

4
к-659

2.9



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Г.И. Копылов, Л.А. Кулюкина, И.В. Полубаринов

P - 1402

ФОТОРОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ
И МЮОННЫХ ПАР НА ЭЛЕКТРОНЕ
ЖЭТФ, 1964, т 46, в 5, с 1715-1721.

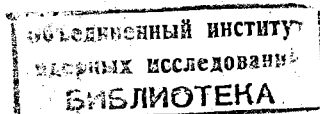
Дубна 1983

Г.И. Копылов, Л.А. Кулюкина, И.В. Полубаринов

P- 1402

21/3/3 48
ФОТОРОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ
И МИОННЫХ ПАР НА ЭЛЕКТРОНЕ

Направлено в ЖЭТФ



Дубна 1963

Фоторождение электрон-позитронных пар на электроде рассчитывалось многократно^{/1-5/}. В процесс этот дают вклад восемь диаграмм - четыре из них показаны на рис. 1, в остальных четырех переставлены линии электронов 1 и 2. Поэтому расчеты сопряжены с крайне громоздкими выкладками, которые ни разу не были доведены без пренебрежений до конечной обозримой формулы^{x)}. Обычно, либо учитывая все восемь диаграмм, рассматривают лишь предельные случаи, либо с самого начала пренебрегают некоторыми диаграммами. Обзоры по этому вопросу^{/4/} посвящаются сравнению одних приближений с другими, причем порою неизвестно, насколько все они далеки от правильного результата. Впрочем, в ультрарелятивистском пределе и в пренебрежении большими импульсами отдачи уже научились получать подтверждаемые экспериментом результаты^{/5/}, так как при этом можно пренебречь половиной диаграмм (членом M , на рис. 1, выражающим так называемое ue - взаимодействие).

Наиболее трудной для расчета является промежуточная область, в которой нельзя отбросить ни одной из диаграмм. Мы решили воспользоваться возможностью, которую дает метод случайных звезд^{/8/}, и рассчитали в этой области процесс фоторождения $e^+ e^-$ - пар в Борновском приближении без каких-либо пренебрежений на счетной машине. Результаты расчетов дают ход сечения в области энергий фотона (в л.б. системе) $4,01 m_e - 60 m_e$, в которой "не работают" известные аналитические формулы, и указывают энергии, начиная с которых справедливы соображения, лежащие в основе вывода этих приближенных формул.

1. Исходная формула и метод расчета

В качестве переменных, описывающих состояние системы двух электронов 1 и 2 и позитрона 3, были выбраны: кинетическая энергия τ_2 пары 1+2 и направление частицы 2 в системе покоя пары 1+2; направление частицы 3 в системе покоя 1+2+3; спиновые индексы всех частиц. Эти переменные разыгрывались случайно и равномерно в интервалах своего изменения. Существенно, что интервалы изменения любой из них не зависят от других переменных^{/7/}. Рассчитав по значению пяти переменных в импульсном пространстве декартовы прямоугольные компоненты импульсов всех трех частиц, можно было в явном численном виде выразить элементы матриц - функций распространения. Непроинтегрированное по четырем переменным точное выражение для сечения занимает 4 страницы^{/2/}.

нения, столбцов и строк - волновых функций электронов и позитронов. Выбор того или иного столбца (строки) диктовался результатом случайного выбора спиновых переменных. Затем прямым перемножением матриц вычислялось значение амплитуды процесса при данном наборе переменных состояний. Среднее взвешенное от квадрата модуля амплитуды по некоторому числу N случайно выбранных состояний ("случайных звезд") давало сечение

$$\sigma = \frac{1}{N} \sum_{\lambda=1}^N \Phi^{\lambda 2}$$

Расчетная формула для веса $\Phi^{\lambda 2}$ случайно выбранного состояния λ имела вид $\Phi = KF$, где фактор K включал в себя якобиан перехода от переменных $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ к названным выше переменным, множители от интегрирования δ -функции в выражении для сечения и деление на поток фотонов. $F = |M|^2$, где $M = M_1 - M_2 - M_3 + M_4$ - сумма амплитуд процессов, изображаемых парой диаграмм (на рис. 1 показаны только M_1 и M_3).

