвариантный параметр, и $\tilde{\Gamma}^\ell_{ij}$ имеет вид:

$$\tilde{\Gamma}^\ell_{ij} = \overset{0}{\Gamma}{}^\ell_{ij} + \kappa(\phi_i \delta^\ell_j + \phi_j \delta^\ell_i - \phi^\ell \mu_{ij}) ,$$

$$\overset{0}{\Gamma}{}^\ell_{ij} = \tfrac{1}{2}\mu^{\ell m}\left(\frac{\partial\mu_{mi}}{\partial x^j} + \frac{\partial\mu_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial\mu_{ij}}{\partial x^m}\right) ,$$

$$\phi_i = \frac{\partial\phi}{\partial x^i} \qquad \phi^\ell = \mu^{\ell m}\frac{\partial\phi}{\partial x^m} .$$

В псевдоевклидовом пространстве существует система координат, в которой

$$\overset{0}{\Gamma}{}^\ell_{ij} = 0.$$

В дальнейшем будем работать в такой системе координат.

Теперь мы введем новый инвариантный параметр /9/

$$ds = e^{a\phi} d\tau \qquad (2)$$

ради получения уравнений движения в самой простой форме. Если определим

$$\frac{dx^i}{d\tau} \equiv \dot{x}^i , \qquad \frac{dx^i}{ds} = x'^i ,$$

тогда

$$dx'^i = d(e^{-a\phi}\dot{x}^i) = -a e^{-a\varphi} d\phi\, \dot{x}^i + e^{-a\phi} d\dot{x}^i . \qquad (3)$$

Но в силу уравнения (1) $d\dot{x}^i = -\tilde{\Gamma}^i_{jk}\dot{x}^j dx^k$, и потому

$$dx'^i = -a\, d\phi\, e^{-a\phi}\dot{x}^i - e^{-a\phi}\tilde{\Gamma}^i_{jk}\dot{x}^j dx^k = \qquad (4)$$

$$= -\kappa e^{-a\phi}\left(\frac{a}{\kappa}\phi_k \dot{x}^k \dot{x}^i - 2\phi_k \dot{x}^k \dot{x}^i - \phi^i \mu_{jk}\dot{x}^j \dot{x}^k\right) d\tau .$$

С другой стороны, dx'^i определено другим коэффициентом связности Γ^i_{jk}:

$$dx'^i = -\Gamma^i_{jk}\, x'^j dx^k . \qquad (5)$$

Если положить $a=-2\kappa$ и сравнить (4) и (5) видно, что

$$\Gamma^i_{jk} = -\kappa\mu^{im}\frac{\partial\phi}{\partial x^m}\mu_{jk} , \qquad (6)$$

уравнения движения принимают вид:

$$\frac{d^2x^\ell}{ds^2} = -\Gamma^\ell_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = \kappa\mu^{\ell m}\frac{\partial\varphi}{\partial x^m}\mu_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} . \qquad (7)$$

Определим параметр τ уравнением

$$d\tau = \sqrt{-g_{ij}\,dx^i dx^j} = e^{\kappa\phi}\sqrt{-\mu_{ij}\,dx^i dx^j},$$

тогда

$$g_{ij}\,\dot x^i \dot x^j = -1$$

и

$$\mu_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = e^{4\kappa\phi}\mu_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} = -e^{2\kappa\phi}.$$

Уравнения (1) принимают таким образом простую форму:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = -\kappa\mu^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x}e^{2\kappa\phi}, \quad ds = e^{-\kappa\phi}\sqrt{-\mu_{ij}dx^idx^j} = e^{-\kappa\phi}\sqrt{1-v^2}\,dt \tag{8}$$

Эти уравнения могут считаться без дальнейшего рассмотрения релятивистскими уравнениями движения частицы с массой покоя, равной m_0 в скалярном поле $\phi(x)$, если константа связи (или заряд частицы) g масса m_0 и κ связаны уравнением:

$$\kappa = \frac{g}{m_0}$$

(в единицах, в которых $c=1$). Пространственные компоненты уравнения (8)

$$\frac{d^2x^\sigma}{dt} = -\kappa(1-v^2)\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x^m}\mu^{\sigma m} + \frac{\partial\phi}{\partial t}v^\sigma\right\}_{\sigma=1,2,3}$$

в точности равны пространственным компонентам уравнений

$$\frac{d^2x^\ell}{d\sigma^2} = \kappa\mu^{\ell m}\frac{\partial\phi}{\partial x^m}, \quad d\sigma = \sqrt{1-v^2dt},$$

