

01-69
ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

P-143

А.А.Логунов и А.Н.Тавхелидзе

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

1958 г.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

P-143

А.А. Логунов и А.Н. Тархелидзе

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

1958 г.

А Н Н О Т А Ц И Я

Получены дисперсионные соотношения для реакции с переменным числом частиц (в начале реакции фермион и бозон, а в конце фермион и два одинаковых бозона). Указаны случаи, когда в дисперсионных соотношениях ненаблюдаемая область энергии отсутствует. На примере процесса $\gamma + p \rightarrow e + \gamma + p$ дается обоснование дисперсионных соотношений при отсутствии ненаблюдаемой области энергии.

В в е д е н и е

В последнее время уделяется значительное внимание дальнейшей разработке вопросов теории дисперсионных соотношений. После исследований Н.И. Боголюбова⁽¹⁾ стало ясно, что дисперсионные соотношения являются следствием общих принципов локальной теории поля. В этой связи опытная проверка дисперсионных соотношений могла бы пролить свет (в случае нарушения их) на вопрос о локальности элементарных взаимодействий. Кроме принципиальных выводов, которые могут быть получены при экспериментальной проверке дисперсионных соотношений важное значение имеет дальнейшая разработка метода дисперсионных соотношений как в направлении исследования ненаблюдаемой области в уже полученных дисперсионных соотношениях, так и в направлении расширения метода для изучения реакций с переменным числом частиц.

Попытка обоснования дисперсионных соотношений для реакций с переменным числом частиц была сделана в работе⁽²⁾. Однако, предложенный в этой работе метод обоснования дисперсионных соотношений является неубедительным и встречает серьезные возражения⁽¹⁾. В настоящей работе следуя^(1,3) рассматриваются вопросы теории дисперсионных соотношений для реакций с переменным числом частиц следующего типа:

$$\gamma + p \rightarrow 2\gamma + p, \quad \gamma + p \rightarrow 2\pi + p, \quad \pi + p \rightarrow 2\pi + p, \quad \pi + p \rightarrow 2\gamma + p$$

При этом мы не будем учитывать электромагнитные поправки высшего порядка, фиксируя внимание на изучении лишь главного члена амплитуды.

§ I. Построение причинных амплитуд

В работе (4) Н.Н.Боголюбова была дана общая формулировка принципа причинности в виде явного условия на матрицу рассеяния^{x)}:

$$\frac{\delta J_p(x)}{\delta \varphi_{p'}(x')} = 0 \quad x' \leq x, \quad \text{где} \quad J_p(x) = i \frac{\delta S}{\delta \varphi_p(x)} S^+$$

(I.1)

Такая формулировка принципа причинности весьма эффективна при построении запаздывающих амплитуд. Однако, для построения опережающих амплитуд удобно пользоваться условием причинности, записанным несколько в другой форме:

$$\frac{\delta \Lambda_p(x)}{\delta \varphi_{p'}(x')} = 0 \quad x' \geq x, \quad \text{где} \quad \Lambda_p(x) = i \frac{\delta S^+}{\delta \varphi_p(x)} S$$

(I.2)

Легко установить, что условие (I.1) связано с условием (I.2) следующим соотношением:

$$\frac{\delta \Lambda_p(x)}{\delta \varphi_{p'}(x')} = - S^+ \frac{\delta J_p(x')}{\delta \varphi_{p'}(x)} S$$

(I.3)

В дальнейшем мы будем изучать реакции вида: $\gamma + p \rightarrow p + 2\gamma$

$$\pi + p \rightarrow p + 2\gamma, \quad \pi + p \rightarrow p + 2\pi, \quad \gamma + p \rightarrow p + 2\pi$$

т.е. когда в начале реакции имеется нуклон и один бозон, а в конце - нуклон и два бозона. Перейдем к построению причинных

^{x)} Под полем φ_p мы в дальнейшем будем понимать вещественные мезонные или электромагнитные поля.

амплитуд для указанных выше типов реакций. Обозначим импульс начального и конечного нуклона через P и P' , а импульсы начального и конечных бозонов через q и q', q'' соответственно. Тогда матричный элемент процесса можно записать в виде:

$$S_{\alpha, \omega}(q, q', q'') = (2\pi)^{q/2} \langle P'S' | \Psi_{P'}^{(-)}(q') \Psi_{P''}^{(-)}(q'') S \Psi_P^{(+)}(q) | PS \rangle \quad (I.4)$$

Здесь $|PS\rangle$ обозначает амплитуду состояния рассеивателя, а составные индексы α и ω , относящиеся соответственно к начальному и конечному состояниям, включают в себя все квантовые числа, характеризующие систему за исключением импульсов начального и конечных бозонов. Переставляя в (I.4) оператор рождения $\Psi_{P'}^{(-)}(q')$ на крайнее левое место и учитывая стабильность состояния

$$S^+ |PS\rangle = |PS\rangle$$

получим

$$S_{\alpha, \omega}(q, q', q'') = \frac{-i(2\pi)^3}{\sqrt{2q_0}} \int e^{-iqx} \langle P'S' | \Psi_{P'}^{(-)}(q') \Psi_{P''}^{(-)}(q'') \hat{J}_P(x) | PS \rangle dx$$

откуда после перестановки операторов поглощения на крайнее правое место имеем:

$$S_{\alpha, \omega}(q, q', q'') = -\frac{i}{\sqrt{8q'_0 q''_0 q_0}} \int e^{iq'_0 x' + iq''_0 x'' - iq_0 x} \langle P'S' | \frac{\delta^2 J_P(x)}{\delta \Psi_{P'}(x') \delta \Psi_{P''}(x'')} | PS \rangle dx dx' dx'' \quad (I.5)$$

на основании соображений трансляционной инвариантности

$$\langle P'S' | \frac{\delta^2 J_P(x)}{\delta \Psi_{P'}(x') \delta \Psi_{P''}(x'')} | PS \rangle = e^{i(P'-P)x} \langle P'S' | \frac{\delta^2 J_P(x)}{\delta \Psi_{P'}(x'-x) \delta \Psi_{P''}(x''-x)} | PS \rangle$$

выражение (I.5) может быть записано в следующем виде

$$S_{\alpha, \omega}(q, q', q'') = \frac{i(2\pi)^4}{\sqrt{8q_0 q'_0 q''_0}} \delta(p+q-p'-q'-q'') T_{\alpha, \omega}^{\text{ret}}(q, q', q'') \quad (\text{I.6})$$

где

$$T_{\alpha, \omega}^{\text{ret}}(q, q', q'') = - \int e^{i(q'x' + q''x'')} dx' dx'' \langle p's' | \frac{\delta^2 \mathcal{L}_P(0)}{\delta \psi_{p'}(x') \delta \psi_{p''}(x'')} | pS \rangle$$

Учитывая условие причинности (I.1) легко видеть, что интегрирование в (I.2) ведется по области

$$x' > 0, \quad x'' > 0 \quad (\text{I.7})$$

Опережающая амплитуда связана с матричным элементом следующего вида

$$S_{\alpha, \omega}^+(q, q', q'') = \langle p's' | \psi_{p'}^{(-)}(q') \psi_{p''}^{(-)}(q'') S^+ \psi_p^{(+)}(q) | pS \rangle (2\pi)^{9/2} \quad (\text{I.8})$$

Отсюда, принимая во внимание (I.2) и используя такую же технику, как и при выводе (I.6), получим

$$S_{\alpha, \omega}^+(q, q', q'') = -i \frac{(2\pi)^4}{\sqrt{8q_0 q'_0 q''_0}} \delta(p+q-p'-q'-q'') T_{\alpha, \omega}^{\text{adv}}(q, q', q'')$$

где

$$T_{\alpha, \omega}^{\text{adv}}(q, q', q'') = \int e^{i(q'x' + q''x'')} dx' dx'' \langle p's' | \frac{\delta^2 \mathcal{L}_P(0)}{\delta \psi_{p'}(x') \delta \psi_{p''}(x'')} | pS \rangle \quad (\text{I.9})$$

интегрирование в (I.9) ведется по области

$$x' < 0, \quad x'' < 0. \quad (\text{I.10})$$

С помощью (I.6) и (I.9) антиэрмитова часть амплитуды процесса может быть записана в виде

$$A_{\alpha, \omega}(q, q', q'') = \frac{1}{2i} (T_{\alpha, \omega}^{\text{ret}}(q, q', q'') - T_{\alpha, \omega}^{\text{adv}}(q, q', q'')) \quad (\text{I.11})$$

Прежде чем заняться детальным анализом антиэрмитовой части амплитуды, остановимся на изучении кинематики процесса.