Выпишем для примера M_1 :

$$M_1 = -\frac{e^2}{\sqrt{2k_0}} (\vec{u}_1 \vec{v}_1 u) \frac{1}{\Delta^2} (\vec{u}_2 \gamma_\nu \gamma_3) \quad (1)$$

$$v_\nu = \gamma_\nu \frac{-i(k+p)_\nu + m}{(k+p)^2 + m^2} \hat{\epsilon}(k) + \hat{\epsilon}(k) \frac{-i(p_1-k)_\nu + m}{(p_1-k)^2 + m^2} \gamma_\nu \quad (2)$$

$$\Delta = p_2 + p_3 \quad (3)$$

В качестве $\hat{\epsilon}$ выбиралось либо γ_1 , либо γ_2 в зависимости от того, какое из двух состояний поляризации фотона разыграно. В качестве волновых функций \vec{u}_1 и \vec{u}_2 рождения электронов 1 и 2 выбиралась в зависимости от розыгрыша знака проекции спина (спиральности) матрица - строка с верхним или нижним знаком:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{\sqrt{1+c}}{\sqrt{1+v}} (1 \pm v + \gamma^1); \pm(a-ib) \frac{1 \pm v + \gamma^1}{\sqrt{1+c} \sqrt{1+v}}; \right. \\ \left. -\frac{\sqrt{1+c}}{\sqrt{1+v}} (1 \pm v - \gamma^1); \mp(a-ib) \frac{1 \pm v - \gamma^1}{\sqrt{1+c} \sqrt{1+v}} \right\}; \quad (4)$$

где a, b, c - направляющие косинусы скорости электрона, γ - его релятивистский фактор.

В качестве волновой функции v_ν рождения позитрона использовалась матрица

столбец с теми же элементами, но все величины a, b, c, v, γ^1 брались с обратным знаком.

В качестве волновой функции u уничтожающегося электрона (мишени) рассчитывались элементы одного из двух столбцов $u(\vec{p}, \pm \frac{1}{2})$:

$$u(\vec{p}, -\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1+v+\gamma^1}{2\sqrt{1+v}} \\ 0 \\ \frac{1+v-\gamma^1}{2\sqrt{1+v}} \end{pmatrix}; \quad u(\vec{p}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -\frac{1-v+\gamma^1}{2\sqrt{1-v}} \\ 0 \\ -\frac{1-v-\gamma^1}{2\sqrt{1-v}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Наконец, числитель пропагатора $-i\hat{p} + m$, где $p = \{x, y, z, E\}$, имел вид матрицы:

$$\begin{pmatrix} E+m & 0 & -z & -x+iy \\ 0 & E+m & -x-iy & z \\ z & x-iy & -E+m & 0 \\ x+iy & -z & 0 & -E+m \end{pmatrix} \quad (6)$$

Расчет M_2, M_3, M_4 проводился по тем же формулам, что и расчет M_1 , но аргументы пропагаторов и волновых функций переставлялись в соответствии с перестановкой линий в парах диаграмм, дающих M_2, M_3, M_4 . Столь простая логическая операция исключала возможность ошибки в этой, наиболее сложной аналитически, части расчета.

Мы ограничивались при вычислении сечения усреднением по 1000 случайных звезд, что требовало полутора часов работы машины. Степень приближения оценивала сама машина по среднему разбросу весов этих звезд. Разброс определялся неравномерностью распределения весов состояний по фазовому пространству. При сделанном нами выборе переменных интегрирования эта неравномерность была мала до энергий фотона $k \leq 10 m_e$, а выше сильно возрастала, мешая точным расчетам. Поэтому этим методом мы рассчитывали сечения только на участке энергий до $10 m_e$. Подчеркнем, что это не есть нерелятивистский предел; последний для процесса $\gamma e^- \rightarrow e^- e^- e^+$ не превышает $4,01 m_e$ при пороге $4 m_e$.

Наряду с усреднением весов состояний по всему фазовому пространству проводилось усреднение по частям фазового пространства, расположенным между поверхностями уровня различных функций переменных состояний. Таким образом, параллельно расчету сечения вычислялись распределения по десяти величинам: по импульсам и углам

между e^+ и e^- , по эффективной массе пар $e^- e^-$ и $e^- e^+$, по величине $\eta_1 = \omega_- / (\omega_- + \omega_+)$ и $\eta_2 = \omega^{(1)} / (\omega^{(1)} - \omega^{(2)})$ - доле суммарной энергии пар $e^- e^+$ и $e^- e^-$, приходящейся на e^- . Однако точность полученных гистограмм была недостаточна (20%), и мы свели каждую из них к одной характеристике - среднему значению измеряемой величины.

