

3  
Б-90

(4.11.63)



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ  
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

---

Э.Г. Бубелев, Н.А. Черников

P-1407

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД  
В КИНЕМАТИКЕ РЕАКЦИЙ  
С УЧАСТИЕМ ФОТОНА

*Acta Phys. Polonica. 1964,  
v 26, f 1, p. 155-161.*

Дубна 1963

Э.Г. Бубелев, Н.А. Черников

P-1407

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД  
В КИНЕМАТИКЕ РЕАКЦИЙ  
С УЧАСТИЕМ ФОТОНА

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

Дубна 1963

2127/2 ч.

## § 1. Введение

Широко распространенный в кинематике релятивистских частиц графический метод эллипсоидов<sup>/1-3/</sup> требует трудоемких построений эллипсов. В работе<sup>/4/</sup> предложен графический метод, в котором роль эллипса выполняет окружность. Он проще метода эллипсоидов, поскольку начертить окружность много проще, чем эллипс. Единственный недостаток этого метода состоит в том, что он неприменим к частице с нулевой массой покоя. Здесь предлагается графический метод определения зависимости импульса фотона от угла вылета в лабораторной системе отсчета, в котором так же, как и в<sup>/4/</sup>, вместо эллипса строится окружность. Кроме того, указывается простой графический способ определения связи между углами вылета фотона в лабораторной системе отсчета и в системе центра масс.

Источником удобных графических методов в кинематике релятивистских частиц является важное понятие пространства скоростей материальной точки<sup>/5-7/</sup>. Это пространство является пространством Лобачевского с кривизной, равной  $\frac{-1}{c^2}$ , где  $c$  - скорость света. Кинематика релятивистских частиц в образах пространства скоростей представлена в работах<sup>/7-8/</sup>.

Евклидовы модели пространства Лобачевского приводят к тем или иным графическим методам в кинематике релятивистских частиц. Так, например, графический метод<sup>/4/</sup> основан на известном конформном отображении Пуанкаре пространства Лобачевского на евклидов шар. Предлагаемый здесь графический метод основан на другой модели Пуанкаре - конформном отображении пространства Лобачевского на евклидово полупространство. В отображениях Пуанкаре сферы пространства Лобачевского переходят в евклидовы сферы, а так как возможные скорости частицы после столкновения изображаются точками сферы в пространстве скоростей, то это и приводит к графическим методам с использованием окружности.

Еще в ранних работах по теории относительности было замечено, что геометрия Лобачевского оказывается полезной при решении релятивистских задач (см. об этом<sup>/8,9/</sup>). Это направление в теории относительности, начатое в работах Ф.Клейна, А.Зоммерфельда, В.Варичака и др., увенчалось блестящей работой А.П. Котельникова<sup>/5/</sup>. В дальнейшем эти важные результаты выпали из поля зрения физиков и были возрождены лишь спустя 30 лет<sup>/6,7/</sup>. В последнее время геометрия Лобачевского находит все более и более широкое применение в релятивистской физике и особенно в кинематике релятивистских частиц<sup>/10-13/</sup>.

Данная работа рассчитана главным образом на физиков-экспериментаторов и не предполагает у читателя знания геометрии Лобачевского. Необходимые сведения по геометрии Лобачевского будут излагаться здесь по мере надобности.

## § 2. Зависимость импульса фотона от угла вылета в лабораторной системе отсчета

Любая кинематическая задача о столкновении двух частиц приводится к задаче о распаде частицы на две <sup>17/</sup>. Действительно, можно считать, что исходные частицы образуют одну промежуточную частицу, распадающуюся затем на две, из которых одна - интересующая нас частица, а другая представляет собой соединение остальных продуктов распада промежуточной частицы.

Рассмотрим распад частицы  $\gamma_0$  с массой покоя  $m_0$  на две частицы  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  с заданными массами покоя  $m_1$  и  $m_2$ . Случай  $m_1 > 0$  рассмотрен в работе <sup>14/</sup>. Здесь мы ограничимся случаем  $m_1 = 0$ . Этот случай охватывает фотон и нейтрино. Пусть задана скорость  $v_0$  частицы  $\gamma_0$  в лабораторной системе отсчета, и требуется определить зависимость импульса  $p$  частицы  $\gamma_1$  от угла вылета  $\theta$ . Найдем сначала импульс  $p^*$  частицы  $\gamma_1$  в системе центра масс частиц  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Возводя в квадрат равенство  $p_2 = p_0 - p_1$  4-импульсов частиц, получаем