2. ~~Вывод~~ процесса

Согласно закону сохранения энергии-импульса системы имеем:

$$p + q = p' + q' + q'' \quad (I.I2)$$

В дальнейшем будем работать в системе отсчета

$$\vec{p} + \vec{p}' = 0 \quad (I.I3)$$

Вместо векторов q, q'' введем вектора Q, Δ определив их следующим образом:

$$Q = \frac{1}{2}(q' + q''), \quad \Delta = \frac{1}{2}(q' - q'') \quad (I.I4)$$

Легко видеть, что вектор Q является временно подобным.

Фиксируя 4-х мерный квадрат вектора

$$Q^2 = m_Q^2 \quad (I.I5)$$

Закон сохранения энергии-импульса (I.I2) в выбранной нами системе отсчета может быть записан в виде

$$\vec{q} - 2\vec{Q} = -2\vec{P} \quad (I.I6)$$

$$(\vec{q} - 2\vec{Q})(\vec{q} + 2\vec{Q}) = 4m_Q^2 - m^2$$

где m - масса начального бозона. Откуда после элементарных вычислений находим

$$\vec{q} = \lambda \vec{e} - (1 + \epsilon)\vec{P}, \quad 2\vec{Q} = \lambda \vec{e} + (1 - \epsilon)\vec{P} \quad (I.I7)$$

где \vec{e} - единичный вектор, ортогональный вектору \vec{P} ,

$$\epsilon = \frac{4m_Q^2 - m^2}{4P^2}, \quad \frac{\lambda^2}{4} = E^2 - m_Q^2 - \frac{1}{4}(1 - \epsilon)^2 P^2 \quad (I.I8)$$

через E мы обозначим нулевую компоненту вектора Q . В настоящей работе мы рассмотрим реакции, в которых рождаются бозоны с одинаковыми массами:

$$q_1^2 = q_2^2 = m_1^2 \quad (I.19)$$

Учитывая (I.15) и (I.19) находим

$$\Delta^2 = -m_0^2 + m_1^2, \quad Q \Delta = 0 \quad (I.20)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать свойства аналитичности амплитуды процесса относительно переменной E . Из-за ортогональности векторов Q и Δ следует, что вектор Δ , вообще говоря, является функцией энергии E , что делает крайне затруднительным доказательство дисперсионных соотношений. Дисперсионные соотношения особенно интересны, когда ненаблюдаемая область отсутствует. В этом случае дисперсионные соотношения связывают лишь наблюдаемые величины.

В том случае, если дисперсионные соотношения содержат большую ненаблюдаемую область ценность этих соотношений снижается не только ввиду того, что строгое доказательство этих соотношений делается крайне затруднительным, но также и в связи с тем, что такие соотношения значительно труднее использовать для получения какой-либо информации о физических процессах.

В рассмотренных нами реакциях удается при надлежащем выборе вектора Δ получить дисперсионные соотношения, в которых ненаблюдаемая область энергий или полностью отсутствует, или является не очень значительной. Выберем направление вектора Δ таким образом, чтобы он был ортогонален векторам \vec{p} и \vec{e} . Тогда из условий (I.20) следует, что

$$\Delta_0 = 0, \quad \Delta^2 = m_0^2 - m_1^2, \quad m_0^2 \gg m_1^2 \quad (I.21)$$

Таким образом, в выбранной нами системе отсчета амплитуда процесса будет являться функцией переменных $E, \vec{e}, \vec{p}, \vec{\Delta}$ причем при изменении переменной E вектора $\vec{e}, \vec{p}, \vec{\Delta}$ фиксированы.

§ 3. Анализ антиэрмитовой амплитуды процесса

Займемся изучением антиэрмитовой части амплитуды процесса.

Рассмотрим выражение:

$$A_{q, q', q''} = -\frac{i}{\sqrt{8q_0 q'_0 q''_0}} \int e^{i(q'x' + q''x'' - qx)} dx dx' dx'' \langle p's' | \frac{\delta^2 \mathcal{L}_P(x)}{\delta \varphi_{p'(x)} \delta \varphi_{p''(x'')}} + \frac{\delta^2 \Lambda_P(x)}{\delta \varphi_{p'(x)} \delta \varphi_{p''(x'')}} | pS \rangle \quad (3.1)$$

Из сравнения (3.1) с (I.II) легко видеть:

$$A_{q, q', q''} = -\frac{2(2\pi)^4}{\sqrt{8q_0 q'_0 q''_0}} \delta(p + q - p' - q' - q'') A_{\alpha, \omega}(q, q', q'') \quad (3.2)$$

Учитывая равенство

$$\Lambda_P(x) = -S^+ \mathcal{L}_P(x) S \quad (3.3)$$

а также стабильность состояний $|pS\rangle$, $|p's'\rangle$, легко получить

$$\begin{aligned} & \langle p's' | \frac{\delta^2 \mathcal{L}_P(x)}{\delta \varphi_{p'(x)} \delta \varphi_{p''(x'')}} + \frac{\delta^2 \Lambda_P(x)}{\delta \varphi_{p''(x'')} \delta \varphi_{p'(x')}} | pS \rangle = \\ & = i \langle p's' | D_{p, p''}(x, x'') \delta_{p', p'}(x') + D_{p, p'}(x, x') \delta_{p'', p''}(x'') \\ & + \delta_p(x) D_{p', p''}(x', x'') - D_{p', p''}(x', x'') \delta_p(x) - \delta_{p'}(x') D_{p, p''}(x, x'') \\ & - \delta_{p''}(x'') D_{p, p'}(x, x') | pS \rangle \end{aligned} \quad (3.4)$$

где
$$D_{p,p'}(x,x') = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta J_p(x)}{\delta \varphi_{p'}(x')} + \frac{\delta J_{p'}(x)}{\delta \varphi_p(x)} \right)$$

Подставляя (3.4) в (3.1) и учитывая (3.2) антиэрмитова часть амплитуды может быть представлена в следующем виде

$$A_{\alpha,\omega}(q,q',q'') = \pi \sum_n \int d\vec{k}_n \left\{ \delta(p'+q'-k_n) V_{q'}(n,p') D_{q,q''}(p,n) - \delta(p-q'-k_n) D_{q,q''}(n,p') V_{q'}(p,n) + \delta(p'+q''-k_n) V_{q''}(n,p') D_{q,q'}(p,n) - \delta(p-q''-k_n) D_{q,q'}(n,p') V_{q''}(p,n) + \delta(p'+q'+q''-k_n) D_{-q',q''}(n,p') V_{q'}(p,n) - \delta(p-q'-q''-k_n) V_{q''}(n,p') D_{-q',q''}(p,n) \right\} \quad (3.5)$$

