



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Г. Домокощ, Р.Я. Зулькарнеев, В.И. Никаноров

P-1434

ТЕОРИЯ КОМПЛЕКСНЫХ
УГЛОВЫХ МОМЕНТОВ
И ФИЗИКА ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Дубна 1963

7628

Г. Домокош, Р.Я. Зилькарнеев, В.И. Ниханоров

P-1434

2144/3 чг.

ТЕОРИЯ КОМПЛЕКСНЫХ
УГЛОВЫХ МОМЕНТОВ
И ФИЗИКА ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
БИБЛИОТЕКА

Дубна 1963

П р е д и с л о в и е

Настоящий обзор основан на лекциях, прочитанных одним из авторов (Г.Домокошем) в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ для физиков-экспериментаторов по некоторым актуальным проблемам физики высоких энергий. Лекции имели своей целью дать элементарное введение в теорию комплексных угловых моментов, не претендуя на полноту изложения.

Быстрота развития этой теории не позволяет учесть в обзоре все ее видоизменения. Мы будем считать свою задачу выполненной, если данный обзор облегчит знакомство с оригинальными статьями.

Для дальнейшего чтения приводится список основных работ по данному вопросу.

Приложение I напоминает о некоторых положениях теории функций комплексного переменного.

В приложении II дается обоснование некоторых утверждений, приведенных в тексте без доказательства.

Мы благодарны профессору Д.И. Блохинцеву и Л.И. Липидусу, стимулировавшим организацию лекций и опубликование данного обзора.

1. Две иллюстрации

Рассмотрим рассеяние заряженной частицы кулоновским полем. Решение соответствующего уравнения Шредингера приводит к следующему выражению для матричного элемента

$$S_{\ell} = \frac{\Gamma(\ell + i\eta + 1)}{\Gamma(\ell - i\eta + 1)}, \quad (1.1)$$

где $\eta = e^2 \sqrt{\frac{m}{2E}}$, m - масса частицы, E - кинетическая энергия, e - заряд.

Будем считать, что формула (1.1) определяет S_{ℓ} и для $E < 0$. Так как $\Gamma(z) = \infty$ при $z = 0, -1, -2, \dots$, то S_{ℓ} имеет полюса, определяемые следующим условием:

$$\ell + i\eta + 1 = -n, \quad (1.2)$$

где n - целое положительное число. Отсюда находим

$$E = -e^4 \frac{m}{2(n + \ell + 1)^2}. \quad (1.3)$$

Формула (1.3) описывает уровни энергии атома водорода. Таким образом, полюсам функции S_0 соответствуют связанные состояния.

Рассмотрим теперь случай упругого πN -рассеяния. Низшему порядку теории возмущений соответствует однонуклонная диаграмма

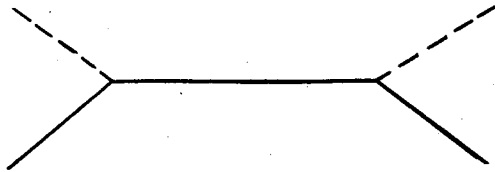


Рис. 1.

Вклад этой диаграммы в амплитуду рассеяния пропорционален $(M^2 - s)^{-1}$ (M - масса нуклона, s - квадрат полной энергии в системе центра масс). Физические значения s определяются неравенством $(M + \mu)^2 \leq s$. Рассматриваемая диаграмма обладает плюсом при $s = M^2$, которому можно сопоставить связанное состояние πN -системы^{x)}.

Аналогично квазистационарным состояниям (резонансам) можно поставить в соответствие полюса при комплексных значениях s .

Ниже мы покажем, что приведенные примеры иллюстрируют некоторые весьма общие свойства амплитуды рассеяния.

2. Квазистационарные состояния

Квазистационарные состояния можно описать исходя из соотношения унитарности для S -матрицы, которое имеет вид:

$$SS^+ = 1. \quad (2.1)$$

Введем матрицу T с помощью соотношения

$$S = 1 + iT. \quad (2.2)$$

Тогда условие унитарности будет выглядеть следующим образом:

$$iT^+T = T - T^+. \quad (2.3)$$

Применим соотношение унитарности (2.3) к упругому рассеянию бесспиновых частиц с равными массами:

$$\begin{aligned} \langle k_3, k_4 | T | k_1, k_2 \rangle - \langle k_3, k_4 | T^+ | k_1, k_2 \rangle = \\ = i \langle k_3, k_4 | T^+ T | k_1, k_2 \rangle, \end{aligned} \quad (2.4)$$

x) В данном случае физический нуклон.

где k_1, k_2 - начальные 4-импульсы, k_3, k_4 - конечные.

Используя теорему полноты, матричный элемент, стоящий в правой части равенства (2.4), можно преобразовать к виду:

$$i \langle k_3, k_4 | T^+ T | k_1, k_2 \rangle = \sum_{q_1, q_2} \langle k_3, k_4 | T^+ | q_1, q_2 \rangle \langle q_1, q_2 | T | k_1, k_2 \rangle. \quad (2.5)$$

При этом мы предполагаем, что энергия достаточно мала, чтобы можно было ограничиться суммированием по двухчастичным промежуточным состояниям (q_1 и q_2 - импульсы частиц в промежуточном состоянии). Переходя в равенстве (2.5) от суммирования к интегрированию, получаем:

$$i \langle k_3, k_4 | T^+ T | k_1, k_2 \rangle = \frac{i}{(2\pi)^6} \int \frac{d^3q_1 d^3q_2}{\omega_1 \omega_2} \langle k_3, k_4 | T^+ | q_1, q_2 \rangle \langle q_1, q_2 | T | k_1, k_2 \rangle \quad (2.6)$$

где $\omega_i = \sqrt{q_i^2 - m^2}$, $i = 1, 2$.

Введем переменные:

$$\begin{aligned} Q &= q_1 + q_2; \quad K = k_1 + k_2; \quad K' = k_3 + k_4; \\ q &= \frac{1}{2}(q_2 - q_1); \quad k = \frac{1}{2}(k_2 - k_1); \quad k' = \frac{1}{2}(k_4 - k_3) \end{aligned}$$

и выделим δ -функцию из матричных элементов:

$$\langle k_3, k_4 | T | k_1, k_2 \rangle = \delta^4(k_3 + k_4 - k_1 - k_2) \langle k_3, k_4 | r | k_1, k_2 \rangle.$$

Тогда интеграл в правой части (2.6) запишется следующим образом:

$$\frac{2i}{4(2\pi)^6} \int \frac{d^3Q d^3q \delta^4(K' - Q) \delta^4(Q - K)}{\omega_1 \omega_2} \langle k_3, k_4 | r^+ | q_1, q_2 \rangle \langle q_1, q_2 | r | k_1, k_2 \rangle.$$

После интегрирования по d^3Q имеем:

$$\begin{aligned} [\langle k_3, k_4 | r | k_1, k_2 \rangle - \langle k_3, k_4 | r^+ | k_1, k_2 \rangle] \delta(K - K') = \\ = \frac{i}{2(2\pi)^6} \int \frac{d^3q}{\omega_1 \omega_2} \delta(K^0 - Q^0) \delta(K - Q) \langle k_3, k_4 | r^+ | q_1, q_2 \rangle \langle q_1, q_2 | r | k_1, k_2 \rangle. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Перейдем в систему центра масс, где $K = K' = Q = 0$ и $q_1 = q_2 = q$. Учитывая, что $\frac{d^3q}{\omega_1 \omega_2} = \frac{q}{\omega} d\omega d\Omega$ ($d\Omega$ - элемент телесного угла) и пользуясь тем, что в с.ц.м. $Q^0 = 2\omega$, произведем интегрирование по ω :

$$\begin{aligned} \langle k_3, k_4 | r | k_1, k_2 \rangle - \langle k_3, k_4 | r^+ | k_1, k_2 \rangle = \\ = \frac{i}{2(2\pi)^6} \frac{\sqrt{4(K^0)^2 - \mu^2}}{K^0} \int d\Omega \langle k_3, k_4 | r^+ | q_1, q_2 \rangle \langle q_1, q_2 | r | k_1, k_2 \rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Введем переменные $s = (k_1 + k_2)^2$, \vec{n} и \vec{n}' , где s - квадрат полной энергии в с.ц.м., \vec{n} и \vec{n}' - единичные векторы, направленные вдоль относительных импульсов в начальном и конечном состояниях.