которые считаются правильными в рамках специальной теории относительности. Но различие в четвертых компонентах и форма инвариантного параметра имеют принципиальное значение и позволяют дать всей теории каноническую форму Гамильтона. Уравнения (8) можно записать в форме:

$$\frac{dp^\ell}{dt} = \mu^{\ell m}F_m, \tag{9}$$

$$p^\ell = \frac{m_0 e^{\kappa\phi}v^\ell}{\sqrt{1-v^2}} \quad (v^4=1), \tag{10}$$

$$F_m = -g\sqrt{1-v^2}\,e^{\kappa\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x^m}. \tag{11}$$

Величины p^ℓ можно считать обобщенными импульсами, которые удовлетворяют следующему уравнению:

$$\vec p^{\,2} - p_4^2 = -m_0^2e^{2\kappa\phi}.$$

В случае $\phi\to 0$ это соотношение принимает вид, хорошо знакомый из специальной теории относительности. Если мы определим

$$p_4 = -H = -\sqrt{\vec p^{\,2} + m^2e^{2\kappa\phi}},$$

потом уравнение (9) можно написать в канонической форме Гамильтона:

$$\frac{dx^i}{dx^4} = \frac{\partial H}{\partial p^m}\mu^{im}, \tag{12}$$

$$\frac{dp^i}{dx^4} = -\frac{\partial H}{\partial x^\ell}\mu^{i\ell}, \tag{13}$$

действительно,

$$\vec p^{\,2} = \frac{m_0^2e^{2\kappa\phi}\vec v^{\,2}}{1-v^2},$$

и потому

$$v^2 = \frac{\vec p^{\,2}}{\vec p^{\,2} + m_0^2e^{2\kappa\phi}}$$

и

$$\sqrt{1-v^2} = \frac{m_0e^{\kappa\phi}}{\sqrt{\vec p^{\,2} + m_0^2e^{2\kappa\phi}}}, \quad \frac{p^\sigma}{v^\sigma} = \sqrt{\vec p^{\,2} + m_0^2e^{2\kappa\phi}}. \quad \sigma = 1,2,3.$$

Элементарным вычислением получим:

$$\frac{\partial H}{\partial p^\ell} = \frac{p^k}{\sqrt{\vec p^{\,2} + m^2e^{2\kappa\phi}}}\mu_{k\ell} = v^k\mu_{k\ell}.$$

Отсюда вытекает, что уравнение (12) является тождеством. Таким же путем можно показать, что уравнение (13) совпадает с (8). С целью доказать тот факт, что эта теория не противоречит классической нерелятивистской механике, выведем классический нерелятивистский принцип Мопертюи.

Из справедливости уравнений

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot x^i} = \frac{m_0g_{ij}\frac{dx^j}{d\tau}}{\sqrt{-g_{k\ell}\dot x^k\dot x^\ell}} = m_0e^{\kappa\phi}\mu_{ij}\dot x^j,$$

$$L = -m_0\sqrt{-g_{ij}\dot x^i\dot x^j} = +\frac{\partial L}{\partial \dot x^i}\dot x^i = p_i\dot x^i$$

прямо следует, что интеграл действия может быть преобразован к криволинейному интегралу

$$S = \int L\,dr = + \int p_i\,dx^i \ .$$

отсюда непосредственно вытекает принцип Мопертюи в релятивистской механике.

Если $\phi(x)$ не зависит от x^4 в явном виде, p_4 = константе /уравнение (13)/ и

$$\delta \int p_i\,dx^i = \delta \int p_\sigma\,dx^\sigma = 0 \qquad \sigma = 1,2,3. \tag{14}$$

Здесь
$$p_\sigma\,dx^\sigma = 2\,\frac{\frac{1}{2} m_0 e^{\kappa\phi} v^2}{\sqrt{1-v^2}}\,dt\ .$$

Определим величины
$$m \equiv m_0 e^{\kappa\phi}\ ,$$
$$T \equiv \frac{\frac{1}{2} m v^2}{\sqrt{1-v^2}}\ ,$$
$$E \equiv \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Ясно, что $dt = \sqrt{\mu_{\sigma\kappa}\,dx^\sigma dx^\kappa}\cdot\frac{1}{v}$,

и потому
$$2\,T\,dt = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}\sqrt{\mu_{\sigma\kappa}\,dx^\sigma dx^\kappa} = \sqrt{2m\,\frac{\frac{1}{2} m v^2}{1-v^2}}\,d\ell\ .$$

Если $\kappa\phi$ мала в некотором участке пространства, тогда $m \approx m_0$; вариационный принцип (14), который теперь принимает вид

$$\delta \int \sqrt{2m\,\frac{\frac{1}{2} m v^2}{1-v^2}}\,d\ell = 0\ ,$$

переходит в случае малых v в хорошо знакомый принцип Мопертюи:

$$\delta \int \sqrt{2m_0(E_n - V_n)}\,d\ell = 0\ ,$$

E_n, V_n – нерелятивистские полная и потенциальная энергии.