где
$$(2\pi)^4 \delta(p-q'-k_n) D_{q,q''}(n,p') = \int e^{iq''x''-iqx} dx dx'' \langle p's' | D_{p,p''}(x,x'') | n \rangle$$
 (3.6)

$$V_{q'}(n,p') = \langle p's' | J_{p'}(0) | n \rangle.$$

При получении (3.5) были использованы свойства трансляционной инвариантности матричных элементов, а также предположение, что оператор энергии-импульса обладает полной системой векторов состояний. Проводя интегрирование в (3.5), получим:

$$A_{\alpha,\omega}(q,q',q'') = \pi \sum_n \left\{ V_{q'}(n,p'') D_{q,q''}(p,n) \delta(p'_0+q'_0-\sqrt{M_n^2+(\vec{p}'+\vec{q}')^2}) - \delta(p_0-q'_0-\sqrt{M_n^2+(\vec{p}-\vec{q}')^2}) D_{q,q''}(n,p') V_{q'}(p,n) + \delta(p'_0+q''_0-\sqrt{M_n^2+(\vec{p}'+\vec{q}'')^2}) V_{q''}(n,p') D_{q,q'}(p,n) \right\} \quad (3.7)$$

$$- \delta(p_0 - q_0'' - \sqrt{M_n^2 + (\vec{p} - \vec{q}'')^2}) D_{q, q'}(n, p') V_{q''}(p, n)$$

$$+ \delta(p_0' + q_0' + q_0'' - \sqrt{M_n^2 + (\vec{p}' + \vec{q}' + \vec{q}'')^2}) D_{-q', q''}(n, p') V_q(p, n)$$

$$+ \delta(p_0 - q_0' - q_0'' - \sqrt{M_n^2 + (\vec{p} - \vec{q}' - \vec{q}'')^2}) V_q(n, p') D_{-q', q''}(p, n)$$

Рассмотрим δ - функции выражения (3.7). Легко показать, что δ - особенности этих функций в системе отсчета, где сумма импульсов нуклона до и после реакции равна нулю, будет при энергиях:

$$E' = \pm \frac{M_n^2 - M^2 + m_q^2 - m_l^2 - \frac{1}{4} m_q^2 - \vec{p}^2}{2\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}$$

$$E'' = \pm \frac{M_n^2 - M^2 - 2m_q^2 - 2\vec{p}^2 - \frac{1}{2} m^2}{4\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}} \quad (3.8)$$

Учитывая (I.2I), легко убедиться, что:

$$|E''| < |E'| \quad (3.9)$$

На основании (3.8) δ - особенности функций при $M_n = M$ будут соответственно при энергиях

$$E_1' = \pm \frac{m_q^2 - m_l^2 - \frac{1}{4} m^2 - \vec{p}^2}{2\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}$$

$$E_1'' = \pm \frac{m_q^2 + \vec{p}^2 + \frac{1}{4} m^2}{2\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}} \quad (3.10)$$

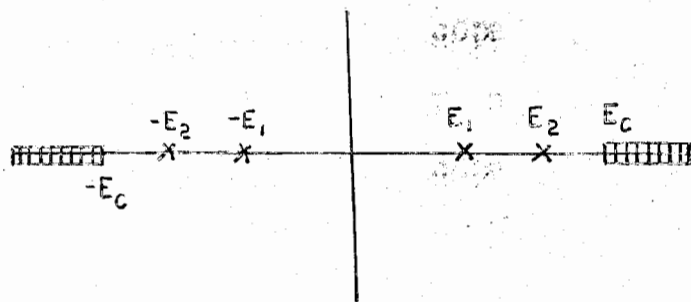
Если предположить, что между M и $M+\mu$ нет никаких связанных состояний мезон-нуклонной системы, то полагая в (3.8) $M_n \gg M+\mu$ получим, что непрерывный спектр лежит в области, где

$$|E| \geq \frac{2M\mu + \mu^2 - 2m_Q^2 - 2p^2 - \frac{1}{2}m^2}{4\sqrt{p^2 + M^2}} \quad (3.11)$$

Если предположить, что

$$(m_Q^2 + p^2) < \frac{1}{2}(M\mu + \frac{1}{2}\mu^2 - \frac{1}{4}m^2), \quad M\mu + \frac{1}{2}\mu^2 > \frac{1}{4}m^2 \quad (3.12)$$

тогда непрерывный спектр лежит выше однонуклонных полюсов, и энергетический спектр антиэрмитовой части амплитуды процесса схематически может быть изображен следующим образом:



• |рис 1|

$$E_1 = \frac{p^2 + m^2 + \frac{1}{4}m^2 - m_Q^2}{2\sqrt{p^2 + M^2}}, \quad E_2 = \frac{p^2 + \frac{1}{4}m^2 + m_Q^2}{2\sqrt{p^2 + M^2}}, \quad E_c = \frac{M\mu + \frac{1}{2}\mu^2 - m_Q^2 - p^2 - \frac{m^2}{4}}{2\sqrt{p^2 + M^2}} \quad (3.13)$$

Необходимо отметить, что наблюдаемая область энергий продолжается от E_p (пороговое значение энергии)

$$E_p^2 = m_Q^2 + \frac{1}{4}(1-\epsilon)^2 p^2 \quad (3.14)$$

Ненаблюдаемая область в дисперсионных соотношениях будет отсутствовать, если непрерывный спектр начинается выше порога процесса

$$E_c \gg E_p \quad (3.15)$$

Условие (3.15) накладывает ограничение на возможные значения m_a^2 и \vec{p}^2 . Чтобы выписать эти ограничения в явном виде, мы обратимся к рассмотрению конкретных примеров:

а) Двойной комптон-эффект ($\gamma + p \rightarrow p + 2\gamma$).

В данном конкретном примере, полагая $m = m_1 = 0$ в формулах (3.13) и (3.14), получим:

$$E_1 = \frac{\vec{p}^2 - m_a^2}{2\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}, \quad E_2 = \frac{\vec{p}^2 + m_a^2}{2\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}, \quad E_c = \frac{M\mu + \frac{1}{2}\mu^2 - m_a^2 - \vec{p}^2}{2\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}, \quad E_p = \frac{1}{2}(|\vec{p}| + \frac{m_a^2}{|\vec{p}|}) \quad (3.16)$$

Отсюда условие отсутствия ненаблюдаемой области (3.15) можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \frac{\vec{p}^2 + m_a^2}{|\vec{p}|} \leq \frac{M\mu + \frac{1}{2}\mu^2 - m_a^2 - \vec{p}^2}{2\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}} \quad (3.17)$$

или после некоторых элементарных преобразований:

$$p^4(M + \mu)^2 + p^2 \left[2m_a^2(M + \frac{1}{2}\mu) - \mu^2(M + \frac{1}{2}\mu)^2 + \frac{1}{2}\mu^2 m_a^2 \right] + m_a^4 M^2 \leq 0 \quad (3.18)$$

Условие, при котором всегда существуют возможные значения импульса \vec{p}^2 , обеспечивающие выполнение неравенства (3.18), может быть записано в виде:

$$m_a^2 \leq \frac{1}{4} \mu^2 \quad (3.19)$$

Заметим, что если $m_Q^2 = \frac{1}{4} \mu^2$, то существует единственное значение импульса

$$\bar{P}_c^2 = \frac{1}{4} \mu^2 \frac{M}{M + \mu} \quad (3.20)$$

при котором выполняется (3.18), а если $m_Q^2 < \frac{1}{4} \mu^2$, то существует некоторый интервал значений \bar{P}^2 , включающий точку P_c , обеспечивающие выполнение неравенства (3.18) (см. рис. 2).