Поскольку r - инвариантная функция, то ее зависимость от векторов \vec{n} и \vec{n}' должна быть взята в виде скалярного произведения $(\vec{n} \vec{n}')$. Таким образом, соотношение унитарности можно записать в виде:

$$r(s, \vec{n} \vec{n}') - r^*(s, \vec{n} \vec{n}') = \frac{i}{(2\pi)^8} \frac{\sqrt{s-4\mu^2}}{\sqrt{s}} \int d\Omega'' r(s, \vec{n} \vec{n}'') r(s, \vec{n}'' \vec{n}'). \quad (2.9)$$

Используя разложение

$$r(s, \vec{n} \vec{n}') = 8(2\pi)^8 \sum_{\ell} (2\ell+1) r_{\ell}(s) P_{\ell}(\vec{n} \vec{n}'), \quad (2.10)$$

и формулу для полиномов Лежандра

$$\int d\Omega'' P_{\ell}(\vec{n} \vec{n}'') P_{\ell}(\vec{n}'' \vec{n}) = \frac{2\pi \delta_{\ell\ell'}}{2\ell+1} P_{\ell}(\vec{n} \vec{n}'), \quad (2.11)$$

получаем условие унитарности в терминах парциальных амплитуд:

$$r_{\ell}(s) - r_{\ell}^*(s) = 2i\rho(s) r_{\ell}(s) r_{\ell}^*(s), \quad (2.12)$$

где $\rho(s) = \frac{\sqrt{s-4\mu^2}}{s}$ - вещественная и аналитическая функция.

В области, где $r_{\ell}(s)$ регуляра, можно показать, что

$$r_{\ell}^*(s) = r_{\ell}(s^*). \quad (2.13)$$

Применим полученные результаты для описания квазистационарных состояний.

С учетом того, что функция $\rho(s)$ имеет точки ветвления при $s=0$ и $s=4\mu^2$ (порог промежуточного состояния системы) выбираем разрезы в s -плоскости от 0 до $-\infty$ и от $4\mu^2$ до ∞ .

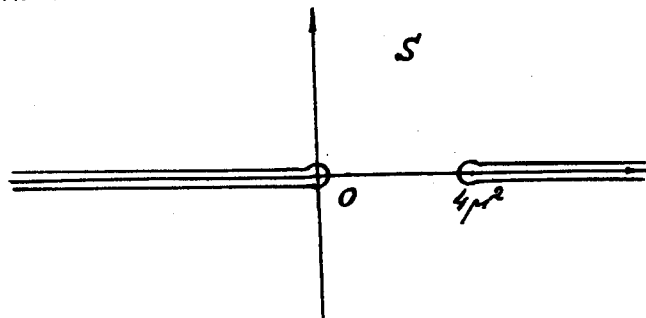


Рис. 2.

При таком выборе разрезов $\rho(s^*) = -\rho^*(s)$, и с учетом (2.13) соотношение унитарности приобретает вид:

$$r_{\ell}(s) - r_{\ell}^{\text{II}}(s) = 2i\rho(s) r_{\ell}(s) r_{\ell}^{\text{II}}(s), \quad (2.14)$$

где II означает, что значения функции $r_{\ell}(s)$ берутся на втором листе поверхности Римана. Запишем (2.14) в форме:

$$r_{\ell}^{\text{II}}(s) = \frac{r_{\ell}(s)}{1 + 2i\rho(s) r_{\ell}(s)}. \quad (2.15)$$

Функция $r_{\ell}(s)$ имеет полюса, соответствующие нулям функции $1 + 2i\rho(s) r_{\ell}(s) = S_{\ell}(s)$. Этим полюсам сопоставляются связанные состояния, как мы это видели на примере кулоновского рассеяния.

Разлагая функцию, стоящую в знаменателе формулы (2.15), в ряд Тейлора в точке $z_0 = s_0 + i\Gamma$, получаем:

$$r_{\ell}^{\text{II}}(z) \approx \frac{r_{\ell}(z_0)}{\left[\frac{\partial S_{\ell}(z)}{\partial z} \right]_{z=z_0} (z - s_0 - i\Gamma)}. \quad (2.16)$$

Переходя к функции на первом листе римановой поверхности, имеем:

$$r_{\ell}(s) \approx \frac{r_{\ell}^*(z_0)}{\left[\frac{\partial S_{\ell}(z)}{\partial z} \right]_{z=s_0}^* (s - s_0 + i\Gamma)}. \quad (2.17)$$

Полученная формула эквивалентна формуле Брейта-Вигнера, описывающей квазистационарные состояния с полушириной Γ . При $\Gamma=0$ соотношение (2.17) описывает связанные состояния.

Совершенно аналогичные рассуждения можно провести, считая, что s принимает физические значения, а ℓ - комплексно. Этому случаю соответствует формула

$$r_{\ell}(s) = \frac{r_{\ell}(s)}{\left[\frac{\partial S_{\ell}}{\partial \ell} \right]_{\ell=\ell_0} (\ell - \ell_0(s))}. \quad (2.18)$$

Эта формула также описывает квазистационарные и связанные состояния. Нет принципиальной разницы между полученными двумя описаниями. Полюса амплитуды рассеяния в комплексной ℓ -плоскости называются полюсами Редже.

3. Описание взаимодействия при высоких энергиях в терминах комплексных угловых моментов

Рассмотрим взаимодействие двух бесспиновых частиц с равными массами и изображаемое следующей диаграммой:

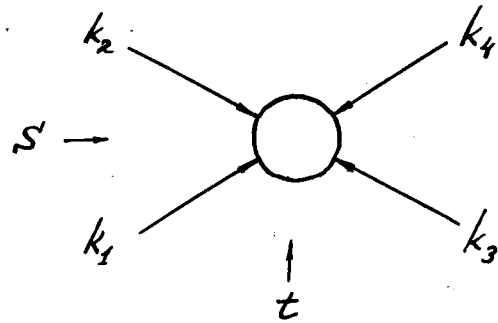


Рис. 3.