$$m_2^2 = m_0^2 + m_1^2 - 2(p_0 p_1) = m_0^2 - \frac{2m_0 p^*}{c}, \quad (1)$$

откуда

$$\frac{p^*}{c} = \frac{m_0^2 - m_2^2}{2m_0}. \quad (2)$$

Вычисляя скалярное произведение  $(p_0 p_1)$  в лабораторной системе отсчета

$$(p_0 p_1) = \frac{m_0 p}{c} \{ ch \rho - sh \rho \cos \theta \}, \quad (3)$$

где

$$th \rho = \frac{v_0}{c}, \quad (4)$$

и сравнивая (3) с (1), находим

$$p^* = p (ch \rho - sh \rho \cos \theta). \quad (5)$$

Из этой формулы следует простой графический метод определения  $\frac{p^*}{c}$  в зависимости от угла вылета  $\theta$ , указанный на рис. 1. Отметим, что длины  $ch \rho$  и  $sh \rho$  связаны между собой как гипотенуза и катет прямоугольного треугольника, другой катет которого равен 1.

Тот же метод применим к столкновению частицы  $\gamma_{-1}$  с покоящейся частицей  $\gamma_{-2}$ :  $\gamma_{-1}, \gamma_{-2} \rightarrow \gamma_1, \gamma_2$ . При этом предполагается, что масса покоя  $m_{-2}$  частицы  $\gamma_{-2}$  больше нуля. Столкновение можно рассматривать как образование промежуточной частицы  $\gamma_0$  и последующей ее распад:  $\gamma_{-1}, \gamma_{-2} \rightarrow \gamma_0 \rightarrow \gamma_1, \gamma_2$ . Масса покоя частицы  $\gamma_0$  равна:

$$m_0 = \sqrt{m_{-1}^2 + m_{-2}^2 + 2m_{-2} \frac{E_{-1}}{c^2}}, \quad (6)$$

где  $E_{-1}$  - полная энергия частицы  $\gamma_{-1}$  в лабораторной системе отсчета. Величины  $ch \rho$  и  $sh \rho$ , входящие в формулу (5) и связанные со скоростью  $v_0$  по формуле (4), равны

$$ch \rho = \frac{m_0^2 + m_2^2 - m_{-1}^2}{2m_0 m_{-2}}, \quad (7)$$

$$sh \rho = \frac{\sqrt{[m_0^2 - (m_{-1} + m_{-2})^2][m_0^2 - (m_{-1} - m_{-2})^2]}}{2m_0 m_{-2}}$$

Заметим, что изложенный графический метод с несущественными изменениями применим также к столкновению двух движущихся частиц. При этом  $m_{-2}$  может быть как больше нуля, так и равной нулю.

## § 3. Связь рассматриваемого метода с моделью Пуанкаре пространства Лобачевского

В основе нашего графического метода лежит важная модель пространства Лобачевского, предложенная Пуанкаре в 1882 году. Эту модель можно построить следующим образом.

Рассмотрим в пространстве Лобачевского связку параллельных прямых. Поверхности, ортогональные к такой связке, называются орисферами (рис. 2). Лобачевский доказал следующие свойства орисфер. Внутренняя геометрия каждой орисферы евклидова. Для двух орисфер, ортогональных к одной и той же связке прямых и разделенных расстоянием  $l$ , отношение подобных дуг  $s$  и  $s'$  равно:

$$\frac{s'}{s} = \exp\left(-\frac{l}{s}\right). \quad (8)$$

С помощью прямой  $L$  и ортогональной к ней орисферы  $S$  можно ввести следующие координаты в пространстве Лобачевского. Выберем на орисфере  $S$  декартовы координаты  $\xi, \eta$  с началом в точке  $O$  пересечения  $S$  и  $L$  и декартову координату  $\ell$  на прямой  $L$  с началом в той же точке  $O$ . Пусть  $\ell$  положительна



в сторону, зачерчиваемую хордами орисферы  $S$ . Каждой точке  $a$  поставим в соответствие координаты  $(x, y, z)$  по следующему правилу. Через точку  $a$  проведем орисферу  $S'$ , ортогональную к прямой  $L$ . Пусть координата точки пересечения  $S'$  с  $L$  на прямой  $L$  равна  $\ell$ . Координату  $z$  точки  $a$  положим равной  $z = \exp(\ell/c)$ . Опустим далее из точки  $a$  перпендикуляр на орисферу  $S$ . Координаты  $x, y$  точки  $a$  положим равными координатам основания этого перпендикуляра на орисфере  $S$  в единицах  $c$ :  $x = \xi/c$ ,  $y = \eta/c$ .

Рассматривая  $x, y, z$  как декартовы координаты евклидова пространства, мы получим отображение Пуанкаре пространства Лобачевского на евклидово полупространство  $z > 0$ .