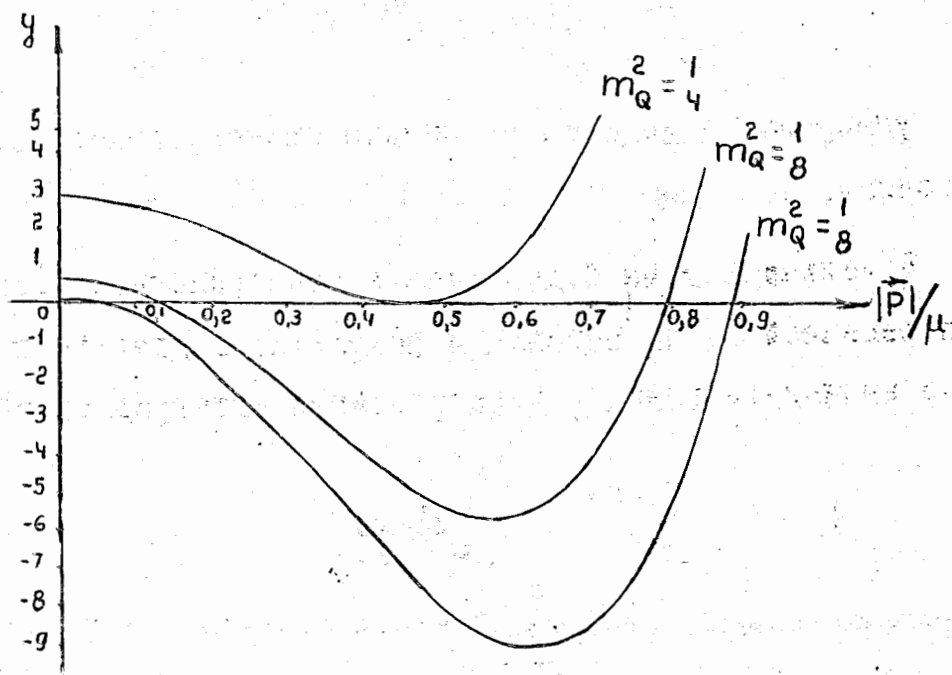


Рис. 2

Необходимо отметить следующий важный факт, что как и в обычном процессе рассеяния мезонов на нуклонах, в котором ненаблюдаемая область отсутствует лишь при рассмотрении рассеяния вперед, так и в рассматриваемом процессе ненаблюдаемая область ^{отсутствует} при некоторых ограничениях на физические величины, определяющие кинематику процесса ($\bar{P}^2, m_Q^2, \Delta^2$). Перейдем к рассмотрению антиэнергетической части амплитуды процесса для области энергий $|E| < E_c$.

На основании (3.7) легко видеть, что в рассматриваемой области

$A_{\alpha, \omega}(q; q', q'')$ может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
 A_{\alpha, \omega}(q; q', q'') = & \pi \sum_{S''} \left\{ \left(1 - \frac{E_1}{P_0}\right) [V_{q'}(P'', P') D_{q; q''}(P, P'') \right. \\
 & + V_{q''}(P'', P') D_{q; q'}(P, P'')] \delta(E + E_1) - \left(1 - \frac{E_1}{P_0}\right) [D_{q; q''}(P'', P') V_{q'}(P, P'') \\
 & + D_{q; q'}(P'', P') V_{q''}(P, P'')] \delta(E - E_1) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2E_2}{P_0}\right) [D_{-q'; q''}(P'', P') V_q(P, P'') \delta(E + E_2) \\
 & \left. - V_q(P'', P') D_{-q'; q''}(P, P'') \delta(E - E_2) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

где суммирование ведется по спидам промежуточного однонуклонного состояния.

В дальнейшем мы будем писать дисперсионные соотношения по переменной E . На основании результатов данного параграфа (3.21), можно вычислить вклад в дисперсионный интеграл от области $|E| < E_c$.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\pi} \int_{-E_c}^{E_c} dE' \left(\frac{E - E_0}{E' - E_0} \right)^{n+1} \frac{S \pm A_{\alpha, \omega}(E')}{E' - E} = \\
 & = \sum_{i=1,2} \left[\left(\frac{E_0 - E}{E_0 - E_i} \right)^{n+1} \frac{S \pm R_i(\vec{P}, \vec{\Delta}, \vec{e})}{E_i + E} + \left(\frac{E_0 - E}{E_0 - E_i} \right)^{n+1} \frac{S \pm \Omega_i(\vec{P}, \vec{\Delta}, \vec{e})}{E_i - E} \right]
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

где $R_i(\vec{P}, \vec{\Delta}, \vec{e}) = -\left(1 - \frac{E_1}{P_0}\right) [V_{q'}(P'', P') D_{q; q''}(P, P'') + V_{q''}(P'', P') D_{q; q'}(P, P'')]$

$$R_2(\vec{P}, \vec{\Delta}, \vec{e}) = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2E_2}{P_0}\right) D_{-q'; q''}(P'', P') V_q(P, P'')$$

$$\Omega_1(\vec{P}, \vec{\Delta}, \vec{e}) = -\left(1 - \frac{E_1}{P_0}\right) \left[D_{q, q''}(P'', P') V_{q', q}(P, P'') + D_{q, q'}(P, P') V_{q''}(P, P'') \right] \quad (3.23)$$

$$\Omega_2(\vec{P}, \vec{\Delta}, \vec{e}) = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2E_2}{P_0}\right) V_q(P'', P') D_{-q', q''}(P, P'')$$

S_{\pm} - оператор симметризации или антисимметризации по \vec{e} (см. § 4). Выясним смысл операторов V и D , входящих в выражение (3.23). На основании (3.6) имеем

$$V_{q'}(P'', P') = \langle P' S' | j_{P'}(0) | P'', S'' \rangle. \quad (3.24)$$

Из соображений релятивистской инвариантности и учитывая, что $p'^2 = p''^2 = M^2$, $q'^2 = 0$; матричный элемент оператора электромагнитного тока j_{ν} может быть представлен в виде (5)

$$\langle P' S' | j_{\nu}(0) | P'' S'' \rangle = \bar{u}_{S'}(P') \left\{ e \tau_P \gamma_{\nu} + \hat{\mu} \frac{1}{2} [(P' - P'')_{\lambda} \gamma_{\lambda} \gamma_{\nu}] \right\} u_{S''}(P''). \quad (3.25)$$

Здесь e - перенормированный электрический заряд нуклона,

а

$$\hat{\mu} = \mu'_P \tau_P + \mu_n \tau_n$$

где μ'_P , μ_n - аномальный магнитный момент протона и нейтрона,

$$\tau_P = \frac{1 + \tau_3}{2}, \quad \tau_n = \frac{1 - \tau_3}{2}$$

$u_{S'}(P')$ - дираковский спектр. СПИНОР

Перейдем к изучению оператора D . Для примера рассмотрим оператор $D_{q, q''}(P'', P')$, который на основании (3.2) и (3.6) определен следующим образом:

$$\delta(P' + q'' - q - P'') D_{q, q''}(P'', P') = \frac{1}{2} \int e^{i(q'' x'' - q x)} dx dx'' \langle P' S' | \frac{\delta j_P(x)}{\delta \varphi_{q''}(x'')} + \frac{\delta j_{P''}(x)}{\delta \varphi_P(x)} | P S \rangle. \quad (3.26)$$

Отсюда легко видеть, что оператор D совпадает с эрмитовой частью амплитуды рассеяния фотонов на нуклонах (6). Как вершинный оператор $V_{q'}(p, p'')$, так и оператор $D_{q, q''}(p'', p')$ имеет матричную структуру в спиновом и изотопическом пространствах. Спиновая структура оператора D составлена из некоторых независимых комбинаций векторов q, q'', p'', γ . Структурные функции эрмитовой части амплитуды $D_{q, q''}^{p'', p'}$ являются инвариантными функциями 2-х независимых инвариантов:

$$v = \frac{1}{2}(p' + p'') \cdot q'', \quad v_1 = \frac{1}{2}(q \cdot q'') \quad (3.27)$$

Из соображений релятивистской инвариантности оператор D может быть представлен в виде:

$$D_{q, q''}(p'', p') = \sum_S \Omega_S(v, v_1) \bar{u}(p') R_{p''}^S(\gamma, q, q'', p'') u(p''). \quad (3.28)$$