Введем инвариантные переменные

$$\begin{aligned} s &= (k_1 + k_2)^2, \\ t &= (k_1 + k_3)^2, \\ u &= (k_2 + k_3)^2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

связанные соотношением:

$$s + t + u = 4\mu^2. \quad (3.2)$$

Разложим по парциальным волнам амплитуду $r(s, t)$, рассматриваемую в канале, где s - квадрат полной энергии в с.п.м., а t - квадрат передачи 4-импульса:

$$r(s, t) = \sum_{\ell} (2\ell + 1) r_{\ell}(s) P_{\ell}(\cos \theta_s). \quad (3.3)$$

Из (3.1) можно получить, что

$$\cos \theta_s = 1 - \frac{2t}{4\mu^2 - s}. \quad (3.4)$$

Ряд (3.3) можно заменить интегралом, взятым по контуру C_1 (см. рис. 4).

$$r(s, t) = \frac{i}{2} \int_{C_1} (2\ell + 1) \frac{d\ell}{\sin \ell \pi} r_{\ell}(s) P_{\ell}(-\cos \theta_s). \quad (3.5)$$

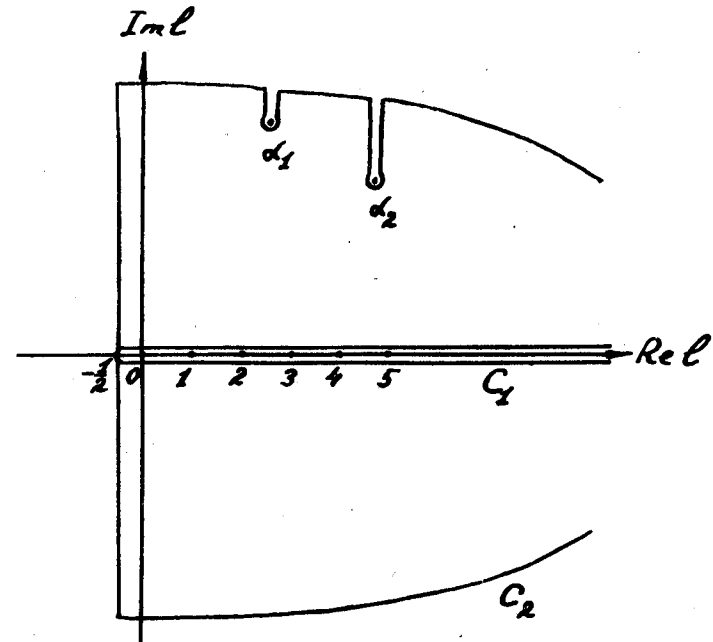


Рис. 4.

Интегральное представление (3.5) получается с помощью теоремы о вычетах с учетом равенств:

$$P_n(z) = (-1)^n P_n(-z). \quad (3.6)$$

$$\text{Вычет } (\sin n\pi)^{-1} = \frac{(-1)^n}{\pi}. \quad (3.7)$$

В выражении (3.5) под $r_{\ell}(s)$ следует понимать аналитическое продолжение обычной парциальной волны в область комплексных ℓ . Если деформировать контур C_1 , переводя его в положение C_2 , то с учетом полюсов функций $r_{\ell}(s)$

$$\begin{aligned} r(s, t) &= \frac{i}{2} \int_{-i/2 - i\infty}^{-i/2 + i\infty} (2\ell + 1) \frac{d\ell}{\sin \ell \pi} r_{\ell}(s) P_{\ell}(-\cos \theta_s) + \\ &+ \sum_i \frac{\beta_i(s) P_{\alpha_i(s)}(-\cos \theta_s)}{\sin \alpha_i(s)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь $a_1(s)$ - положение полюсов функции $r_\ell(s)$ в комплексной ℓ - плоскости, $\beta_1(s)$ - функции, пропорциональные вычетам соответствующих полюсов.

Так как амплитуда $r(s, t)$ описывает также канал, где переменная t является квадратом энергии в с.и.м. (t - канал), то пренебрегая при $t \rightarrow \infty$ вкладом интеграла в выражении (3.8), получаем

$$[r(s, t)]_{t \rightarrow \infty} = \sum_i \frac{\beta_1(s) t^{a_1(s)}}{\sin \pi a_1(s)} \quad (3.9)$$

Формула (3.9) получается с учетом того, что $[\cos \theta_s]_{s \rightarrow \infty} = t^{-1/2}$ и

$$[P_\ell(z)]_{z \rightarrow \infty} = \frac{2^\ell \Gamma(\ell + 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\ell + 1)} z^{-\ell} \quad (3.10)$$

Более точное рассмотрение с учетом π -канала приводит к тому, что каждый член суммы (3.9) имеет добавочный множитель $\epsilon_1 = [1 + (-1)^l e^{i\pi a_1(s)}]$, где l - спин резонанса, сопоставленного траектории $a_1(s)$. Множитель $(-1)^l$ определяет так называемую сигнатуру, положительную или отрицательную в зависимости от четности или нечетности l .

При достаточно большой энергии в (3.9) будет доминировать член с наибольшим $a_1(s)$. В связи с этим дифференциальное сечение можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\beta(s) \epsilon(s)}{\sin \pi a(s)} t^{2a(s)-2} \quad (3.11)$$

Формула (3.11) дает быстрый спад дифференциального сечения с увеличением угла рассеяния (что и наблюдается в эксперименте). Это утверждение выполняется при $a(s) \leq 1$ и $\frac{da}{ds} < 0$.

Используя оптическую теорему, можно получить асимптотическую зависимость полного сечения от энергии

$$\sigma_{tot} = E^{a(0)-1} \quad (3.12)$$

При условии $a(0) = 1$ полное сечение асимптотически стремится к постоянной величине. Функцию $a(s)$, удовлетворяющую этому условию, называют вакуумной траекторией или траекторией Померанчука.

Во всех предыдущих рассуждениях предполагалось, что амплитуда рассеяния имеет только простые полюса и не имеет точек ветвления в комплексной ℓ -плоскости. Может оказаться, что точки ветвления играют существенную роль. Это приведет к необходимости добавить к правой части выражения (3.9) члены, соответствующие разрезам.

Сделаем без доказательства следующие утверждения, касающиеся важных свойств полюсов Редже:

1. $\text{Re } a_1(m^2) = \ell$, где m и ℓ - масса и спин резонанса, сопоставленного данной "траектории" $a_1(s)$.
2. $\text{Im } a_1(s)$ ведет себя у порога $(s + 4\mu^2)$ как $(s - 4\mu^2)^{\text{Re } a_1(4\mu^2) + \kappa}$.
3. "Траектория" полюса $a_1(s)$ и вычет $y_1(s)$ - аналитические функции от s с неотрицательными мнимыми частями.
4. $\text{Im } a_1(s) = 0$ и $\text{Im } y_1(s) = 0$ для $s < 4\mu^2$.
5. $a(s) \leq 1$ и $\frac{da}{ds} \geq 0$ при $s < 0$.
6. Теорема факторизации. Данная теорема утверждает, что вычет полюса Редже состоит из двух факторов, каждый из которых зависит от квантовых чисел лишь одной пары частиц.

Доказательства некоторых из этих свойств приводятся в приложении II.

4. π - N - рассеяние

В целях приложения развитой теории к конкретным физическим процессам рассмотрим упругое πN - рассеяние при высоких энергиях и малых передачах. В дальнейшем предполагаем, что основную роль в этом процессе играет один двухполюсный полюс Редже. Таким образом, задача сводится к вычислению следующих однополюсных диаграмм.