Для расчета сечений при $k > 10 m_e$ мы воспользовались тем, что в ультрарелятивистском пределе основной вклад в сечение вносят конфигурации с малой передачей импульса $(p - p_2)^2$ и $(p - p_1)^2$ (члены M_3 и M_4). Следует поэтому перейти к такому фазовому пространству, в котором синхронизировано полюсное выражение

$$A = \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} \frac{1}{(p - p_1)^4} \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 - k - p). \quad (7)$$

Это можно сделать, если определить абсолютную величину импульса \vec{p}_2 и направление $\vec{\phi}_2, \vec{\theta}_2$ частицы 2 в системе покоя 1+2 и направление ϕ_1, θ_1 частицы 1 в системе покоя 1+2+3 при помощи уравнений

$$\int_0^{\vec{p}_2} \frac{\vec{p}_2 p_1}{M_2 (\omega_p - \omega_1)^2}; \quad dp_2 = r_2 \int_0^{\vec{p}_2} \frac{\vec{p}_2 p_1}{M_2 (\omega_p - \omega_1)^2}; \quad dp_2 \equiv r_1 l; \quad (8)$$

$$\omega_p = (p^2 + m_e^2)^{1/2}; \quad M_2 = 2(\vec{p}_2^2 + m_e^2)^{1/2}; \quad M_3 = -(k+p)^2; \quad (9-11)$$

$$\omega_1 = \frac{M_3^2 + m_e^2 - M_2^2}{2M_3}; \quad p_1 = (\omega_1^2 - m_e^2)^{1/2}; \quad \vec{p}_2 = \frac{M_3^2 + m_e^2 - (2m_e)^2}{2M_3}; \quad (12-14)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{2(-m_e^2 + \omega_p \omega_1) r_2 - (-m_e^2 + \omega_p \omega_1 - p p_1)}{(-m_e^2 + \omega_p \omega_1 - p p_1) + 2p p_1 r_2}; \quad (15)$$

$$\phi_1 = 2\pi r_3; \quad \vec{\phi}_2 = 2\pi r_4; \quad \cos \vec{\theta}_2 = -1 + 2 r_5. \quad (16-18)$$

Тогда в новых переменных r_1, \dots, r_5 точки с плотностью (7) распределены равномерно в единичном пятимерном кубе

$$A = \frac{16 \pi^2}{M_3 m_e^2} l d^5 r, \quad (19)$$

а "вес" состояния, характеризуемого вектором \vec{r} и спиновыми переменными, приобретает вид:

$$G = \frac{4 \cdot 32}{137^3} \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{k M_3 m_e^2} l |M|^2 (p - p_1)^4. \quad (20)$$

В нерелятивистской области этот выбор переменных сводится к использованному ранее, в ультрарелятивистской - занижает сечение вдвое (так как отбирает событие лишь в области с малыми $(p - p_1)^2 + m^2$, а события с малыми $(p - p_2)^2 + m^2$ при этом совсем не встречаются). Чтобы устранить эту неопределенность в коэффициенте, в расчете случаи $|(p - p_2)^2| < |(p - p_1)^2|$ просто отбрасывались, а результат, выдаваемый машиной, умножался на 2.

2. Результаты

На рис. 2 изображено сечение процесса $\gamma e^- \rightarrow e^- e^- e^+$ в области $4 < k/m_e < 10$. Для сравнения приведена кривая, по которой обычно рассчитывают сечение в этой области - нерелятивистская формула Вотрубь ^{12,4/}:

$$\sigma = \alpha r_0^2 \frac{\pi \sqrt{3}}{2 \cdot 3^3} \left(\frac{k}{m_e} - 4 \right)^2 = 6,52 \cdot 10^{-30} \left(\frac{k}{m_e} - 4 \right)^2 \text{ см}^2. \quad (21)$$

Кривые совпадают до $4,01 m_e$, в остальной области расходятся в 2-3,5 раза. Погрешность в определении сечения по методу случайных звезд возрастает с 5% у порога до 10% при $10 m_e$.

