3
Ш-96

14.10

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

П. Шурани

Р-1401

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕТЕ-СОЛПИТЕРА В ПЛОСКОСТИ УГЛОВОГО МОМЕНТА

ДАН СССР, 1964, т 154, №2,
стр. 317-320.

Дубна 1963

2/10/3 гр.

П. Шурани

Р-1401

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕТЕ-СОЛПИТЕРА В ПЛОСКОСТИ УГЛОВОГО МОМЕНТА

Направлено в ДАН

Объединенный институт ядерных исследований БИБЛИОТЕКА

Дубна 1963

В предыдущей работе /1/ мы занимались решениями уравнения Бете–Солпитера в лестничном приближении в теории скалярных мезонов с взаимодействием $\lambda\phi^4$ /случай I/ и в теории скалярных мезонов, взаимодействующих посредством обмена векторными мезонами /случай II/.

Там был подробно исследован случай, когда массы частиц и полная энергия $\sqrt{S}$ равны нулю. Обозначим соответствующую амплитуду рассеяния и ядро уравнения, которому она удовлетворяет, через $\bar{T}_\ell(p,\omega,p',\omega')$ и $\bar{V}_\ell(p,\omega,p',\omega')$. В этом случае крайняя правая особенность амплитуды в ℓ – плоскости есть неподвижная точка ветвления корневого типа $\frac{1}{\sqrt{\ell-\ell_0}}$. Здесь мы рассмотрим случай, когда массы частиц и $\sqrt{S}$ не равны нулю. Уравнение Бете–Солпитера после выполнения вращения контура интегрирования в ω – плоскости можно написать в виде:

$$T_\ell(p_0,\omega_0,p_2,\omega_2,S)=K_\ell(p_0,\omega_0,p_2,\omega_2)+ \qquad /1/$$

$$+\int_0^\infty dp_1\int_{-\infty}^\infty d\omega_1\,K_\ell(p_0,\omega_0,p_1,\omega_1)\frac{1}{F(p_1,\omega_1,S)}\times$$

$$\times\,T_\ell(p_1,\omega_1,p_2,\omega_2,S),$$

где $F(p,\omega,S)=[p^2+m^2+(\omega-\frac{i\sqrt{S}}{2})^2][p^2+m^2+(\omega+\frac{i\sqrt{S}}{2})^2]$,

$$K_\ell(p_0,\omega_0,p_1,\omega_1)=\frac{\lambda^2}{8\cdot(2\pi)^5}\int_{4\mu^2}^\infty\sqrt{\frac{x-4\mu^2}{x}}\,Q_\ell\left(\frac{p_0^2+p_1^2+x+(\omega_0-\omega_1)^2}{2p_0p_1}\right)$$

для теории $\lambda\phi^4$, и

$$K_\ell(p_0,\omega_0,p_1,\omega_1,S)=\frac{2G^2(p_0^2+p_1^2+\omega_0^2+\omega_1^2+\frac{S}{2}+\frac{\mu^2}{2})}{(2\pi)^3}\,Q_\ell\left(\frac{p_0^2+p_1^2+\mu^2+(\omega_0-\omega_1)^2}{2p_0p_1}\right)$$

для теории с обменом векторными мезонами. Ядра $V_\ell=\frac{1}{F}K_\ell$ не являются ядрами типа Фредгольма. Тем не менее итерационное решение интегрального уравнения /1/ в случае $m=\mu=S=0$ /т.е. $\bar{T}_\ell$/ существует, если $Re\ \ell>\ell_0$.
Мы докажем, что $\bar{V}_\ell>V_\ell>0$ в некоторой области переменных S, m, μ /в дальнейшем предполагается, что p, ω, p', ω' находятся в области инте-

грирования/. Если это неравенство выполняется, то все итерации $\bar{T}_\ell$ мажорируют соответствующие итерации T_ℓ, поэтому T_ℓ не может иметь особенностей в области $Re\,\ell > \ell_0\,(\frac{dV_\ell}{d\ell} < 0)$.

В случае /1/ функция K_ℓ удовлетворяет условию $K_\ell < K_\ell(\mu = 0) = \bar{K}_\ell$, а для функции $1/F$ верна следующая оценка:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{(p^2 + m^2 + \omega^2 - \frac{S}{4})^2 + \omega^2 S} < \frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}$$

при

$$|S| < 4m^2. \qquad /3/$$

Поэтому в области /3/ $\bar{V}_\ell > V_\ell$.