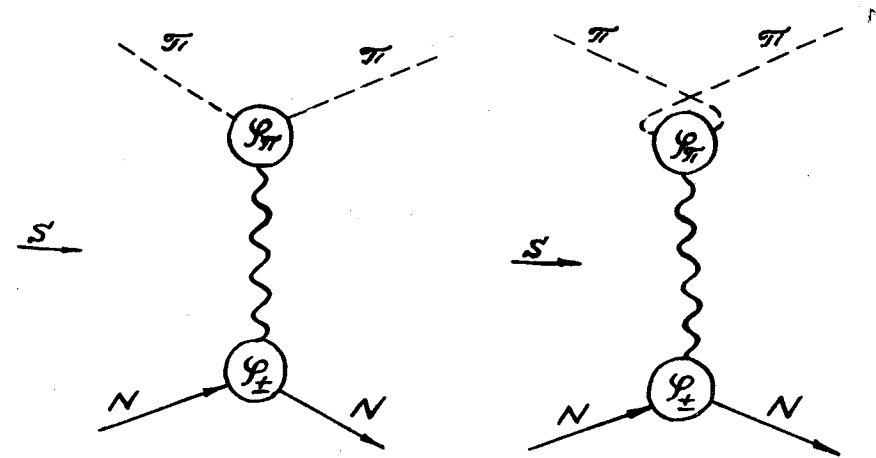


Рис. 5.

Как известно, выражения, соответствующие этим диаграммам, отличаются знаком косинуса угла рассеяния в t -канале, что при $t < 0$ и $s \rightarrow \infty$ дает фактор $\pm e^{i\pi\alpha(t)}$ (знаки \pm выбираются в соответствии с сигнатурой промежуточного состояния).

В случае когерентного рассеяния полюс в промежуточном состоянии обладает следующими квантовыми числами: изоспин $T=0$, G - четность $= 1$, сигнатура $\sigma = +1$ (ρ - полюс). При перезарядке $T=1$, $G=1$, $\sigma = -1$ (ρ - полюс). Состояние $T=2$ невозможно, поскольку изоспин нуклона $= 1/2$. Вклад полюса можно вычислить, разлагая амплитуду рассеяния по парциальным волнам в t -канале, а затем преобразуя ряд Лежандра в интеграл Ватсона-Зоммерфельда.

Инвариантная матричная амплитуда выглядит следующим образом:

$$T^{\pm} = -A^{\pm} + i\gamma \frac{q_1 + q_2}{2} \beta^{\pm}, \quad (4.1)$$

где q_1 и q_2 - четырех-импульсы пионов. При переходе в t -канал q_2 -меняет знак. Изотопическая структура амплитуды:

$$T_{\beta\alpha} = T^{(+)} \delta_{\beta\alpha} + \frac{1}{2} [\tau_{\beta}, \tau_{\alpha}] T^{(-)}, \quad (4.2)$$

где α, β - изотопические индексы пионов.

Чистые изотопические состояния T^{π} , $T^{s/2}$ в s и u -каналах связаны с амплитудами T^{\pm} с помощью формул:

$$T^{(+)} = \frac{1}{3} (T^{\pi} + 2T^{s/2}), \quad (4.3)$$

$$T^{(-)} = \frac{1}{3} (T^{\pi} - T^{s/2}),$$

тогда как в t -канале:

$$T^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{6}} T^0, \quad T^{(-)} = \frac{1}{2} T^1. \quad (4.4)$$

В s и u -каналах амплитуда рассеяния в с.ц.м. имеет вид:

$$t^{\pm} = t_1^{\pm} + (\vec{\sigma} \vec{n}_1)(\vec{\sigma} \vec{n}_2) t_2^{\pm}, \quad (4.5)$$

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{q}_1}{|\vec{q}_1|}, \quad \vec{n}_2 = \frac{\vec{q}_2}{|\vec{q}_2|},$$

причем:

$$\frac{1}{4\pi} A^{\pm} = \frac{W+M}{E+M} t_1^{\pm} - \frac{W-M}{E-M} t_2^{\pm}, \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{4\pi} B^{\pm} = \frac{1}{E+M} t_1^{\pm} + \frac{1}{E-M} t_2^{\pm}$$

($W = \sqrt{s}$, E - полная энергия нуклона в с.ц.м., M - масса нуклона).

Имеем следующие свойства симметрии:

$$A^{\pm}(s, u, t) = \pm A^{\pm}(u, s, t), \quad (4.7)$$

$$B^{\pm}(s, u, t) = \mp B^{\pm}(u, s, t).$$

Подстановка $s \rightarrow u$ в t -канале эквивалентна замене $\cos \theta$ на $(-\cos \theta)$. Наконец, приведем разложение инвариантных амплитуд по состояниям Жакоба-Вика в t -канале:

$$A = -\frac{8\pi}{p^2} \left\{ \sum_J (J + \frac{1}{2})(pq)^J [f_{J+} P_{J-}(\gamma) - \right. \quad (4.8)$$

$$\left. - \frac{M}{\sqrt{J(J+1)}} f_{J-} - \gamma P'_J(\gamma) \right\}; B = 8\pi \sum_J \frac{J+\frac{1}{2}}{\sqrt{J(J+1)}} (pq)^{J-1} \cdot f_{J-} P'_J(\gamma).$$

Здесь q, p - модули импульсов пиона и нуклона в t -канале, соответственно:

$$4(p^2 + M^2) = 4(q^2 + 1) = t, \quad (4.9)$$

γ - косинус угла рассеяния в t -канале:

$$\cos \theta = \gamma = \frac{s - M^2 - 1 + t/2}{2pq}, \quad (4.10)$$

$f_{J\pm}$ - парциальные амплитуды с определенным полным моментом и спиральностью, из которых околороговое поведение явно выделено в виде факторов $(pq)^J$ и $(pq)^{J-1}$.

Найдем вклад полюсов (p) и (ρ) в амплитуду πN - рассеяния. Найдем соотношение унитарности для амплитуд $f_{J\gamma}$ ($\gamma = +, -$), учитывая лишь двухпионное промежуточное состояние (опуская для простоты изотопические индексы):

$$f_{J\gamma}(t) - f_{J\gamma}^{\pi}(t) = 2i\rho(t) A_J(t) f_{J\gamma}^{\pi}(t), \quad (4.11)$$

где $\rho(t) = \sqrt{\frac{t-4}{t}}$, A_J - парциальная амплитуда пион-пионного рассеяния. Отсюда:

^{x)} Пусть λ и $\bar{\lambda}$ - спиральности нуклона и антинуклона, соответственно, принимающие значения $\pm 1/2$. Тогда для амплитуды $f_{J\lambda\bar{\lambda}}$ имеем комбинации:

$$f_{J,\lambda,\lambda}; f_{J,\lambda,-\lambda}; f_{J,-\lambda,-\lambda}$$

Однако из P -инвариантности:

$$f_{J,\lambda,\lambda} = f_{J,-\lambda,-\lambda} = f_{J^+}$$

$$f_{J,\lambda,-\lambda} = -f_{J,-\lambda,\lambda} = f_{J^-}$$

$$f_{J\gamma}^{II}(t) = \frac{f_{J\gamma}(t)}{1 + 2i\rho(t)A_J(t)}, \quad (4.12)$$

причем величины, фигурирующие в (4.12), являются аналитическими функциями от J и t . $f_{J\gamma}^{II}(t)$ обладает полюсами, где $1 + 2i\rho(t)A_J(t) = 0$.