На рис. 3 показан ход сечения в интервале до $k = 60 m_e$ и для сравнения - ультрарелятивистская формула Бете-Гайтлера для фоторождения на кулоновском центре

$$\sigma = \alpha r_0^2 \left(\frac{28}{9} \ln \frac{2k}{m_e} - \frac{218}{27} \right) = 4,19 \cdot 10^{-27} \left(\lg \frac{2k}{m_e} - 1,126 \right) \text{ см}^2. \quad (22)$$

Уже начиная с $50 m_e$, эта формула достаточно хорошо воспроизводит сечение процесса.

Другие признаки применимости сверхрелятивистского приближения наступают еще раньше. На рис. 4,5 показано, как зависят от энергии фотона средние углы вылета и средние энергии e^- и e^+ в различных интервалах изменения k . В среднем e^+ обладают большей энергией и вылетают под более острым углом, чем e^- . По-видимому, уже при энергиях порядка $10 m_e$ фоторождение определяется последними двумя диаграммами (и диаграммами с переставленными электронами 1 и 2), как это бывает при сверхвысоких энергиях. Согласно этим диаграммам, частицы пары $e^+ e^-$ должны сохранять движение родившего их фотона, а другой электрон - сохранять в системе центра масс движение электрона - мишени назад. Поэтому в лабораторной системе он должен иметь меньшую энергию и больший угол вылета, чем члены пары $e^+ e^-$. Уже при $k \sim 10 m_e$ электроны в каждом событии четко разделяются на быстрый с энергией $\approx \frac{1}{2} k$ и медленный с полной энергией $1,2 - 2 m_e$, а их угловое распределение становится явно двухконусным (рис. 5). Такие электроны уже можно не

считать тождественными - их маркирует их скорость - и пренебречь интерференцией между диаграммами, отличающимися перестановкой частиц 1 и 2. Сечение процесса, изображаемого четырьмя полюсными диаграммами M_3 и M_4 , равно удвоенному сечению процесса с двумя диаграммами M_1 .

Но и в этих диаграммах можно пренебречь переворотом спина электрона-мишени. Как показал расчет, отношение вкладов в сечение от событий с переворотом спина составляет 7-8% при $k = 9-15 m_e$, 1% при $30-50 m_e$, 0,2% при $100 m_e$. Это обстоятельство тесно связано с малой передачей импульса мишени $(p - p_2)^2$ и означает, что в нижнем узле оставшихся диаграмм по существу происходит нерелятивистское рассеяние электрона на кулоновском центре.

Эти соображения хорошо известны^{/4/}: наши расчеты указывают, начиная с каких энергий они применимы.

Приведенная картина взаимодействия подтверждается тем, какая часть суммарной энергии пар $e^+ e^-$ или $e^- e^-$ приходится на один электрон. При больших k эта величина η практически меняется от 0 до 1 равномерно, с небольшим понижением частоты крайних значений η ^{/5/}. В нерелятивистском пределе, наоборот, $\eta = 1/2$, и при росте k пределы изменения η расширяются (рис. 6). Как следует из распределения по η (оно показано на рис. 6 при $k = 6 m_e$), энергия e^- в паре $e^- e^+$ в среднем меньше половины суммарной энергии пары. Однако и два электрона чаще имеют неравную энергию, чем одинаковую.

Распределения по эффективной массе m_{--} и m_{+-} пар $e^- e^-$ и $e^+ e^-$ не обнаруживают характерных отличий от распределения, рассчитанного с матричным элементом, равным 1. Но среднее значение $m_{--} - 2m_e$ равно до $k < 10 m_e$ примерно 0,55 от кинетической энергии всех трех частиц в системе центра масс, в отличие от среднего значения $m_{+-} - 2m_e$, равного 0,46 этой величины.

Сходство диаграмм процессов $\gamma e^- \rightarrow e^- e^- e^+$ и $\gamma e^- \rightarrow e^- \mu^- \mu^+$ позволило нам также рассчитать сечение последнего (достаточно было положить $M_3 = M_4 = 0$ в формуле $F = |M|^2$). В выбранном интервале энергий (45-55 Бэв) точность расчета оказалась уже низкой (рис. 7), не позволив сделать более детального анализа условий наблюдения этого, покамест не наблюдавшегося, процесса рождения мюонных пар на электроны.