В действительности, если $\kappa\phi$ и v одинакового порядка и могут считаться малыми, тогда (в первом нетривиальном приближении)

$$T \approx \tfrac{1}{2} m_0 v^2 \equiv T_n \qquad \text{и}$$
$$E = m_0(1 + \kappa\phi + \dots)(1 + \tfrac{1}{2} v^2 + \dots) \approx m_0 + \mathfrak{s}^2\phi + \tfrac{1}{2} m_0 v^2 = m_0 + V_n + T_n = m_0 + E_n\ .$$

Поэтому принцип Мопертюи может считаться геометрическим принципом, определяющим уравнения геодезических в конформно-евклидовом пространстве V_3, метрика которого дана

$$a_{\sigma\kappa} = 2m_0(E_n - V_n)\,\mu_{\sigma\kappa} \qquad \sigma,\kappa = 1,2,3.$$

B. Волновые уравнения

На основе предшествующих рассуждений можно непосредственно записать уравнения Гамильтона–Якоби классической точечной частицы во внешнем скалярном поле:

$$g^{ij}\,\frac{\partial S}{\partial x^i}\,\frac{\partial S}{\partial x^j} + m_0^2 = 0\ .$$

В этой форме оно связано с пространством V_4 , в котором, как мы сначала неявно предполагали, m_0 является постоянной. Подстановкой $g^{ij} = \mu^{ij} e^{-2\kappa\phi}$ получим такое же соотношение в R_4 :

$$\mu^{ij}\,\frac{\partial S}{\partial x^i}\,\frac{\partial S}{\partial x^j} + m^2 = 0.$$

Теперь мы в состоянии писать волновое уравнение частицы во внешнем поле:

$$\left(\Box - \frac{m_0^2 e^{2\kappa\phi}}{h^2}\right)\Psi = 0\ . \tag{15}$$

Аналогично, уравнение Дирака частицы со спином во внешнем поле дано [5]

$$\left\{\alpha^i\left(\partial_i - \frac{2}{3}\kappa\,\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right) + i\beta\,\frac{m_0}{h}\,e^{\kappa\phi}\right\}\Psi = 0\ .$$

Отсюда видно, что геометрические соображения определяют тип взаимодействия спинорного поля с внешним скалярным полем.

Сводка результатов

В работе показано, что влияние физической сущности – скалярного поля – на частицы можно описать либо в терминах физически приемлемых уравнений движения в плоском пространстве, либо в терминах уравнений геодезических в конформно-евклидовом пространстве Римана. В этом смысле задача геометризации скалярного поля решена: всякое скалярное поле $\phi(x)$ изменяет метрические свойства пространства-времени (метрический тензор которого $g_{ij} = e^{2\kappa\phi}\mu_{ij}$).

Скалярное поле описывается в этой картине уравнениями в плоском пространстве. Взаимодействие с гравитационным полем не включено. Работа представляет аргумент в пользу идеи, что масса покоя в уравнениях движения является не постоянной, а функцией скалярного поля.

В заключение хочу поблагодарить К. Кухаржа и проф. В. Вотрубу за интерес, проявленный к работе, проф. Я.А. Смородинского за полезные обсуждения и дискуссии, а также А. Ванчуру за многочисленные дискуссии и чтение рукописи.

Литература

1. T.Fulton, F.Rohrlich, L.Witten. Rev. Mod. Phys., 34, 442 (1962).
2. E.Cunningham, Proc. Lond. Math. Soc., 8, 77 (1909).
3. H.Bateman. Proc. Lond. Math. Soc. 8, 223 (1910).
4. R.H.Dicke. Phys. Rev., 156, 2163 (1962).
   Здесь приведены ссылки на другие работы о конформных трансформациях.
5. H.Nariai, Y.Ueno. Progr. Theor. Phys., 24, 593 (1960).
6. G.Kalman, Phys. Rev., 123, 384 (1961).
7. H.Rund. Nuovo Cim., 23, 227 (1962).
8. R.H.Dicke. Science, 138, 3541 (1962).
9. П.К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. ГИТТЛ, Москва, 1953.
10. N.Rosen. Ann. Phys., 22, 1 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
22 октября 1963 г.