В случае / II / (см. формулу /2б/) в области $S > -\mu^2$ ядро положительно, если

$$S > -\mu^2, \quad 2m^2 > S > -4m^2, \qquad /4/$$

то выполняется неравенство

$$\frac{2p^2 + 2p'^2 + 2\omega^2 + 2\omega'^2 + S + \mu^2}{(p^2 + \omega^2 + m^2 - \frac{S}{4})^2 + \omega^2 S} < \frac{2p^2 + 2p'^2 + 2\omega^2 + 2\omega'^2 + \mu^2}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

Используя интегральное представление функции Лежандра $Q_\ell(z)$[3]

$$Q_\ell(z) = \int_0^\infty d\phi\,(z + ch\,\phi\sqrt{z^2 - 1})^{-\ell-1},$$

получаем неравенство / для $\ell > 0$):

$$2(p^2 + p'^2 + \omega^2 + \omega'^2)\, Q_\ell\left(\frac{p^2 + p'^2 + (\omega - \omega')^2}{2pp'}\right) >$$

$$> (2p^2 + 2p'^2 + 2\omega^2 + 2\omega'^2 + \mu^2)\, Q_\ell\left(\frac{p^2 + p'^2 + \mu^2 + (\omega - \omega')^2}{2pp'}\right).$$

Таким образом, находим, что в случае / II / $\bar{V}_\ell > V_\ell$, если удовлетворяются неравенства /4/.

Для дальнейшего удобно ввести ядра

$$\bar{V}_\ell^+ = \bar{V}_\ell \times \Theta(p^2 + \omega^2 - 1)\,\Theta(p'^2 + \omega'^2 - 1), \qquad /5/$$

$$\bar{V}_\ell^- = \bar{V}_\ell \times \Theta(1 - p^2 - \omega^2)\,\Theta(1 - p'^2 - \omega'^2).$$

Так как ядра $\bar{V}_\ell^+$, $\bar{V}_\ell^-$ или $\bar{V}_\ell^{+-} = \bar{V}_\ell^+ + \bar{V}_\ell^-$ удовлетворяют условиям

$$\bar{V}_\ell > \bar{V}_\ell^+, \quad \bar{V}_\ell > \bar{V}_\ell^-, \quad \bar{V}_\ell > \bar{V}_\ell^{+-}, \qquad /6/$$

то особенности соответствующих решений /или резольвент/ лежат в области $Re\,\ell < \ell_0$.

Мы докажем, что операторы $\frac{1}{1 - \bar{V}_\ell^+}$, $\frac{1}{1 - \bar{V}_\ell^-}$ и $\frac{1}{1 - \bar{V}_\ell^{+-}}$ обладают особенностью оператора $\frac{1}{1 - \bar{V}_\ell}$ в точке $\ell = \ell_0$. Для этого мы воспользуемся операторным тождеством

$$\frac{1}{1 - A} = \frac{1}{1 - B}\;\frac{1}{1 - (A - B)\frac{1}{1 - B}}. \qquad /7/$$

Положим сначала $A = \bar{V}_\ell$, $B = \bar{V}_\ell^{+-}$. $\bar{V}_\ell - \bar{V}_\ell^{+-}$ ядро типа Фредгольма. Мы знаем, что $\frac{1}{1 - \bar{V}_\ell} > \frac{1}{1 - \bar{V}_\ell^{+-}} > 0$, если $\ell > \ell_0$. Поэтому $\frac{1}{1 - \bar{V}_\ell^{+-}}$ не может иметь полюса в точке $\ell = \ell_0$. Допустив, что $\frac{1}{1 - \bar{V}_\ell^{+-}}$ не имеет той же особенности, что и $\frac{1}{1 - \bar{V}_\ell}$ в точке $\ell = \ell_0$, мы покажем, что это допущение приводит к противоречию. Асимптотическое поведение ядра $\frac{1}{1 - \bar{V}_\ell}$ при $p^2 + \omega^2,\ p'^2 + \omega'^2 \to \infty, 0$ имеет вид / $\bar{V}_\ell$ – симметризировано/:[1]

$$\langle p, \omega | \frac{1}{1 - \bar{V}_\ell} | p', \omega' \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{(p^2 + \omega^2)(p'^2 + \omega'^2)}} \Big[f_1\left(\ell, \frac{p}{\omega}\ \frac{p'}{\omega'}\right) \times$$

$$\times\, \Theta(p^2 + \omega^2 - p'^2 - \omega'^2)\left(\frac{p^2 + \omega^2}{p'^2 + \omega'^2}\right)^{-\frac{x_1(\ell)}{2}} + f_2\left(\ell, \frac{p}{\omega'}\ \frac{p'}{\omega'}\right) \times$$

$$\times\, \Theta(p'^2 + \omega'^2 - p^2 - \omega^2)\left(\frac{p'^2 + \omega'^2}{p^2 + \omega^2}\right)^{-\frac{x_1(\ell)}{2}} \Big],$$

где $x_1(\ell)$ ведет себя как $\approx\sqrt{\ell - \ell_0}$ вблизи особенности в точке $\ell = \ell_0$, а f_1 и f_2 вблизи этой точки $\approx \frac{1}{\sqrt{\ell - \ell_0}}$. Тогда в асимптотической области $\langle | \frac{1}{1 - \bar{V}_\ell^{+-}} | \rangle$ мажорируется этим же выражением, и мы получаем, что $(\bar{V}_\ell - \bar{V}_\ell^{+-})\frac{1}{1 - \bar{V}_\ell^{+-}}$ ядро типа Фредгольма, регулярное при $\ell = \ell_0$. Так как числитель Фредгольма представлен равномерно сходящимся рядом, то его можно почленно интегрировать, и интеграл от от каждого члена сходится. Поэтому выражение

$$\frac{1}{1 - \bar{V}_\ell^{+-}}\;\frac{1}{1 - (\bar{V}_\ell - \bar{V}_\ell^{+-})\frac{1}{1 - \bar{V}_\ell^{+-}}}$$

не имеет особенности в точке $\ell = \ell_0$, что противоречит тому, что $\frac{1}{1 - \bar{V}^{+-}}$ имеет особенность в этой точке.