Первые опыты расчетов по новому методу (см. также^{/8/}) позволяют сделать некоторые предварительные выводы об области его применимости. В процессах, изображаемых четырьмя-восьмью диаграммами третьего порядка, этот метод за 1-1 $\frac{1}{2}$ часа обеспечивает 5-10%-ную точность в определении сечений. Это не так уж плохо, если

учесть, что пренебрежения, неизбежные при выводе аналитических формул, могут искажать результат и на 300%. Метод хорошо работает в нерелятивистской и промежуточной области энергий, но по мере приближения полюсов амплитуды к физической области, т.е. в ультрарелятивистском пределе, требует учета особенностей амплитуды, иначе погрешность сильно растет. Точно так же возрастает погрешность при наличии острых форм-факторов.

Эта трудность - не принципиальна и может быть устранена подходящим подбором переменных интегрирования.

Авторы благодарят М.А. Маркова за интерес к работе, Б.Н. Валуева - за ценные обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. H.A. Bethe, W. Heitler. Proc. Roy. Soc. (London) A146, 83 (1934).
2. V. Votruba. Phys. Rev., 73, 1468 (1948); Bull. intern. acad. Tchèque sci., 49, 19 (1948).
3. J.A. Wheeler, W.E. Lamb. Phys. Rev., 55, 858 (1939); 101, 1836 (1956).
A. Borsellino. Nuovo Cim., 4, 112 (1947).
K.M. Watson. Phys. Rev., 72, 1060 (1947).
П.Э. Немировский. ЖЭТФ, 10, 893 /1948/.
4. B.K. Федюшин. ЖЭТФ, 22, 140 /1952/.
5. J. Joseph, F. Rohrlich. Revs. Modern Phys., 30, 354 (1958).
6. K.S. Suh, H.A. Bethe. Phys. Rev., 115, 672 (1959).
E.L. Hart, G. Cocconi, V.T. Cocconi, J.M. Sellen. Phys. Rev., 115, 678 (1959).
7. Г.И. Копылов, И.В. Полубаринов. Препринт ОИЯИ Д-821, Дубна, 1981.
8. Г.И. Копылов, И.В. Полубаринов, Г.Л. Семашко. Препринт ОИЯИ Р-1403, Дубна, 1983.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 сентября 1983 г.

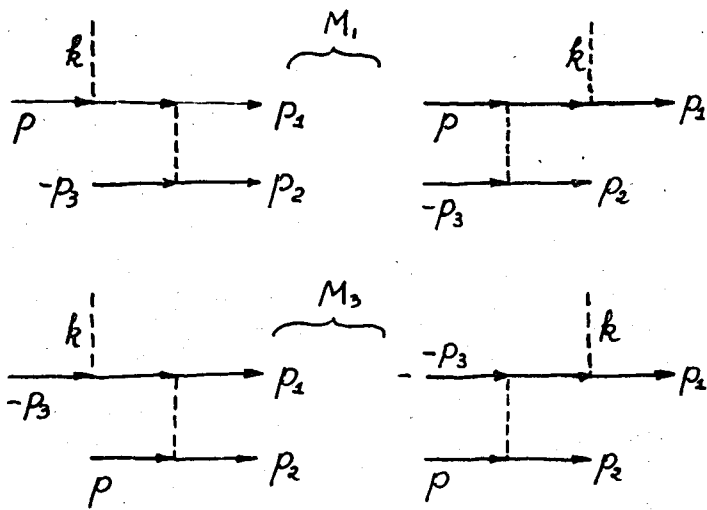


Рис. 1.