При этом отображении сферы пространства Лобачевского переходят в сферы евклидова пространства, а прямые — в полуокружности, ортогональные к опорной плоскости  $z = 0$ . Исключение представляют прямые, ортогональные к орисфере  $S$ ; они изображаются прямыми, ортогональными к плоскости  $z = 0$ . Метрика пространства Лобачевского в координатах  $x, y, z$ , как нетрудно понять, имеет вид:

$$ds^2 = e^{-\frac{2\ell}{c}} (d\xi^2 + d\eta^2) + d\ell^2 = \frac{c^2}{z^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (9)$$

Отсюда следует, что отображение Пуанкаре конформно.

Поместим скорость  $a_0$  частицы в точку с координатами  $(0, 0, 1)$ , а скорость  $a_1$  частицы  $y_1$  с нулевой массой покоя — в бесконечно удаленную точку  $z = \infty$ . При этом скорость  $a$  лабораторной системы отсчета не фиксирована, а изображается одной из точек сферы, представленной на рис. 1. В задаче о рассеянии частицы  $y_1$  на покоящейся частице  $y_2$  скорость  $a_2$  частицы  $y_2$  совпадает с точкой  $a$ .

#### § 4. Зависимость между углами вылета фотона в лабораторной системе отсчета и системе центра масс

Графический метод определения зависимости импульса фотона от угла рассеяния в лабораторной системе отсчета мы получили элементарным образом. Поэтому рассмотрение модели Пуанкаре могло бы показаться здесь неуместным, если бы она приводила только к указанному графическому методу. Однако модель Пуанкаре позволяет еще заметить простой графический метод определения связи между углами  $\theta$  и  $\theta^*$  вылета фотона в лабораторной системе отсчета и в системе центра масс.

Чтобы не усложнять рис. 1 дальнейшими построениями, приведем отдельно рис. 3. Неевклидов радиус  $a_0 a_1$  представляется на рис. 3 дугой окружности с центром

в точке  $M$ . Последняя находится на пересечении прямой  $z = 0$  с перпендикуляром к евклидову отрезку  $a_0 a_1$ , восстановленным из его середины. Углы вылета фотона  $\theta$  ( $\theta$  — в лабораторной системе отсчета и  $\theta^*$  — в системе центра масс) образованы неевклидовыми лучами  $a_1 N$  и  $a_0 N$  и направлениями на бесконечно удаленную точку. Нетрудно убедиться, что они равны соответственно углам между прямой  $z = 0$  и евклидовыми отрезками  $M a_1$  и  $M a_0$ . Отсюда вытекает простой графический метод определения  $\theta^*$  по  $\theta$  и, наоборот,  $\theta$  по  $\theta^*$ , понятный из рис. 3. Отметим, что прямую задачу следует начинать с построения угла  $\theta$  с вершиной в центре  $O$  евклидовой окружности, а обратную — с построения угла  $\theta^*$  с вершиной в точке  $a_0$ .

Аналитически связь углов  $\theta$  и  $\theta^*$  может быть получена из преобразований Лоренца:  $p \sin \theta = p^* \sin \theta^*$ . Откуда, учитывая формулу (5), получаем:

$$\sin \theta^* = \frac{\sin \theta}{\text{ch } \rho - \text{sh } \rho \cos \theta}. \quad (10)$$

Последнюю формулу можно преобразовать к виду:

$$\ln \text{tg } \frac{\theta^*}{2} - \ln \text{tg } \frac{\theta}{2} = \rho. \quad (11)$$

Формулу (11) можно получить непосредственно из геометрии Лобачевского<sup>/13/</sup>, рассматривая в пространстве скоростей два вырожденных прямоугольных треугольника  $b a_0 a_1$  и  $b a a_1$  (рис. 4). Углы  $\theta = \angle b a a_1$  и  $\theta^* = \angle b a_0 a_1$  являются углами параллельности для направленных отрезков  $b a_1$  и  $b a_0$  с разностью  $c\rho$ . Мы приходим к формуле (11), учитывая, что угол параллельности для отрезка длины  $h$  равен

$$\Pi\left(\frac{h}{c}\right) = 2 \arctg e^{-\frac{h}{c}}. \quad (12)$$

Интересно отметить, что в прямоугольном евклидовом треугольнике с катетами 1 и  $\text{sh } \rho$  угол  $\alpha$ , противолежащий катету длины 1, равен углу параллельности для неевклидова отрезка длины  $c\rho$  (рис. 5). В частности, при  $\theta^* = \pi/2$  угол  $\theta$  равен  $\alpha$ .

#### Л и т е р а т у р а

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. Гостехиздат, М-Л, 1941.
2. I. Blaton. Det., KGL, Dancke, 24, N 20 (1950).
3. А.М. Балдин, В.И. Гольдманский, И.Л. Розенталь. Кинематика ядерных реакций. М., Физматгиз, 1951.
4. Е.В. Майков и Н.А. Черников. ИДВШ, физ.-мат. науки, № 4, 129 (1958); Препринт ОИЯИ Р-415, Дубна, 1959.