Для структурных функций $\Omega_S(v, v_1)$ можно написать дисперсионные соотношения по переменной v (7). Следует отметить, что структурные функции в системе отсчета $\vec{p}' + \vec{p}'' = 0$ будут зависеть от переменных E_λ и $\vec{p}'_\lambda'^2$, причем

$$v_1 = \vec{p}'_\lambda'^2, \quad v = E_\lambda \sqrt{p_\lambda'^2 + m^2} \quad (3.29)$$

индекс λ указывает, что величины берутся в системе $\vec{p}' + \vec{p}'' = 0$. Сравнивая эти выражения с значениями инвариантов v и v_1 в системе отсчета ($\vec{p} + \vec{p}' = 0$) находим

$$\vec{p}'_\lambda'^2 = \frac{1}{2}(\vec{p}^2 + m_Q^2) \quad (3.30)$$

$$\sqrt{p_\lambda'^2 + m^2} E'_\lambda = \sqrt{p^2 + m^2} E + m^2$$

Здесь мы учли то обстоятельство, что эрмитова часть $D_{q,q''}(P'',P')$ вычислена для значений энергии $E = E_1$. Из формул (3.30) мы видим, что величины $E'_\lambda, \vec{P}'_\lambda$ вещественны. Это обстоятельство позволяет выразить структурные функции эрмитовой части $D_{q,q''}(P'',P')$ через дисперсионный интеграл. Заметим, что если (8)

$$P'^2_\lambda = \frac{1}{2}(P^2 + m_Q^2) \leq \mu^2 \frac{(M + \frac{\mu}{2})^2}{(M + \mu)^2} \quad (3.31)$$

то дисперсионный интеграл не будет содержать ненаблюдаемой области энергии и им, вообще говоря, можно было бы воспользоваться для вычисления структурных функций $D_{q,q''}(P'',P')$. Следует обратить внимание на том, что для значений энергии $\pm E_1, \pm E_2$ (лежащих ниже порога реакции $P + \gamma \rightarrow 2\gamma + P$) вектора q, q'', P'' , входящие в $R^5_{P'}$, комплексны, причем мнимая часть этих векторов обязана составлять вектор, направленной по \vec{e} . Однако, благодаря симметризации или антисимметризации по \vec{e} , неоднородный член в дисперсионных соотношениях (3.22) не будет содержать этих составляющих.

Все проведенные выше рассуждения относительно $D_{q,q''}(P'',P')$ могут быть повторены и при анализе $D_{q,q''}(P,P''), D_{q,q'}(P,P''), D_{q,q'}(P'',P')$. В заключение рассмотрим операторы $D_{-q',q''}(P,P'')$ и $D_{-q',q''}(P'',P')$. Легко видеть, например, что оператор $D_{-q',q''}(P,P'')$ является эрмитовой частью амплитуды фиктивного процесса:

$$P \rightarrow P + 2\gamma$$

со следующим законом сохранения $P = q' + q'' + P''$. Совершенно очевидно, что закон сохранения выполняется лишь для комплексных импульсов. Следовательно, оператор $D_{-q',q''}(P,P'')$ не выражается через наблюдаемые величины.

в) Фоторождение двух π -мезонов ($\gamma + p \rightarrow 2\pi + p$).
 На основании (3.13), учитывая, что $m = 0$, $M_1 = \mu$, полюса
 нижняя граница непрерывного спектра и порог рассматриваемого
 процесса могут быть записаны в виде:

$$E_1 = \frac{\bar{p}^2 + \mu^2 - m_0^2}{2\sqrt{p^2 + M^2}}, \quad E_2 = \frac{\bar{p}^2 + m_0^2}{2\sqrt{p^2 + M^2}}, \quad E_c = \frac{M\mu + \frac{1}{2}\mu^2 - m_0^2 - \bar{p}^2}{2\sqrt{p^2 + M^2}} \quad (3.32)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \left(|\bar{p}| + \frac{m_0^2}{|\bar{p}|} \right)$$

Так как порог реакции и нижняя граница непрерывного спектра в
 данном процессе совпадает с аналогичными величинами в случае
 двойного комптон-эффекта, то условие отсутствия ненаблюдаемой
 области имеет вид

$$m_0^2 \leq \frac{1}{4} \mu^2 \quad (3.33)$$

Однако, очевидно, что для мезонов m_0^2 будет всегда больше, чем
 $\frac{1}{2} \mu^2$. Таким образом, условие отсутствия ненаблюдаемой области
 не выполняется, а, следовательно, дисперсионные соотношения
 всегда будут содержать некоторую ненаблюдаемую область.

Относительно операторов V и D , входящих в неоднородный
 член дисперсионных соотношений, можно повторить рассуждения, анало-
 гичные как и в предыдущем пункте при анализе соответствующих
 операторов.

В результате такого рассмотрения легко видеть, что в рассматри-
 ваемой задаче наряду с матричными элементами оператора электро-
 магнитного тока $V_q(p, p'')$, $V_q(p'', p)$ встречаются матрич-
 ные элементы от оператора мезонного тока $V_q'(p'', p')$

$$V_q'(p, p''), V_q''(p'', p') \text{ и } V_q''(p, p'').$$

Из соображений релятивистской инвариантности и учитывая псевдоскалярность π -мезонного поля, а также

$$p^2 = p'^2 = p''^2 = M^2, \quad q'^2 = q''^2 = \mu^2$$

матричный элемент мезонного тока j_p может быть представлен в виде /5/ :

$$\langle p's' | j_p^{(0)} | p_s \rangle = g \bar{u}_{s'}(p') \gamma_5 \tau_p u_s(p)$$

где g - перенормированный мезонный заряд.

Не представляет труда убедиться в том, что операторы $D_{q,q''}(p,p'')$, $D_{q,q''}(p'',p')$, $D_{q,q'}(p'',p')$ и $D_{q,q'}(p,p'')$ могут рассматриваться как аналитическое продолжение в ненаблюдаемую область энергий (с помощью дисперсионных соотношений для фоторождения), эрмитовой части амплитуды фоторождения π мезонов на нуклонах, а операторы $D_{-q',q''}(p'',p')$, $D_{-q',q''}(p,p'')$ эрмитовой частью амплитуды фиктивного процесса распада свободного нуклона на нуклон и два π -мезона.

с) Рождение мезонов при рассеянии мезонов на нуклонах ($\pi + p \rightarrow 2\pi + p$).

Полагая в формулах (3.13) $m = m_1 = \mu$ получим следующие выражения для полюсов нижней границы непрерывного спектра и порога реакции

$$E_1 = \frac{\vec{p}^2 + \frac{5}{4}\mu^2 - m_a^2}{2\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}, \quad E_2 = \frac{\vec{p}^2 + \frac{1}{4}\mu^2 + m_a^2}{2\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}$$

$$E_2 = \frac{m\mu + \frac{1}{4}\mu^2 - m_a^2 - \vec{p}^2}{2\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}, \quad E_p^2 = m_a^2 + \frac{1}{4}(1-\epsilon)\vec{p}^2, \quad \epsilon = \frac{4m_a^2 - \mu^2}{4\vec{p}^2}$$

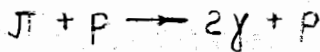
Условие отсутствия ненаблюдаемой области

$$E_c \gg E_p \quad (3.35)$$

после элементарных вычислений может быть записано в виде

$$P^2 = \left(\frac{1}{4} \mu^2 - m_Q^2 \right) \frac{M}{M + \mu} \quad (3.36)$$

Из этой формулы мы видим, что если $m_Q^2 \leq \frac{1}{4} \mu^2$, то всегда найдется некоторое значение импульса, при котором ненаблюдаемая область отсутствует. Учитывая, однако, что для мезонов m_Q^2 всегда больше, чем $\frac{1}{4} \mu^2$, мы видим, что условие (3.36) не выполняется, а, следовательно, в дисперсионных соотношениях будет присутствовать ненаблюдаемая область. Представляет интерес отметить процесс:



Для этого процесса нижняя граница непрерывного спектра и порог реакции совпадают с соответствующими величинами для процесса $(\pi + p \rightarrow 2\pi + p)$. Следовательно, условие отсутствия ненаблюдаемой области и в этом случае запишется в виде

$$P^2 = \left(\frac{1}{4} \mu^2 - m_Q^2 \right) \frac{M}{M + \mu} \quad (3.37)$$

Поскольку конечные частицы являются фотонами, а для них m_Q может быть больше или равен нулю, то при

$$m_Q^2 < \frac{1}{4} \mu^2 \quad (3.38)$$

всегда существует некоторое значение импульса, определяемое формулой (3.37), при котором ненаблюдаемая область в дисперсионных соотношениях отсутствует.