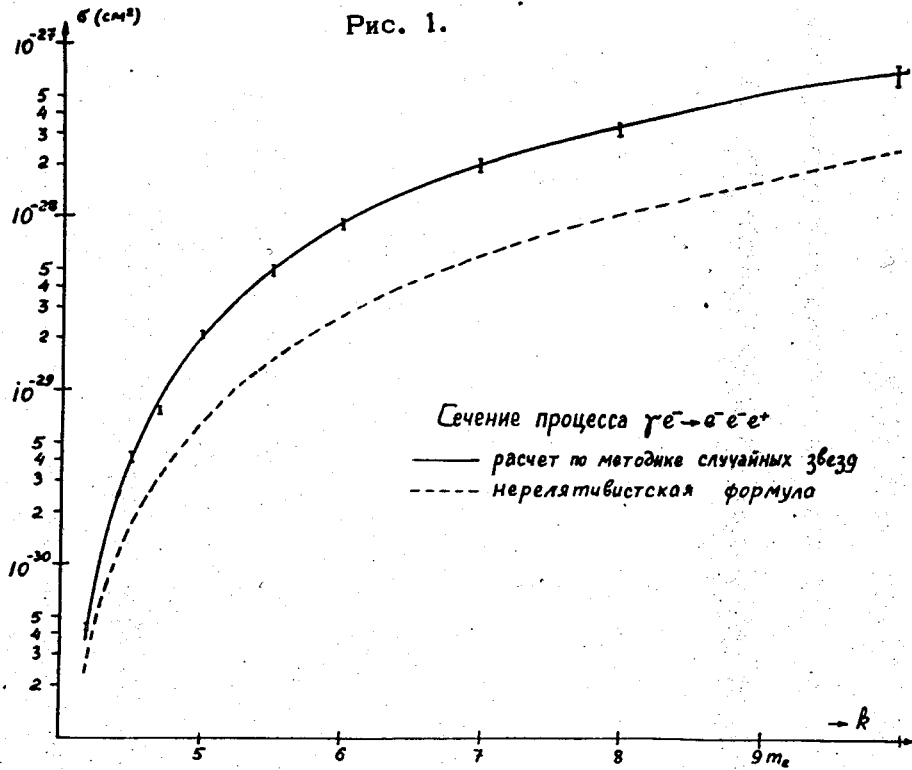


Рис. 2.

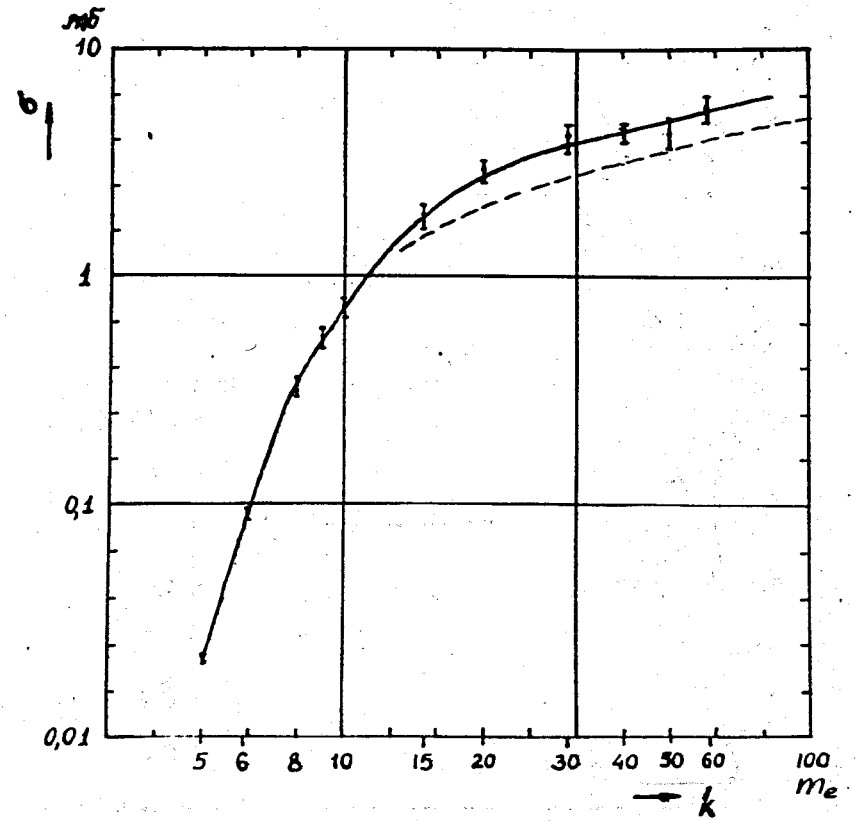


Рис. 3. Сечение процесса $\gamma e^- \rightarrow e^- e^- e^+$ в интервале энергии фотона k до $60 m_e$. Штриховая линия - формула Бете-Гайтлера.