Теперь ясно, что суммы в (4.8) можно преобразовать в интеграл (В-3); имея в виду (4.4), видим, что полюс (P) даст вклад в $T^{(+)}$, полюс же (ρ) - в $T^{(-)}$. Учитывая еще сигнатуры полюсов ($\sigma_p = +1$, $\sigma_\rho = -1$) и теорему факторизации, полюсный вклад в амплитуды можем записать так:

$$f_{J\gamma}^{(\pm)}(t) = \frac{\phi_\pi^{(\pm)}(t)\phi_\gamma^{(\pm)}(t)}{J - a_\pm(t)} (1 + e^{ia_\pm(t)\pi}) + \dots, \quad (4.13)$$

где верхний индекс (\pm) при величинах, характеризующих проион-пионную систему, соответствует изотоп-состояниям $T=0, 1$; в частности $a_+ \equiv a_\rho$, $a_- \equiv a_p$.

Подставляя (4.13) в (4.8) (более точно, в выражения, где \sum_J заменена интегралом (В-3)), находим вклад вышеуказанных полюсов в амплитуды:

$$A^\pm = -\frac{8\pi^2}{p^2} \frac{(a_\pm + \frac{1}{2})(pq)}{\sin a_\pm \pi} \phi_\pi^\pm (1 + e^{ia_\pm \pi}) \times \\ \times [\phi_+^{(\pm)} P_{a_\pm}^{(\pm)}(\gamma) - \frac{M\phi_-^{(\pm)}}{\sqrt{a_\pm(a_\pm + 1)}} \gamma P'_{a_\pm}(\gamma)] + \dots, \quad (4.14)$$

$$B^\pm = 8\pi^2 \frac{(a_\pm + \frac{1}{2})(pq)}{\sqrt{a_\pm(a_\pm + 1)}} \frac{1 \pm e^{ia_\pm \pi}}{\sin a_\pm \pi} \phi_\pi^{(\pm)} \phi_-^{(\pm)} P_{a_\pm}^{(\pm)}(\gamma) + \dots$$

Отсюда, учитывая известную асимптотическую формулу (3.10) и $P'_\nu(z) = (z^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} P'_\nu(z)$, найдем асимптотическое поведение инвариантных амплитуд при $s \rightarrow \infty$, $t = 0(1)$:

$$A^\pm \sim -\frac{8\pi^{3/2}}{p^2} \frac{\Gamma(a_\pm + 3/2)}{\sin a_\pm \pi} \phi_\pi^\pm (1 \pm e^{ia_\pm \pi}) \times \\ \times [\phi_+^{(\pm)} - \frac{M\phi_-^{(\pm)}}{\sqrt{a_\pm(a_\pm + 1)}} \frac{1}{\Gamma(a_\pm)}] s^{a_\pm}, \quad (4.15) \\ B^\pm \sim \frac{16\pi^{3/2}}{\sqrt{a_\pm(a_\pm + 1)}} \frac{\Gamma(a_\pm + 3/2)}{2i \sin a_\pm \pi \Gamma(a_\pm)} \frac{1 \pm e^{ia_\pm \pi}}{2i \sin a_\pm \pi \Gamma(a_\pm)} \phi_\pi^{(\pm)} \phi_-^{(\pm)} s^{a_\pm - 1}$$

Рассмотрим теперь амплитуду рассеяния в s -канале. Используя (4.5), (4.6), найдем асимптотически ($E = \frac{1}{2}W$):

$$f_1^{(\pm)} \sim \frac{1}{16\pi} [A^\pm + WB^\pm], \quad (4.16)$$

$$f_2^{(\pm)} \sim \frac{1}{16\pi} [-A^\pm + WB^\pm].$$

Перейдем к амплитудам с переворотом и без переворота спина:

$$f^{(\pm)} = F_1^{(\pm)} + i(\vec{\sigma}\vec{n})F_2^{(\pm)}, \quad (4.17)$$

где

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{e} \sin \theta,$$

$$F_1 = \frac{1}{8\pi} [\sin^2 \frac{\theta}{2} A^{(\pm)} + W \cos^2 \frac{\theta}{2} B^{(\pm)}], \quad (4.18)$$

$$F_2 = \frac{1}{16\pi} [-A^{(\pm)} + WB^{(\pm)}],$$

θ - угол рассеяния в с.п.м. для s -канала, \vec{e} - единичный вектор.

Теперь без приведения деталей расчетов выпишем некоторые физически интересные величины, которые можно получить из формул (4.15), (4.17), (4.18).

Исходя из спиновой матрицы плотности нуклона в начальном состоянии:

$$\rho = \frac{1}{4} (1 + \vec{\xi} \vec{\sigma}) \quad (4.19)$$

($\vec{\xi}$ - вектор поляризации, $|\vec{\xi}| \leq 1$) и вводя обозначения:

$$\Phi^{(+)} = (\operatorname{ctg} \frac{\alpha+2}{2})^2; \quad \Phi^{(-)} = (\operatorname{tg} \frac{\alpha-\pi}{2})^2,$$

имеем следующие выражения для дифференциального сечения и поляризации:

$$\frac{d\sigma^{(\pm)}}{d\Omega} = \operatorname{Tr}(f^+ \rho f) = (1 + \Phi^{(\pm)}) \cdot \left\{ \frac{\pi}{2p^4} [\Gamma(a+3/2) \phi_\pi^+ \phi_-^+ \frac{M\phi_-}{\Gamma(a)\sqrt{a(a+1)}}] \right\}^2 \times \\ \times s^{2a} (1 - \cos \theta) + \frac{2\pi}{a(a+1)} \left(\frac{\Gamma(a+3/2)}{\Gamma(a)} \phi_\pi^+ \phi_-^+ \right)^2 s^{2a-1} (1 + \cos \theta), \quad (4.20)$$

$$\langle \vec{\sigma} \rangle = \text{Tr}(\vec{\sigma} t^{\pm} t) = 2(1 + \Phi^{\pm}) \{ \Psi_1 \vec{\xi} + \Psi_2 \sin \theta (\vec{\sigma} \times \vec{\xi}) + \Psi_3 \sin^2 \theta (\vec{\sigma} \vec{\xi}) \vec{\sigma} \}. \quad (4.21)$$

Функции Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 задаются формулами:

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & -\cos \theta (1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \frac{\pi}{4 p^4} [\Gamma(a + 3/2) \phi_{\pi} (\phi_+ - \frac{M \phi_-}{\Gamma(a) \sqrt{a(a+1)}})]^2 s^{2a} + \\ & + \cos \theta (1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \frac{\pi}{a(a+1)} (\frac{\Gamma(a+3/2)}{\Gamma(a)} \phi_{\pi} \phi_-)^2 s^{2(a-1)} - \\ & - (1 + \sin^2 \theta) \frac{\pi}{p^2} (\Gamma(a + 3/2) \phi_{\pi})^2 \frac{\phi_- [\phi_+ - \frac{M \phi_-}{\Gamma(a) \sqrt{a(a+1)}}]}{\Gamma(a) \sqrt{a(a+1)}} s^{2a-4}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 = & -(\sin^2 \frac{\theta}{2}) \frac{\pi}{2 p^4} [\Gamma(a + 3/2) \phi_{\pi} (\phi_+ - \frac{M \phi_-}{\Gamma(a) \sqrt{a(a+1)}})]^2 s^{2a} + \\ & + (\cos^2 \frac{\theta}{2}) \frac{2\pi}{a(a+1)} (\frac{\Gamma(a+3/2)}{\Gamma(a)} \phi_{\pi} \phi_-)^2 s^{2a-1} + \\ & + (\cos \theta) \frac{\pi}{p^2} (\Gamma(a + 3/2) \phi_{\pi})^2 \frac{\phi_- [\phi_+ - \frac{M \phi_-}{\Gamma(a) \sqrt{a(a+1)}}]}{\Gamma(a) \sqrt{a(a+1)}} s^{2a-4}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \Psi_3 = & \frac{\pi}{4 p^4} [\Gamma(a + 3/2) \phi_{\pi} (\phi_+ - \frac{M \phi_-}{\Gamma(a) \sqrt{a(a+1)}})]^2 s^{2a} + \\ & + \frac{\pi}{a(a+1)} (\frac{\Gamma(a+3/2)}{\Gamma(a)} \phi_{\pi} \phi_-)^2 s^{2a-1} + \frac{\pi}{p^2} (\Gamma(a + 3/2) \phi_{\pi})^2 \times \\ & \times \phi_- [\phi_+ - \frac{M \phi_-}{\Gamma(a) \sqrt{a(a+1)}}] \frac{s^{(2a-4)}}{\Gamma(a) \sqrt{a(a+1)}}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