5. А.П. Котельников. Принцип относительности и геометрия Лобачевского. Сб. "In memoriam N.L.Lobachevski", т. 2, стр. 37-66, Казань, 1927.
6. В.А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. Гостехиздат, М., 1955.
7. Н.А. Черников. НДВШ, физ.-мат., науки, № 2, 158 (1958).
8. Н.А. Черников. Препринт ОИЯИ Р-723, Дубна, 1961.
9. В. Паули. Теория относительности. ГИТТЛ, М.-Л., 1947.
10. А.В. Ефремов, В.А. Мещеряков, Д.В. Ширков. Препринт ОИЯИ Д-503, Дубна, 1960. ЖЭТФ, т. 39, вып. 2 (8), стр. 438 (1960).
11. С.С. Wick. Annals of Physics, 18, N 1, 65 (1962).
12. Я.А. Смородинский. "Атомная энергия", 14, вып. 1, 110 (1963).
13. Э.Г. Бубелев. Препринт ОИЯИ Р-1320, Дубна, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел  
11 сентября 1963 г.

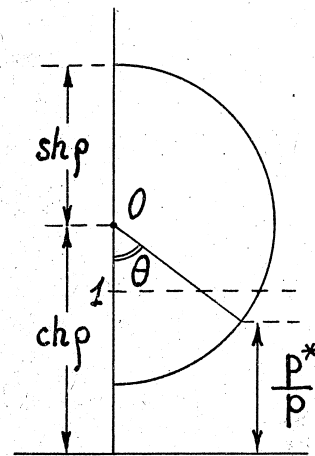


Рис. 1.

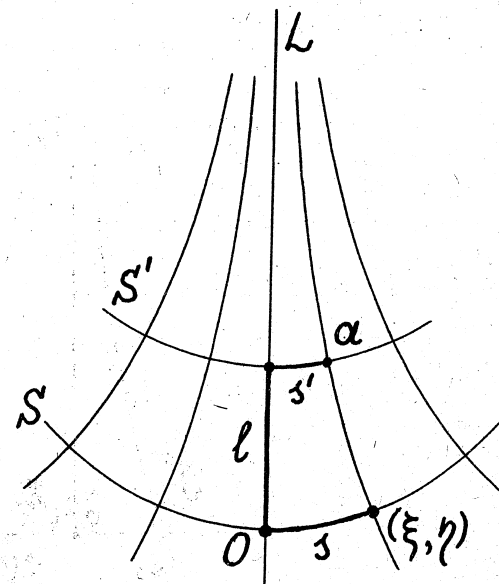


Рис. 2.

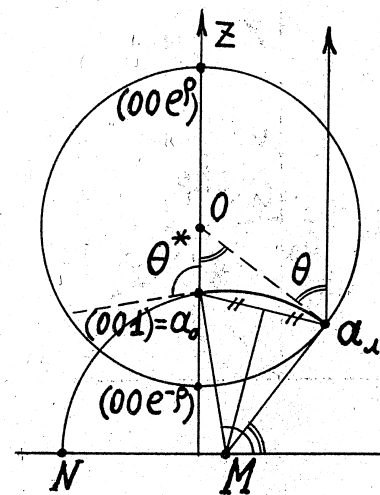


Рис. 3.

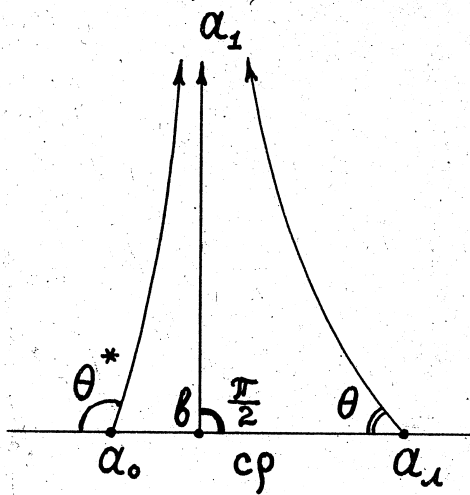


Рис. 4.

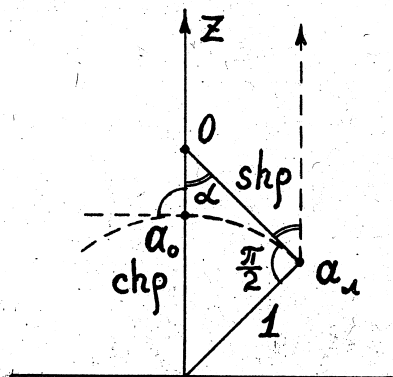


Рис. 5.