

13

M-21

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

P-140

В.М. Мальцев

РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНОСТИ СВИНЦОВОГО КОНВЕРТЕРА

Д. Жуэ, 1959, №1, с 28-32.

1958 г.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

P-140

В.М. Мальцев

РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНОСТИ СВИНЦОВОГО КОНВЕРТЕРА

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

1958 г.

А Н Н О Т А Ц И Я

В интервале энергий от 50 Мэв до 500 Мэв для толщин конвертера от 0,1 см до 0,7 см произведен расчет эффективности свинцового конвертера. Рассмотрены два поколения каскадного процесса. Оценено влияние многократного рассеяния на угловой разброс и потери энергии заряженных частиц, покидающих конвертер.

На свинцовый конвертер, представляющий диск толщины d и радиуса R падает нормально поверхности поток γ квантов, энергии E_0 . Отношение числа γ квантов, образовавших заряженные частицы, вышедшие через грань $z = d$, к полному числу γ - квантов, падающих на грань $z = 0$, является предметом настоящего расчета.

Если выполнены условия:

- толщина конвертера сравнима с радиационной единицей длины (для свинца $\sim 0,5$);
- радиус конвертера много больше толщины его,
- начальная энергия γ квантов много больше критической энергии (критическая величина энергии для свинца с учетом эффекта плотности $\sim 6,4$ Мэв), то мы вправе ограничиться одномерной задачей. При этом будут приняты во внимание процессы тормозного излучения и рождения пар; ионизационными потерями и комптон-эффектом можно пренебречь.

Задача решена, если найдены $n_i(z, \mu, E)$ - функции распределения γ -квантов (i - четные) и заряженных частиц (i - нечетное) по толщине конвертера - z , косинусу угла отклонения от направления падения γ -квантов - μ и энергии соответствующих частиц - E . Функции распределения $n_i(z, \mu, E)$ удовлетворяют системе зацепляющихся кинетических уравнений:

$$\mu \frac{dn_0(z, \mu, E)}{dz} + \tau_0(E)n_0(z, \mu, E) = Q_0(z, \mu, E), \quad (Ia)$$

$$\mu \frac{dn_{2k+1}(z, \mu, E)}{dz} + \tau_1(E)n_{2k+1}(z, \mu, E) = \int_0^{E_0+2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} n_{2k}(\xi, \mu', E') \tau_0(E') f_1(\mu_0, E'-E) \times (Ib) \\ \times dE' d\mu' d\psi',$$

(Ib)

$$\mu \frac{dn_{2k+2}(z, \mu, E)}{dz} + \tau_0(E)n_{2k+2}(z, \mu, E) = \int_0^{E_0+2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} n_{2k+1}(\xi, \mu', E') \tau_1(E') f_0(\mu_0, E'-E) dE' d\mu' d\psi',$$

где $Q_0(z, \mu, E) = A \delta(E - E_0) \delta(\mu - 1) \delta(z)$ γ - функция распределения γ - квантов, падающих на конвертер, $\tau_0(E)$ и $\tau_1(E)$ - коэффициенты поглощения в свинце соответственно γ - квантов и заряженных частиц, f_0 и f_1 - функции распределения по углам и энергиям γ квантов и заряженных частиц, рождаемых в элементарных актах.

I. Приближение первым поколением каскада

Рассмотрим, прежде всего, частный случай, когда вся энергия первоначального γ -кванта передается одной частице пары, при этом вторая частица пары исключена из рассмотрения. Хорошо известно (I), что разлетом частиц пары мы также можем пренебречь, поэтому функция распределения f_1 , может быть записана в виде

$$f_1(\mu_0, E' - E) = \frac{1}{2\pi} \delta(\mu_0 - 1) \delta(E' - E). \quad (2)$$

Решение уравнения (Ia) хорошо известно: (2)

$$n_0(z, \mu, E) = \frac{1}{\mu} \int_0^z Q(\xi) e^{\frac{\tau_0}{\mu}(z-\xi)} d\xi = A \delta(E - E_0) \delta(\mu - 1) e^{-\frac{\tau_0 z}{\mu}}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (Iв) получим функцию распределения заряженных частиц первого поколения каскада:

$$n_1(z, \mu, E) = \frac{A \tau_0 \delta(E - E_0) \delta(\mu - 1)}{(\mu \tau_0 - \tau_1)} \left[e^{\frac{\tau_1 z}{\mu}} - e^{-\tau_0 z} \right]. \quad (4)$$

Отношение проинтегрированных по углам и энергиям функций распределения каскадных частиц ^{первого} поколения к первоначальному числу γ

квантов, падающих на конвертер, дает долю γ квантов $\mathcal{X}_0(\xi, E_0)$ и заряженных частиц $\mathcal{X}_1(\xi, E_0)$ по толщине конвертера, либо что то же самое, вероятности для первоначального γ кванта при прохождении толщины τ остаться γ квантом \mathcal{X}_0 , или трансформироваться в заряженную частицу \mathcal{X}_1 .