(В этих формулах мы опустили индексы (\pm) , характеризующие изотопические состояния). Чтобы выяснить физический смысл этих формул, учтем, что при $s \rightarrow \infty$ $t = 0(1)$ $\theta = 0(s^{-1/2})$.

Видим, что при $\theta = 0$ (рассеяние вперед) $d\sigma/d\Omega$ определяется лишь комбинацией $\phi_{\pi} \phi_{-}$. Из оптической теоремы получаем (при $\theta = 0$ $t^{(+)}$ чисто мнимая, если $a_+(0) = 1$):

$$\sqrt{2} \cdot 15 \cdot \phi_{\pi}^{(+)}(0) \phi_{-}^{(+)}(0) M = \sigma_{\pi N}^{(+)}(\infty). \quad (4.25)$$

С другой стороны, таким же образом:

$$\frac{3}{4} \pi (\phi_{\pi}^{(+)}(0))^2 = \sigma_{\pi\pi}^{+}(\infty), \quad (4.26)$$

$$\text{Отсюда} \quad \phi_{-}^{(+)}(0) = \frac{1}{15} (\frac{3}{8\pi})^{1/2} \frac{\sigma_{\pi N}^{(+)}(\infty)}{M \sqrt{\sigma_{\pi\pi}^{+}(\infty)}}, \quad (4.27)$$

так что вычеты при $\theta = 0$ выражаются через физические величины (см. § 4).

Отметим любопытное свойство дифференциального сечения: оно не зависит от поляризационного состояния мишени. Интегрируя $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ по углам, можно показать, что упругое сечение убывает с энергией как $(\log s)^{-1}$. Другое интересное свойство однополюсного приближения состоит в том, что вещественная часть амплитуды (если $a_+(0) = 1$) исчезает при $\theta = 0$, однако она того же порядка по s при ненулевых углах, как и мнимая часть.

Исследуя теперь выражение относительной поляризации $\langle \vec{\sigma} \rangle (\frac{d\sigma}{d\Omega})^{-1}$, видим следующее. При неполяризованной мишени ($|\vec{\xi}| = 0$) поляризация отсутствует. Если же нуклоны в начальном состоянии поляризованы, то при небольших углах рассеяния они остаются поляризованы в таком же направлении, как и до рассеяния. При увеличении угла появляются компоненты поляризации вдоль \vec{e} и $\vec{e} \times \vec{\xi}$; однако последние компоненты убывают с энергией относительно компоненты вдоль $\vec{\xi}$. Нетрудно убедиться в том, что если учесть вклад некоторого второго полюса, то интерференционный член между двумя полюсами и при неполяризованной мишени приведет к возникновению поляризации, пропорциональной $\vec{e} \sin \theta$. Эта поляризация, однако, уменьшается с ростом энергии в той степени, в какой убывает относительный вклад второго полюса.

5. Заключительные замечания

Обратим внимание на одну трудность теории. Как видно из предыдущих формул, амплитуда имеет полюс, если при некотором t_0 $a(t_0)$ обращается в нуль ("призрак"). Это физически бессмысленно, и для избежания такой трудности Гелл-Манн предлагал в некотором смысле "удвоить" траектории, так чтобы полюса пар траекторий могли друг друга скомпенсировать. Однако это излишне, так как можно утверждать, что "призрак" автоматически исчезает и без удвоения траекторий, если амплитуда унитарна во всех каналах (действительно, унитарная амплитуда обязательно ограниче-

на). Таким образом, появление призрака было бы связано с неунитарностью амплитуды в s -канале. Подобно тому, как мы здесь исследовали амплитуду πN -рассеяния можно рассмотреть и другие процессы. Здесь хотим лишь указать на одно интересное свойство однополюсного приближения. Как мы видели из предыдущего, когерентная амплитуда πN -рассеяния при $t=0$ пропорциональна величине:

$$\phi_{\pi}(0)\phi_{+}(0).$$

Рассмотрим процессы

$$\pi\pi \rightarrow \pi\pi, \quad \pi N \rightarrow \pi N, \quad NN \rightarrow NN$$

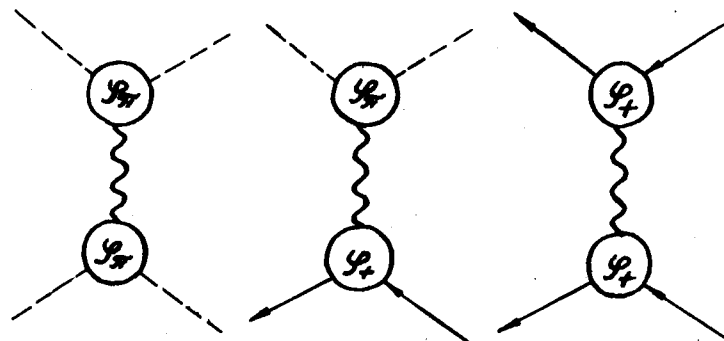


Рис. 6.

Амплитуды рассеяния вперед (и, следовательно, по оптической теореме, полные сечения) при $s \rightarrow \infty$ пропорциональны величинам:

$$\begin{aligned} \sigma_{\pi\pi} &= (\phi_{\pi}(0))^2, \\ \sigma_{\pi N} &= \phi_{\pi}(0) \cdot \phi_{+}(0), \\ \sigma_{NN} &= \phi_{+}(0)\phi_{+}(0). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Факторы пропорциональности одинаковы, так как массы и спины частиц роли не играют при $s \rightarrow \infty$.

Отсюда ясно, что три сечения не являются независимыми, а между ними имеет место соотношение:

$$\frac{\sigma_{\pi N}}{\sigma_{\pi\pi}} = \frac{\sigma_{NN}}{\sigma_{\pi N}}, \quad (5.2)$$

что в принципе можно экспериментально проверить. Ясно, что подобные соотношения можно получить и для других процессов.

В настоящее время положение теории процессов при высоких энергиях не является легким. Метод комплексных угловых моментов в сочетании с перекрестной симметрией позволяет сделать некоторые теоретические предсказания относительно различных процессов, однако, пока еще совсем не ясно, в какой области переменных можно говорить о том, что амплитуду рассеяния определяет один полюс Редже, и существует ли такая область. Кроме того, до сих пор не удалось получить количественные предсказания в мезонной теории. В самом деле, есть указания на то, что в случае достаточно сильной связи многочастичные состояния играют преобладающую роль и что в этом случае нет никакой области передач, в которой доминирует один лишь полюс Редже. По-видимому, разрешить проблемы физики высоких энергий можно лишь в тесном содружестве экспериментаторов и теоретиков.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Функция комплексного переменного $f(z)$ называется аналитической (регулярной) в точке (или области), если она однозначна и обладает в этой точке (области) непрерывной производной.