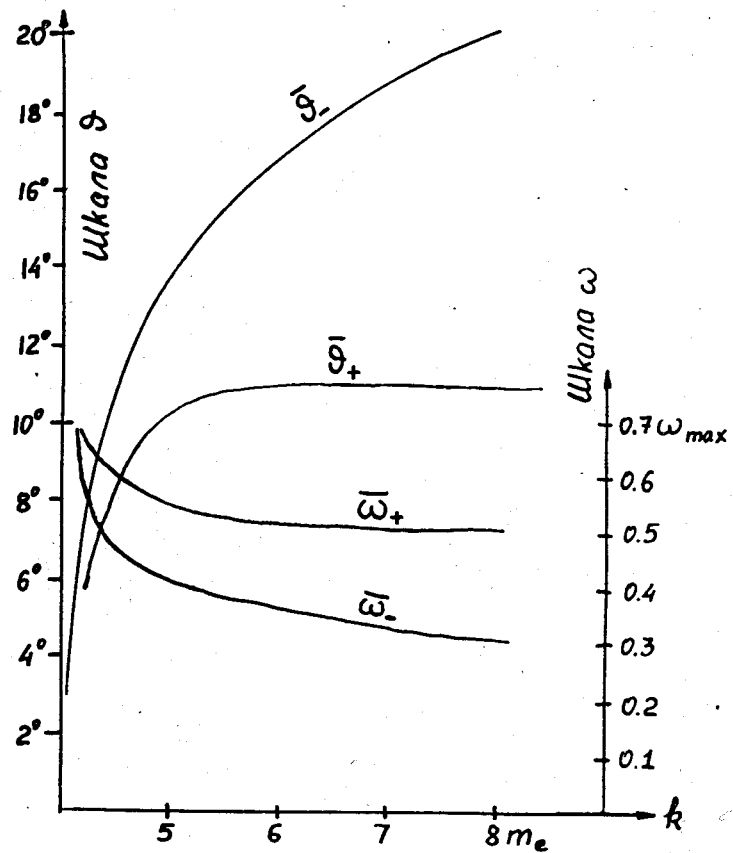


Рис. 4. Зависимость среднего угла вылета θ и средней энергии ω электрона (-) и позитрона (+) в лаб. системе отсчета от энергии фотона и в интервале до $9 m_e$. ω_{max} - максимально допустимая по кинематике энергия электрона.