Особенности $\frac{1}{1 - \bar{V}_\ell^+}$ по ℓ совпадают с особенностями $\frac{1}{1 - \bar{V}_\ell^{+-}}$, поскольку верны следующие соотношения:

$$\frac{1}{1 - \bar{V}_\ell^{+-}} = \frac{1}{1 - \bar{V}_\ell^+} + \frac{1}{1 - \bar{V}_\ell^-} - 1$$

и

$$<p_1^2+\omega_1^2, \dots \mid \frac{1}{1-\bar V_\ell^-} \mid p_2^2+\omega_2^2, \dots> = \frac{1}{\sqrt{(p_1^2+\omega_1^2)(p_2^2+\omega_2^2)}} \times$$

$$\times < \frac{1}{p_1^2+\omega_1^2}, \dots \mid \frac{1}{1-\bar V_\ell^+} \mid \frac{1}{p_2^2+\omega_2^2}, \dots > .$$

Применим теперь соотношение /7/ к ядрам $\bar V_\ell^{+-}$ и V_ℓ в областях /3/ или /4/. Поскольку $V_\ell - \bar V_\ell$ –ядро типа Фредгольма, то в точке ℓ_0 T_ℓ имеет особенность корневого типа. Разумеется, из формулы /7/ следует, что $\frac{1}{1-V_\ell}$ может обладать и полюсами в ℓ плоскости, но в областях /3/ или /4/ положение полюсов ℓ_i ограничивается неравенством $Re\,\ell_i < \ell_0$. Поскольку полюса $\ell_i(s)$ –аналитические функции от s, то почти всюду в областях /3/ или /4/ выполняется неравенство $Re\,\ell_i(s) \le \ell_0$.

Если амплитуда $T_\ell = \frac{1}{1-V_\ell} K_\ell$ удовлетворяет условию унитарности в упругой области для комплексных значений ℓ, то особенность в точке ℓ_0 не может быть типа $\approx \frac{1}{\sqrt{\ell-\ell_0}}$, а только типа $\approx \sqrt{\ell-\ell_0}$. Ясно, что наши рассуждения, основанные на тождестве /7/, не позволяют найти, какая из этих возможностей осуществляется на самом деле.

Тот факт, что T_ℓ, $\bar T_\ell^+$, $\bar T_\ell^{+-}$, $\bar T_\ell$ имеют одни и те же сингулярности, тесно связан с теоремой Вейля[/4/]:

Если к самосопряженному оператору добавить вполне непрерывный самосопряженный оператор, то предельный спектр оператора не изменится.

Так как самосопряженный оператор всегда имеет полную систему обобщенных собственных векторов[/5/], решение формально можно представить в виде:

$$T_\ell = \int S_\ell(\lambda) \frac{K_\ell(\lambda)}{1-V_\ell(\lambda)} d\lambda + \Sigma\, S_\ell(\lambda_i) \frac{K_\ell(\lambda_i)}{1-V_\ell(\lambda_i)} , \qquad /8/$$

где $V_\ell(\lambda)$ и $S_\ell(\lambda)$ – собственные значения и собственные векторы оператора V_ℓ. Если у двух операторов непрерывные спектры /см. первый член уравнения /8// совпадают, то неудивительно, что совпадают и их точки ветвления /полюса функции T_ℓ возникают во втором члене соотношения /8/, дающем вклад дискретного спектра/.

Ядро $\bar V_\ell$ обладает чисто непрерывным спектром, но ядро V_ℓ, вообще говоря, имеет и дискретный спектр. Однако, как мы доказали, по крайней мере в областях /3/ и /4/, рассматриваемая точка ветвления является крайней правой особенностью в ℓ –плоскости. Заметим, что корневая особенность в ℓ – плоскости была найдена в работе Сойера[/2/] суммированием ведущих членов теории возмущения.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить А.А. Логунова, Г. Домокоша, И.Т. Тодорова и Д.С. Чернавского за ценные дискуссии.

Литература

1. P.Suranyi. Phys. Letters, 6, 59 (1963).
2. R.F.Sawyer. Preprint, Madison, 1963.
3. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм и произведений. Физматгиз, 1962.
4. F.Riesz. B.Sz. Nagy. Lecons d'analyse fonctionelle. Akademiai Kiado, Budapest, 1952.
5. Г.И. Кац. Украинский Математический журнал, XIII, 13/1961/.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 августа 1963 г.