Если $f(z)$ - аналитическая в области "С", то иногда можно найти такую область "С'", которая содержит в себе "С", и в этой новой области определить такую аналитическую $F(z)$, что в области "С" она совпадет с $f(z)$. Такое расширение области определения функции $f(z)$ называется ее аналитическим продолжением.

Если $f(z)$ в точке $z = z_0$ не аналитическая, то различают следующие случаи:

1. Точка z_0 называется полюсом m -го порядка, если $f(z) \rightarrow \infty$ в окрестности этой точки, как $1/(z - z_0)^m$ при $z \rightarrow z_0$.
2. $z = z_0$ существенно особая точка, если при $z \rightarrow z_0$ $f(z)$ не стремится к ∞ но и не ограничена.
3. $z = z_0$ точка ветвления $f(z)$, если при аналитическом продолжении вокруг этой точки функция меняет свои значения. Понятие о точке ветвления тесно связано с некоторыми свойствами многозначных функций комплексного переменного, на которых остановимся подробнее.

Рассмотрим функцию $w(z)$, определенную как $w^2 = z$. Неоднозначность этой функции возникает вследствие того, что любым двум значениям z_0 , имеющим равные модули $|z_0|$, но различающиеся на 2π значения аргументов, очевидно, соответствуют два равных по модулю, но противоположных по знаку значения $w(z)$.

Таким образом, если совершить обход вокруг точки z_0 по окружности, то при одном обороте вокруг z_0 ($0 < \arg z < 2\pi$) функция $w(z)$ примет положительные значения, а при втором обороте ($2\pi < \arg z < 4\pi$) $w(z)$ будет принимать последовательно те же значения по модулю, но с противоположным знаком. Мысленно расщепим теперь плоскость $w(z)$ на две плоскости T_+ и T_- с вырезами по вещественной оси от 0 до ∞ , как показано на рис. 1, и сопоставим плоскости T_+ все положительные значения $w(z)$, которые она принимает, если аргумент z изменяется от 0 до 2π . Второй плоскости T_- поставим в соответствие все значения $w(z)$, которые она принимает при $2\pi < \arg z < 4\pi$. Согласно нашему выбору, на этом листе $w(z)$ отрицательно определена.

После введения плоскостей T_+ и T_- многозначная аналитическая функция $w(z)$ оказалась разложенной на две аналитические функции, каждая из которых однозначна в соответствующей плоскости T . Такое расщепление области изменения $w(z)$ на две плоскости T_+ и T_- несколько искусственно, и мы объединим их в единую двулистную плоскость. Так как значения $w(z)$ при $\arg z = 0$ и $\arg z = 4\pi$ совпадают при равных значениях модулей, то соединим верхнюю линию выреза на плоскости с нижней линией выреза на плоскости T_+ . Эта линия соединения обеих плоскостей T_- называется верхним берегом разреза функции $w(z)$. Аналогично нижнюю линию выреза плоскости T_+ соединим верхней линией выреза на плоскости T_- , так как $w(z)$ при $\arg z = 2\pi$ совпадают на обеих плоскостях при одном и том же модуле z (х). Соответствующая линия соединения плоскостей T_+ и T_- обычно называется нижним берегом разреза $w(z)$.

Таким образом созданная двулистная поверхность T объединяет две отдельные аналитические функции в одну однозначную аналитическую функцию везде на этой двулистной поверхности, кроме точки $z = 0$. В этой точке $w(z)$ теряет определенность, а при аналитическом продолжении вокруг этой точки теряет однозначность, т.е. $z = 0$ является точкой ветвления для функции $w(z) = \sqrt{z}$.

Вычетом в точке $z = z_0$ функции $f(z)$ называется коэффициент при $(z - z_0)^{-1}$ в разложении $f(z)$ в ряд Лорана.

Интеграл $\int_a^b f(z) dz$ от аналитической функции сохраняет свое значение, если деформировать путь интегрирования от "а" до "в" так, чтобы он не проходил при этом ни через одну особую точку $f(z)$.

Если $f(z)$ аналитична в области "С" с контуром L , то значение $[f(z)]^{(n)}$ в любой точке внутри "С" выражается через ее значение на контуре по формуле:

х) Пересечению плоскостей листов T_+ и T_- не следует придавать значения.

$$[f(z)]^{(n)} = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{f(z')}{(z' - z)^{n+1}} dz'$$

Вычет $f(z)$ в полюсе m -ого порядка находится по формуле:

$$\text{Вычет } [f(z)]_{z=z_0} = \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z-z_0)^m] \right]_{z=z_0}$$

Если $f(z)$ аналитическая в области "С" с контуром L , то интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_L f(z) dz$ равен сумме вычетов $f(z)$ во всех особых точках.

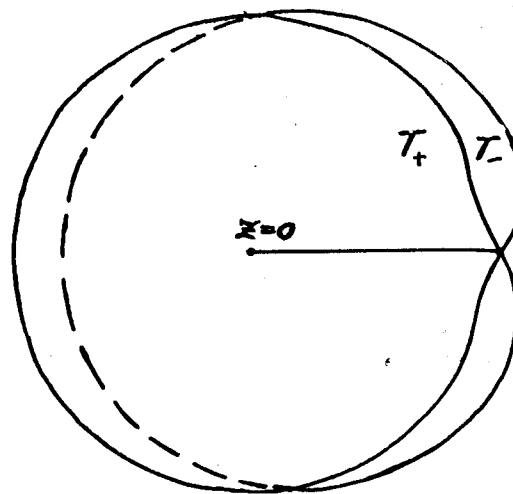


Рис. 7.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Вясним некоторые важные свойства полюсов Редже. Во-первых, заметим, что "траектория" полюса в l -плоскости является аналитической функцией от инвариантной энергии с положительной мнимой частью.

Вместо общего доказательства этого утверждения убедимся в нем, применяя диаграммную технику.

Рассмотрим для простоты скалярные частицы. "Редже-частице" с траекторией $\alpha(k^2)$ соответствует функция Грина, пропорциональная величине

$$\frac{2\alpha(k^2) + 1}{\sin \alpha(k^2) \pi}$$

Очевидно, что в ℓ -представлении функцией Грина является соответственно:

$$\delta_{\nu\nu'} / \ell - a(k^2)$$

(простой полюс в ℓ -плоскости, причем инвариантные проекции спина ν и ν' те же самые в начальном состоянии). В теории уравнения Бете-Солпитера доказано, что если константа связи g^2 стремится к нулю, траектория $a(k^2)$ переходит в функцию:

$$a_0^{(n)}(k^2) = -n + \frac{1}{2}\theta(k^2 - 4\mu^2).$$

Здесь $n = 1, 2, 3, \dots$ $\theta(x)$ - ступенчатая функция

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

Таким образом, при выключении взаимодействия, функция Грина "Редже-частицы" в ℓ -представлении имеет вид

$$g_{\nu\nu'}^{(0)}(k^2) = \frac{\delta_{\nu\nu'}}{\ell - a_0^{(n)}(k^2)} = \frac{\delta_{\nu\nu'}}{\ell + n - \frac{1}{2}\theta(k^2 - 4\mu^2)}$$

Аналогично тому, как для "обычных" частиц полную функцию Грина можно вычислить суммированием диаграмм собственно-энергетического типа (см. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, "Введение в теорию квантованных полей", гл. 1У), находим здесь полную функцию Грина "Редже-частицы" $g_{\nu\nu'}(k^2)$ суммированием простейших собственно-энергетических диаграмм:

$$\tilde{g}_{\nu\nu'}(k^2) = g_{\nu\nu'}^{(0)}(k^2) + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \dots$$

Рис. 8.