§ 4. Аналитические свойства амплитуды процесса и дисперсионные соотношения

В настоящем параграфе мы на примере процесса

$$\gamma + p \longrightarrow 2\gamma + p$$

дадим строгое доказательство дисперсионных соотношений в рамках ограничений, сделанных в § 2.

Фурье-образы запаздывающего и опережающего матричных элементов рассматриваемой реакции на основании (I.6) и (I.9) можно записать в виде

$$T_{\alpha, \omega}^{\text{ret}}(q, q', q'') = - \int e^{i(q'x' + q''x'')} dx' dx'' \langle P'S' | \frac{\delta^2 \Lambda_P(0)}{\delta \Psi_{p'}(x') \delta \Psi_{p''}(x'')} | PS \rangle$$

(4.1)

$$T_{\alpha, \omega}^{\text{adv}}(q, q', q'') = \int e^{i(q'x' + q''x'')} dx' dx'' \langle P'S' | \frac{\delta^2 \Lambda_P(0)}{\delta \Psi_{p'}(x') \delta \Psi_{p''}(x'')} | PS \rangle$$

интегрирование в (4.1) ведется в области

$$x'_0 \gg |\vec{x}'|, \quad x''_0 \gg |\vec{x}''|$$

(4.2)

$$x'_0, x''_0 > 0$$

для запаздывающей амплитуды и в области

$$|x'_0| \gg |\vec{x}'|, \quad |x''_0| \gg |\vec{x}''|$$

(4.3)

$$x'_0, x''_0 < 0$$

для опережающей амплитуды. Производя замену переменных интегрирования в выражениях (4.1) следующим образом:

$$x' = \frac{x+y}{2}, \quad x'' = \frac{x-y}{2}$$

ПОЛУЧИМ

$$T_{\alpha, \omega}^{\text{ret}}(E, \vec{Q}, \Delta) = -2^{-4} \int e^{-iQx + i\Delta y} F_{\alpha, \omega}^{\text{ret}}(x, y) dx dy$$

$$T_{\alpha, \omega}^{\text{adv}}(E, \vec{Q}, \Delta) = +2^{-4} \int e^{-iQx + i\Delta y} F_{\alpha, \omega}^{\text{adv}}(x, y) dx dy$$

(4.4)

где

$$F_{\alpha, \omega}^{\text{ret}}(x, y) = \langle P^2 S' \left| \frac{\delta^2 \rho(0)}{\delta \varphi_p(\frac{x+y}{2}) \delta \varphi_{p'}(\frac{x-y}{2})} \right| PS \rangle$$

(4.5)

$$F_{\alpha, \omega}^{\text{adv}}(x, y) = \langle P^2 S' \left| \frac{\delta^2 \Lambda \rho(0)}{\delta \varphi_p(\frac{x+y}{2}) \delta \varphi_{p'}(\frac{x-y}{2})} \right| PS \rangle$$

Согласно условию причинности, интегрирование в (4.4) по переменной x ведется в области

$$x_0 \geq |\vec{x}|, \quad x_0 > 0$$

(4.6)

для запаздывающей амплитуды и в области

$$|x_0| \geq |\vec{x}|, \quad x_0 < 0$$

(4.7)

для опережающей амплитуды.

Обычно E и \vec{Q} связаны между собой следующим условием:

$$E^2 = \vec{Q}^2 + m_a^2 \quad (4.8)$$

На этом этапе мы будем рассматривать E и \vec{Q} как независимые переменные. При этом вектора $\vec{\Delta}$ и \vec{P} считаются фиксированными.

Функции $T_{\alpha, \omega}^{<dv>}$ электрона и $T_{\alpha, \omega}^{<dv>}$ определены всюду на действительной оси для $E > E_p$. (порог процесса). Рассмотрим функцию

$$T(E, \vec{Q}, \Delta) = T^{ret}(E, \vec{Q}, \Delta) - T^{adv}(E, \vec{Q}, \Delta) \quad (4.9)$$

Эта функция имеет следующий спектр инвариантной (ср. (1.1))

Для случая однородного поля



Рис. 3.

где полюса E_1 и E_2 определяются из следующих уравнений:

$$4E^2(P^2 + M^2) - [Q^2 + \Delta^2 + 2PQ]^2 = 0$$

$$E^2(P^2 + M^2) - [Q^2 + PQ]^2 = 0 \quad (4.10)$$

Анализ особенностей антиэрмитовой части (4.9) показывает, что непрерывный спектр некоторых членов антиэрмитовой части имеет вид

(Форм-функции выбраны те же, что и в /8/). Эти значения E_c'' малы для $\mu = 0,08$. Результаты расчета мало чувствительны к конкретному виду E_c'' .

$$E_c'' = -P_0 + \sqrt{(M + \mu)^2 + \Delta^2}$$

Рис. 4

а для других членов:

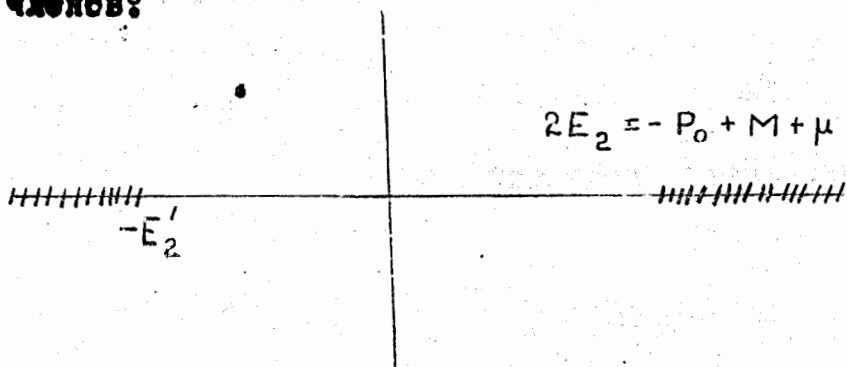


Рис.5

Легко убедиться, что

$$E_c'' \gg \frac{1}{2}(-P^0 + M + \mu) = E_q, \text{ если } \vec{P}^2 \leq 2M\mu + \mu^2 \quad (4.9)$$

Учитывая (4.11) и (4.10) энергетический спектр антиэритовой части можно изобразить в виде

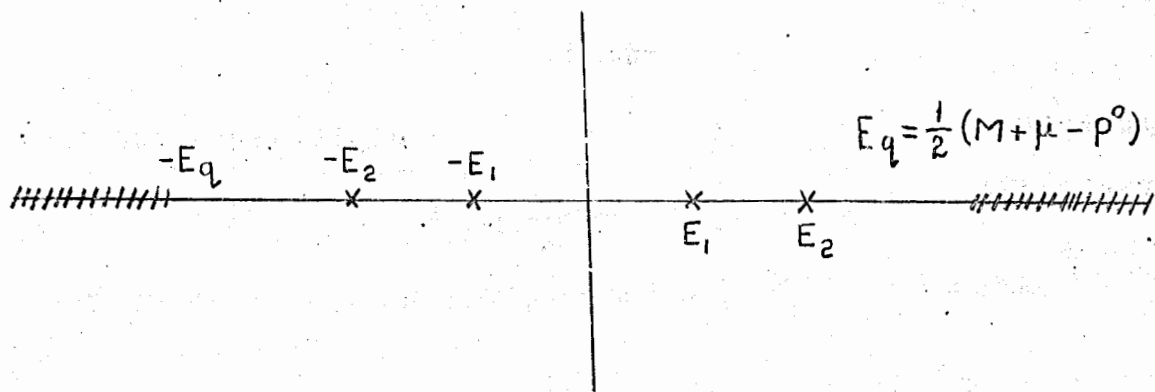


Рис.6

Построим функцию $\tilde{T}(E, \vec{Q}, \Delta)$, ^{нрс} образующаяся в нуль в области