Если предположить, что детектор регистрирует все заряженные частицы, покидающие конвертер, то при условии, что одна из частиц пары исключена из рассмотрения, следует из (4), что эффективность конвертера равна:

$$\mathcal{X}_1(d, E_0) = \frac{\tau_0(E_0)}{[\tau_0(E_0) - \tau_1(E_0)]} \left[e^{-\tau_1(E_0)d} - e^{-\tau_0(E_0)d} \right] \quad (5)$$

Оценим ошибку, возникшую из-за того, что нами учтено только первое поколение каскадного процесса. Поскольку для γ кванта вероятность пройти конвертер без столкновения, равна

$$\mathcal{X}_0(d, E_0) = e^{-\tau_0(E_0)d}, \quad (6)$$

то, очевидно, что разность

$$\alpha(d, E_0) = 1 - (\mathcal{X}_0 + \mathcal{X}_1) \quad (7)$$

представляет для первоначального γ кванта вероятность испытать превращения во втором и следующих поколениях. Таким образом, величина α представляет ошибку, возникающую вследствие того, что нами рассмотрено лишь первое поколение каскадного процесса. Вычисление $\alpha(d, E_0)$ в энергетическом интервале от 50 Мэв до 500 Мэв для толщин конвертера $d = 0,1$ см; 0,3 см; 0,5 см; 0,7 см указывает на то, что при толщинах 0,1 см и 0,3 см первоначальный γ квант участвует в первом поколении каскадного процесса с

вероятностью 0,99, при толщинах 0,5 см и 0,7 см с вероятностью 0,90, т.е. в последнем случае γ квант с вероятностью 0,1 принимает участие во втором и следующих поколениях.

2. Влияние второго поколения каскада

Найдем вероятность, с которой первоначальный γ -квант участвует во втором каскадном поколении. Ограничимся частным случаем, когда вся энергия заряженной частицы первого каскадного поколения передается тормозному γ кванту. Разлетом при этом можем пренебречь (I), так что функция распределения f_0 тормозных γ квантов по углам и энергиям может быть представлена в виде

$$f_0(\mu_0, E' - E) = \frac{1}{2\pi} \delta(\mu_0 - 1) \delta(E' - E). \quad (8)$$

После подстановки (4) и (8) в уравнение (Iv) его решение дает функцию распределения для γ квантов второго поколения каскада:

$$n_2(z, \mu, E) = \frac{A\tau_0\tau_1\delta(E-E_0)\delta(\mu-1)}{(\tau_0-\tau_1)} e^{-\frac{\tau_0 z}{\mu}} \left[\frac{1}{\tau_0(1-\mu)} - \frac{e^{\frac{\tau_0 z}{\mu}(1-\mu)}}{\tau_0(1-\mu)} + \frac{e^{\frac{z}{\mu}(\tau_0-\mu\tau_1)}}{\tau_0-\mu\tau_1} - \frac{1}{\tau_0-\mu\tau_1} \right]. \quad (9)$$

Разложим $\exp\left[\frac{\tau_0 z(1-\mu)}{\mu}\right]$ в ряд и удержим два члена разложения. Тогда, после интегрирования по E и μ , получим, что вероятность, с которой γ квант второго поколения выходит из конвертера, равна

$$\mathcal{X}_2(d, E_0) = \frac{\tau_0\tau_1}{(\tau_0-\tau_1)^2} \left\{ e^{-\tau_1 d} - e^{-\tau_0 d} [d(\tau_0-\tau_1) + 1] \right\}. \quad (10)$$

Поступая аналогичным образом, легко найдем, что вероятность выхода из конвертера заряженной частицы второго поколения каскада может быть записана в виде:

$$\mathcal{X}_3(d, E_0) = \frac{\tau_0^2 \tau_1}{(\tau_0 - \tau_1)^3} \left\{ [d(\tau_0 - \tau_1) - 2] e^{-\tau_1 d} + [d(\tau_0 - \tau_1) + 2] e^{-\tau_0 d} \right\} \quad (II)$$

Таким образом, при условии, что детектор регистрирует все заряженные частицы, покидающие конвертер, и что после каждого акта взаимодействия мы следим за одной частицей, уносящей всю энергию частицы-родителя, эффективность конвертера с учетом второго поколения каскада равна $\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_3$. Ошибка, возникающая из-за ограничения двумя первыми поколениями каскада, равна

$$\Delta(d, E_0) = 1 - (\mathcal{X}_0 + \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_3) \quad (I2)$$