Обозначим собственно-энергетическую часть символом $\Pi_{\nu\nu'}(k^2)$ и учтем, что она является диагональным матричным элементом, так что

$$\Pi_{\nu\nu'}(k^2) = \delta_{\nu\nu'} \Pi(k^2).$$

Таким же образом, если записать:

$$g_{\nu\nu'}(k^2) = \delta_{\nu\nu'} g(k^2), \quad g_{\nu\nu'}^{(0)}(k^2) = \delta_{\nu\nu'} g^{(0)}(k^2),$$

из рисунка сразу видим, что:

$$g(k^2) = g^{(0)}(k^2) + g^{(0)}(k^2) \Pi(k^2) g^{(0)}(k^2) + \\ + g^{(0)}(k^2) \Pi(k^2) g^{(0)}(k^2) \Pi(k^2) g^{(0)}(k^2) + \dots = \\ = g^{(0)}(k^2) [1 - \Pi(k^2) g^{(0)}(k^2)].$$

Учитывая выражение для $g^{(0)}$, получим

$$g(k^2) = \frac{1}{\ell - (-n + \frac{1}{2}\theta(k^2 - 4\mu^2) + \Pi(k^2))}.$$

Таким образом, для траектории полюса получим выражение:

$$a(k^2) = -n + \frac{1}{2}\theta(k^2 - 4\mu^2) + \Pi(k^2).$$

(Г.Домокош. Доклад, представленный на Стэнфордскую конференцию, 1963 г.).

Осталось вычислить собственно-энергетическую часть $\Pi(k^2)$. Она является аналитической функцией от k^2 , обладающей представлением (Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, цитированная работа, гл. IX):

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{dk}{k'^2 - k^2} \sigma(k'^2).$$

Вершине соответствует фактор

$$g\rho / 2\sqrt{\pi},$$

если частица со спином ℓ связана с двумя бесспиновыми частицами. Промежуточному состоянию из двух частиц соответствует фазовый объем $\frac{\rho}{E}$; здесь ρ - относительный импульс, E - полная энергия двух частиц в с.ц.м. Таким образом, согласно диаграмме:



Рис. 9.

$$\sigma(k^2) = \frac{g^2}{4\pi} E^{-1} \cdot p \cdot \theta(k^2 - 4\mu^2)(p) \alpha(k^2) + \alpha^*(k^2)$$

(Нужно учитывать, что "спин" Редже-частицы $\alpha(k^2)$).

Поскольку $p = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - 4\mu^2}$, $E = \sqrt{k^2}$, мы получим:

$$\sigma(k^2) = \frac{g^2}{8\pi} \sqrt{\frac{k^2 - 4\mu^2}{k^2}} (p^2)^{R \circ \alpha(k^2)} \theta(k^2 - 4\mu^2)$$

(Г.Домокош. Диссертация, 1963 г.).

Подставляя это выражение в формулу для $\Pi(k^2)$, мы получим выражение для траектории. Отсюда следует наше утверждение, поскольку $\sigma(k^2)$ заведомо положительная величина. Другим важным свойством траектории является тот факт, что $J \alpha(k^2)$ ведет себя при $k^2 \rightarrow 4\mu^2$, как $(k^2 - 4\mu^2)^{R \circ \alpha(4\mu^2 + \frac{1}{2})}$. В этом можно убедиться, если разлагать наше выражение для $\sigma(k^2)$ вокруг точки $k^2 = 4\mu^2$.

В общей теории доказывают так называемую теорему факторизации вычета полюсов. Теорема утверждает, что вычет полюса Редже состоит из двух факторов, каждый из которых зависит от квантовых чисел лишь одной пары частиц.

В нашем подходе это утверждение является почти тривиальным. Действительно, если рассматривать рассеяние двух частиц, скажем, "а" и "в", с одной "Редже-частицей" в промежуточном состоянии

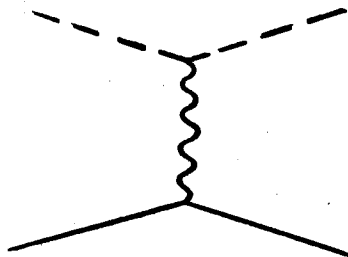


Рис. 10.

то, согласно правилам диаграммной техники, парциальная амплитуда (с точностью до постоянных факторов) равна:

$$A_\ell = \frac{g p^{\alpha(t)} \cdot f q^{\alpha^*(t)}}{\ell - \alpha(t)}$$

где p , q - модули относительных импульсов:

$$p = \frac{1}{2} \sqrt{t - 4\mu_a^2},$$

$$q = \frac{1}{2} \sqrt{t - 4\mu_b^2}$$

a , b и f - константы связи Редже-частицы с "а" и "в" - частицами, соответственно.

Форма выражения для A_ℓ явно показывает правильность нашего утверждения о факторизации вычета полюса при $\ell = \alpha(t)$. Поправки к вершинам ситуацию не меняют, в этом случае константы f и g надо заменить на соответствующие инвариантные формфакторы:

$$A_\ell = \frac{G(t) p^{\alpha(t)} F(t) p^{\alpha^*(t)}}{\ell - \alpha(t)}$$

Л и т е р а т у р а

1. В.Н.Грибов. ЖЭТФ, 41, 667, 1962 (1961).
2. В.Н.Грибов, И.Я.Померанчук. ЖЭТФ, 42, 1141; 1982 (1962).
3. В.Н.Грибов, И.Я.Померанчук. ЖЭТФ, 43, 308 (1962).
4. Г.Домокош. ДАН СССР, 144, 1279 (1962).
5. Г.Домокош. ДАН СССР, 145, 76 (1962).
6. R.Blankenberger, M.Goldberger. Phys. Rev., 126, 766 (1962).
7. G.Chew, S.Frautahi. Phys. Rev. Letters, 7, 394 (1961).
8. G.Chew, S.Frautahi. Phys. Rev. Letters, 8, 41 (1962).
9. G.Chew, S.Frautahi, S.Mandelstam. Phys. Rev., 126, 1202 (1962).
10. G.Domokos. Nuovo Cim., 23, 1175 (1962).
11. G.Domokos. Nuovo Cim., 26, 1301 (1962).
12. G.Domokos. Phys. Letters., 1, 349 (1962).
13. S.Drell. 1962 Intern. Conf. on High-Energy Physics at CERN.
14. S.Frautahin, M.Gell-Mann, F.Zachariasen. Phys. Rev., 126, 2204 (1962).
15. M.Gell-Mann. Phys. Rev. Letters., 8, 263 (1962).
16. P.Matthews Proc. Phys. Soc., 80, N 513, 1 (1962).
17. T.Regge. Nuovo Cim., 14, 951 (1959).
18. T.Regge. Nuovo Cim., 18, 947 (1960).
19. B.Udgaonkar. Phys. Rev. Letters, 8, 142 (1962).
20. B.Udgaonkar, M.Gell-Mann. Phys. Rev. Letters, 8, 346 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
8 октября 1963 г.