$|E| < E_q$. Для этого вместо функций $F^{zet}(x, y)$

и $\tilde{F}^{zet}(x, y)$, входящих в выражение (4.4), введем функции $\tilde{F}^{zet}(x, y)$ и $\tilde{F}^{adv}(x, y)$ следующим образом:

$$\tilde{F}^{zet}_{adv}(x, y) = [4(\vec{P}^2 + M^2) \frac{\partial}{\partial x_0^2} + (\square_x^2 + \square_y^2 + 2i P_i \frac{\partial}{\partial x_i})^2]$$

$$[(\vec{P}^2 + M^2) \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + (\square_x^2 + i P_i \frac{\partial}{\partial x_i})^2] F^{zet}_{adv}(x, y) \quad (4.12)$$

или в импульсном представлении

$$\tilde{F}^{zet}(\vec{E}, \vec{Q}, \Delta) = \left\{ [Q^2 + \Delta^2 + 2\vec{P} \cdot \vec{Q}]^2 - 4E^2(\vec{P}^2 + M^2) \right\} \cdot \left\{ (Q^2 + \vec{P} \cdot \vec{Q})^2 - E^2(\vec{P}^2 + M^2) \right\} \quad (4.13)$$

Полином в (4.13) подобрав таким образом, чтобы ликвидировать δ -особенности функции $\tilde{T}(\vec{E}, \vec{Q}, \Delta)$ в точках $\pm E_1, \pm E_2$.

Совершенно очевидно, что

$$\tilde{T}(\vec{E}, \vec{Q}, \Delta) = \tilde{T}^{zet}(\vec{E}, \vec{Q}, \Delta) - \tilde{T}^{adv}(\vec{E}, \vec{Q}, \Delta) = 0 \quad (4.14)$$

если $|E| < E_q$ и $\mathcal{Y}_m E = 0$.

Вспомнивая, что

$$\tilde{T}(\vec{E}, \vec{Q}, \Delta) = - \int e^{i(Qx + L\Delta y)} \tilde{F}(x, y) dx dy \quad (4.15)$$

легко установить на основании (4.14) и в силу независимости E и \vec{Q} следующее важное соотношение:

$$\int e^{i(Ex_0 + L\Delta y)} \tilde{F}(x_0, \vec{x}, y) dx_0 dy = 0 \quad (4.16)$$

если

$$|E| < E_q, \quad \mathcal{Y}_m E = 0$$

Введем функции $\Phi^z(\vec{E}, \vec{e}, \vec{P}, \Delta, \rho)$ и $\Phi^a(\vec{E}, \vec{e}, \vec{P}, \Delta, \rho)$

следующим образом

$$\Phi^{z,a}(\vec{E}, \vec{e}, \vec{P}, \Delta, \rho) = \mp S \pm \int \tilde{F}^{zet/adv}(x, y) \exp\{i(Ex_0 - i\vec{e} \cdot \vec{x} \sqrt{E^2 - E_p^2} - i\vec{x} \cdot \vec{P} \eta + i\Delta y - \rho \vec{x}^2)\} dx dy \quad (4.17)$$

где $\rho > 0$, $\eta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m_0^2}{P^2}\right)$, S_{\pm} операция симметризации или антисимметризации по \vec{e} .

$$S_+ f(\vec{e}) = f(\vec{e}) + f(-\vec{e}), \quad S_- f(\vec{e}) = \frac{1}{\Lambda} (f(\vec{e}) - f(-\vec{e}))$$

необходимая для устранения двужначности квадратного корня

$\sqrt{E^2 - E_p^2}$. При написании (4.17) мы положили, что между E и \vec{Q}

существует связь вида

$$E^2 = \vec{Q}^2 + m_Q^2$$

причем, вместо \vec{Q} мы подставили выражение (см. § 3)

$$Q = \frac{1}{2} \Lambda \vec{e} + 2\vec{P}; \quad \frac{\Lambda}{2} = \sqrt{E^2 - E_p^2}$$

Функции ϕ^2, ϕ^a являются аналитическими в верхней (нижней) полуплоскостях энергии E соответственно. На основании (4.16) следует, что

$$\phi^2(E) = \phi^a(E) \quad (4.18)$$

при $|E| < E_q, \quad \Im m E = 0$

Тогда существует функция $\Phi(E, \vec{e}, \vec{P}, \vec{\Delta}, \rho)$

$$\Phi(E, \vec{e}, \vec{P}, \vec{\Delta}, \rho) = \begin{cases} \phi^2(E, \vec{e}, \vec{P}, \vec{\Delta}, \rho) & \text{при } \Im m E > 0 \\ \phi^a(E, \vec{e}, \vec{P}, \vec{\Delta}, \rho) & \text{при } \Im m E < 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

аналитическая во всей плоскости энергии за исключением линий разреза

$$-\infty < \operatorname{Re} E < -E_q, \quad E_q < \operatorname{Re} E < \infty \quad \Im m E = 0 \quad (4.20)$$

при этом значения Φ на верхних берегах разрезов равны ϕ^2 а на нижних ϕ^2 .

Если функция $\Phi(E, \vec{e}, \vec{P}, \vec{\Delta}, \rho)$ при $E \rightarrow \infty$ имеет степень роста не выше $n + 8$, тогда к функции

$$\frac{\Phi(E, \vec{e}, \vec{P}, \vec{\Delta}, \rho)}{(E - E_0)^{n+8}}$$

где E_0 - вещественный параметр, $|E_0| < E_q$ можно применить интегральную теорему Коши с контуром интегрирования, изображенным на рис.

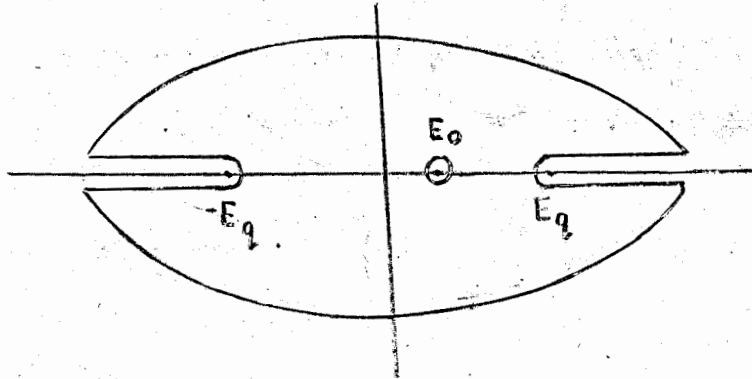


Рис.7

Устремляя радиус большой окружности к бесконечности, а радиусы малых полуокружностей - к нулю, получаем

$$\Phi(E, \vec{e}, \vec{p}, \vec{\Delta}, \rho) = \frac{(E - E_0)^{n+g}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-E_q} \frac{\Phi(E' + i0, \vec{e}, \vec{p}, \vec{\Delta}, \rho) - \Phi(E' - i0, \vec{e}, \vec{p}, \vec{\Delta}, \rho)}{(E' - E)(E' - E_0)^{n+g}} dE' \quad (4.21)$$

$$+ \frac{(E - E_0)^{n+g}}{2\pi i} \int_{E_q}^{\infty} \frac{\Phi(E' + i0, \vec{e}, \vec{p}, \vec{\Delta}, \rho) - \Phi(E' - i0, \vec{e}, \vec{p}, \vec{\Delta}, \rho)}{(E' - E)(E' - E_0)^{n+g}} dE'$$

Следует подчеркнуть, что в рассматриваемом нами случае (отсутствует ненаблюдаемая область) $E_q > E_p$ и интегрирование в (4.21) проводится по наблюдаемой области.