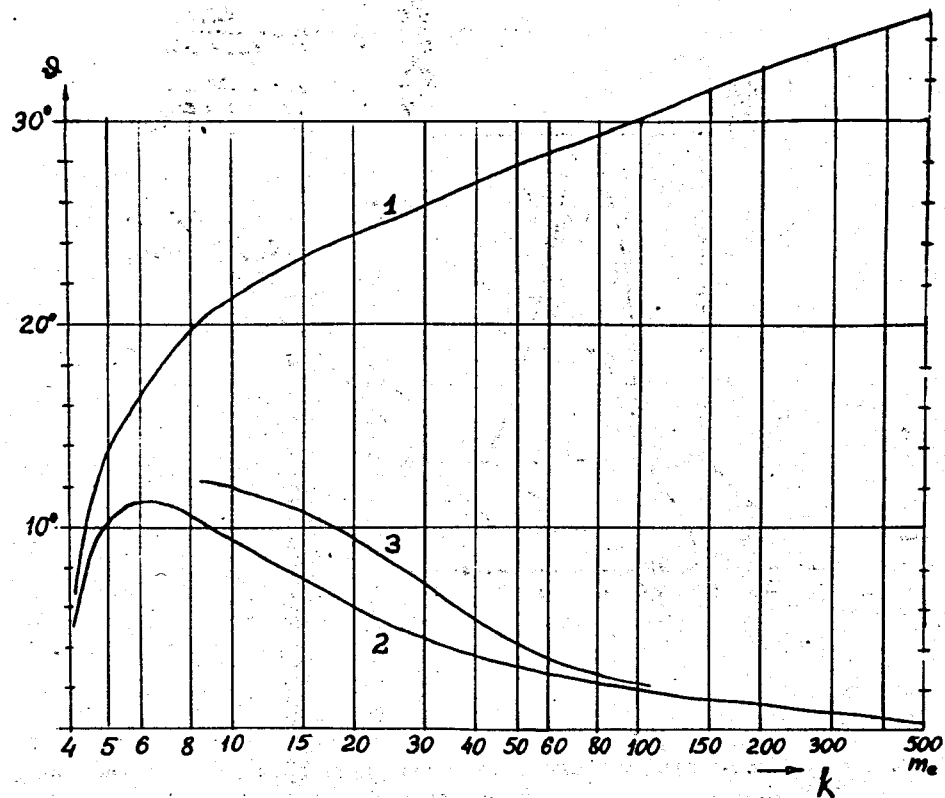


Рис. 5. Зависимость средних углов вылета в лабораторной системе отсчета от энергии фотона в интервале до $500 m_e$. 1 - для электронов; 2 - для позитронов; 3 - только для быстрых электронов.

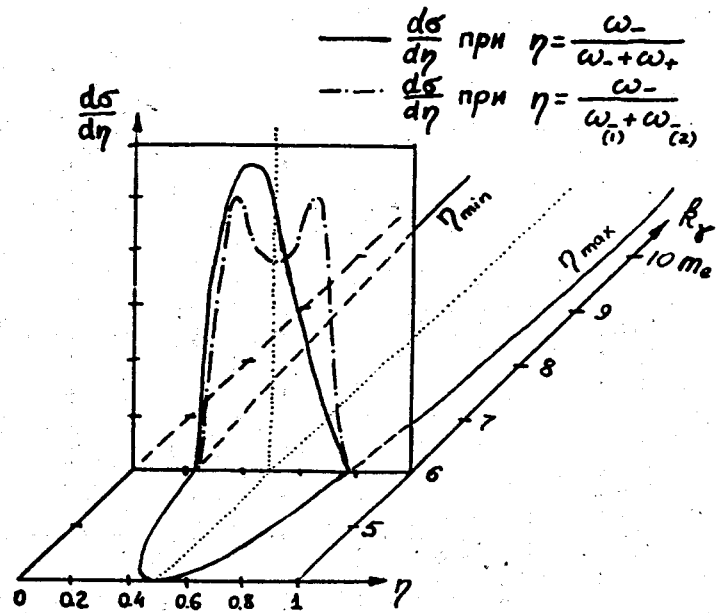


Рис. 6. Зависимость пределов изменения величины η от энергии фотона и типичное распределение по η в промежуточной области энергий фотона.

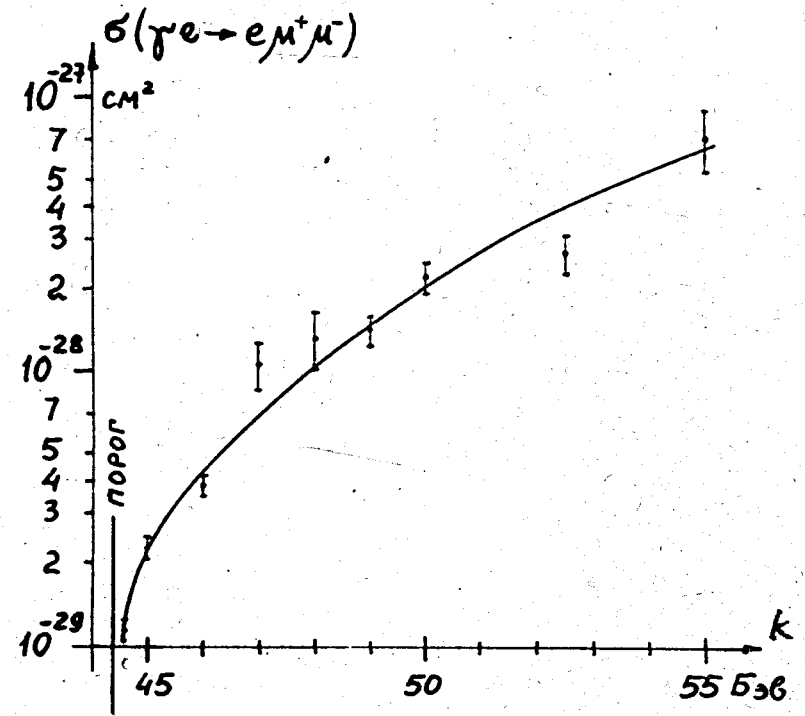


Рис. 7.