Но так как функции ϕ^2 и ϕ^a определены в наблюдаемой области и для $\rho = 0$, то мы можем в интегралах положить $\rho = 0$. При этом, совершенно очевидно, что правая часть выражения (4.21) будет аналитической функцией во всей плоскости комплексного переменного E , за исключением линий разреза (4.20). Но из выражения (4.21)

следует, что при $\rho = 0$ правая часть определяет функцию $\Phi(E, \vec{e}, \vec{p}, \vec{\Delta}, 0)$, аналитическую во всей плоскости E , за исключением линий разреза (4.20). Но функция $\Phi(E, \vec{e}, \vec{p}, \vec{\Delta}, 0)$ отличается от функции

$$S_{\pm} G(E, \vec{e}, \vec{p}, \vec{\Delta}) = \begin{cases} S_{\pm} J^{2\sigma_{\pm}}(E, \vec{e}, \vec{p}, \vec{\Delta}) & \text{при } \text{Im} E > 0 \\ S_{\pm} T^{\sigma_{\pm}}(E, \vec{e}, \vec{p}, \vec{\Delta}) & \text{при } \text{Im} E < 0 \end{cases}$$

лишь множителями, обращающимися в нуль в точках

$$E = \pm E_1, \quad E = \pm E_2$$

Поэтому функция $S_{\pm} G(E, \vec{e}, \vec{p}, \vec{\Delta})$ будет аналитической во всей плоскости комплексного переменного E с полюсами первой степени в точках $E = \pm E_1$, $E = \pm E_2$ и линиями разреза от ∞ до $-E_1$ и от E_2 до ∞ . Функция $S_{\pm} G(E, \vec{e}, \vec{p}, \vec{\Delta})$ имеет степень роста не выше n . Следовательно, к функции

$$\frac{S_{\pm} G(E, \vec{e}, \vec{p}, \vec{\Delta})}{(E - E_0)^{n+1}}$$

можно применить теорему Коши с контуром интегрирования, изображенным на рис.8

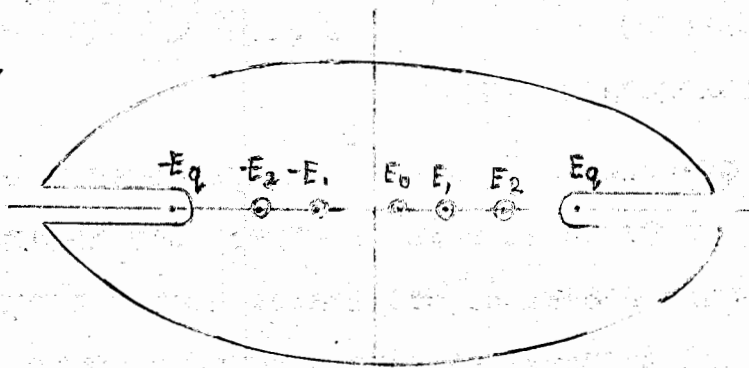


Рис.8

Устремляя радиус большой окружности к бесконечности, а радиус малых полуокружностей (\rightarrow к нулю, и учитывая (3.22) и (3.23), получаем

$$S_{\pm} G(\vec{E}, \vec{P}, \vec{\Delta}) = \frac{(E-E_0)^{n+1}}{2\pi i} \int_{|E'| \gg E_0} \frac{S_{\pm} T^{\text{zet}}(E') - S_{\pm} T^{\text{adv}}(E')}{(E'-E)(E'-E_0)^{n+1}} dE' + \sum_{i=1,2} \left[\left(\frac{E_0-E}{E_0+E_i} \right)^{n+1} \frac{S_{\pm} R_i(\vec{P}, \vec{\Delta}, \vec{E})}{E_i+E} + \left(\frac{E_0-E}{E_0-E_i} \right)^{n+1} \frac{S_{\pm} \Omega_i(\vec{P}, \vec{\Delta}, \vec{E})}{E_i-E} \right] + P_n(E) \quad (4.22)$$

Совершим переход к действительным E . Принимая во внимание, что

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} S_{\pm} G(E+i\epsilon) = S_{\pm} T^{\text{zet}}(E)$$

$$\text{Im} E = 0 \quad (4.23)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} S_{\pm} G(E-i\epsilon) = S_{\pm} T^{\text{adv}}(E)$$

и учитывая определение эрмитовой и антиэрмитовой частей

$$D_{\alpha, \omega}(E) = \frac{1}{2} (T_{\alpha, \omega}^{\text{zet}}(E) + T_{\alpha, \omega}^{\text{adv}}(E))$$

$$A_{\alpha, \omega}(E) = \frac{1}{2i} (T_{\alpha, \omega}^{\text{zet}}(E) - T_{\alpha, \omega}^{\text{adv}}(E)) \quad (4.24)$$

легко получить следующие дисперсионные соотношения:

$$S_{\pm} D_{\alpha, \omega}(E) = \frac{(E-E_0)^{n+1}}{\pi} P \int_{|E'| \gg E_0}^{\infty} dE' \frac{S_{\pm} A_{\alpha, \omega}(E')}{(E'-E)(E'-E_0)^{n+1}} +$$

$$+ \sum_{i=1,2} \left[\left(\frac{E_0-E}{E_0+E_i} \right)^{n+1} \frac{S_{\pm} R_i(\vec{P}, \vec{\Delta}, \vec{E})}{E_i+E} + \left(\frac{E_0-E}{E_0-E_i} \right)^{n+1} \frac{S_{\pm} \Omega_i(\vec{P}, \vec{\Delta}, \vec{E})}{E_i-E} \right] + P_n(E) \quad (4.25)$$

При получении (4.25) было учтено, что на основании (3.16) в области энергий $E_q < E < E_c$ антиэрмитова часть амплитуды $A_{j,\omega}(E)$ обращается в нуль. Отрицательная область энергий в дисперсионных соотношениях (4.25) может быть исключена, если использовать свойства симметрии антиэрмитовой части амплитуды следующего вида: °

$$A_{j,\omega}(E) = -P_{SS'} A_{j,\omega}^*(-E) \quad (4.26)$$

$P_{SS'}$ - оператор перестановки спиновых состояний нуклона.

Свойство симметрии (4.26) легко установить из выражения (3.1).

В заключение статьи авторы выражают глубокую благодарность академику Н.Н.Боголюбову за ценные обсуждения, а также Н.А.Черникову за плодотворную дискуссию.

Л и т е р а т у р а

1. Н.Н.Боголюбов, Б.В.Медведев, М.К.Поливанов "Вопросы теории дисперсионных соотношений" (в печати).
Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков "Введение в квантовую теорию поля", Гостехиздат, 1957 год.
2. Polkinghorne, Nuovo Cimento, 4, 216, 1956
3. А.А.Логунов, ДАН СССР (в печати).
4. Н.Н.Боголюбов, ИАН СССР, изв.АН СССР, сер.физ.19, 237, 1955.
5. А.А.Логунов, А.Н.Тавхелидзе и Л.Д.Соловьев, Nuclear Physics 4, 42, 1957
6. А.А.Логунов и П.С.Исаев, Nuovo Cimento (в печати).
7. А.Н.Тавхелидзе и В.К.Федянин, ДАН СССР (в печати).
8. А.А.Логунов и А.Р.Френкин, Nuclear Physics (в печати).