Используя коэффициенты поглощения $\tau_0(E)$ и $\tau_1(E)$ мы вычислили для крайних значений рассматриваемого энергетического интервала 50 — 500 Мэв и двух крайних толщин 0,1 см и 0,7 см эффективности конвертера. Из расчета следует, что $\mathcal{X}_0(0,1) = 0,87$ и $\mathcal{X}_1(0,1) = 0,13$ при энергии $E_0 = 500$ Мэв, и $\mathcal{X}_0(0,1) = 0,90$ и $\mathcal{X}_1(0,1) = 0,09$ при энергии $E_0 = 50$ Мэв, т.е., как уже было отмечено выше, при толщине конвертера 0,1 см второе и следующее поколения каскада, практически отсутствуют. При толщине конвертера 0,7 см, соответствующие вероятности равны $\mathcal{X}_0(0,7) = 0,38$ и $\mathcal{X}_1(0,7) = 0,53$ при энергии $E_0 = 500$ Мэв, и $\mathcal{X}_0(0,7) = 0,50$ и $\mathcal{X}_1(0,7) = 0,37$ при энергии $E_0 = 500$ Мэв. Таким образом, при толщине конвертера 0,7 см с вероятностью 0,1 включаются второе и следующее поколения каскада. Однако расчет для энергии $E_0 = 500$ Мэв дает следующие вероятности выхода частиц второго поколения из конвертера:

$\chi_2(0,7) = 0,07$ и $\chi_3(0,7) = 0,01$, т.е. второе поколение каскада практически ничего не добавляет к эффективности конвертера, вычисленной в первом поколении каскада. Если принять во внимание это обстоятельство, то для всего набора толщин конвертера от 0,1 см до 0,7 см во всем энергетическом интервале от $E_0 = 50$ Мэв до $E_0 = 500$ Мэв следует ограничиться рассмотрением только первого поколения каскада, остальные поколения дадут для эффективности конвертера поправку ~ 1%.

3. Учет многократного рассеяния

До сих пор мы не интересовались поправкой на многократное рассеяние, т.е. рассмотрели случай: конвертер - маленький, детектор - большой, когда практически все заряженные частицы, вышедшие из конвертера будут зафиксированы.

При другой геометрии эксперимента поправка на многократное рассеяние может быть существенная. Однако, имеет смысл найти эту поправку лишь для заряженных частиц первого каскадного поколения, поскольку второе каскадное поколение заряженных частиц составляет 1%-2% от общего числа частиц, участвующих в двух поколениях.

Принимая во внимание лишь одну частицу пары, обладающую максимальной энергией E_0 , можно записать функцию распределения по глубине и начальной энергии в виде

$$n_1(z, E') = \frac{A_2 \mu \tau_0}{(\tau_0 - \tau_1)} (e^{-\tau_1 z} - e^{-\tau_0 z}) \delta(E' - E_0)$$

Родившись в точке z с энергией E' , заряженная частица до вылета из конвертера проходит расстояние $(d - z)$ и выходит с энергией

какова в этом случае будет поправка для энергии $E_0 = 500$ Мэв и толщине конвертера $d = 0,7$ см. Используя (17) и (18) легко найдем $\bar{\mathcal{X}}$, $(5^0; 500; 07) = 0,08$, т.е. 8% из 54% теряется из-за многократного рассеяния.

4. Учет второй частицы пары

Проведенное выше рассмотрение предполагало, что одна из частиц пары уносит всю энергию первоначального γ -кванта. На самом деле энергия каким-то образом распределяется между частями пары. В этом случае обе частицы равноправны и должны быть учтены при вычислении эффективности конвертера. Перенумеруем частицы пары таким образом, что первой частицей всегда будет частица с энергией E_1 от E_0 до $\frac{E_0}{2}$, второй - частица с энергией $E_2 = E_0 - E_1$ от $\frac{E_0}{2}$ до 0. Легко видеть, что вероятность выхода из конвертера для первой и второй частицы пары равна соответственно:

$$\mathcal{X}_1^{(1)}(E_0, E_1, d) = \frac{\tau_0(E_0)}{\tau_0(E_0) - \tau_1(E_0 - E_1)} \left[e^{-\tau_1(E_1)d} - e^{-\tau_0(E_0)d} \right], \quad (19)$$

$$\mathcal{X}_1^{(2)}(E_0, E_0 - E_1, d) = \frac{\tau_0(E_0)}{\tau_0(E_0) - \tau_1(E_0 - E_1)} \left[e^{-\tau_1(E_0 - E_1)d} - e^{-\tau_0(E_0)d} \right]$$

Тогда эффективность конвертера может быть записана в виде

$$\eta(E_0, E, d) = 1 - (1 - \mathcal{X}_1^{(1)}) (1 - \mathcal{X}_1^{(2)}). \quad (20)$$

Однако, величина E_1 принимает равновероятные значения из интервала $(E_0, \frac{E_0}{2})$, поэтому мы должны усреднить эффективность конвертера по этому интервалу энергий, т.е.

$$\bar{\eta}(E_0, d) = \frac{2}{E_0} \int_{\frac{E_0}{2}}^{E_0} \eta(E_0, E_1, d) dE_1. \quad (21)$$

Выражение (2I) представляет собой истинную эффективность конвертера с учетом произвольного распределения энергии первоначального γ кванта между частицами пары - формулы (I9), и поправок к ним на многократное рассеяние - формулы (I5) и (I8).

Чтобы выяснить, насколько существенно принимать во внимание обе частицы пары, мы вычислили $\mathcal{X}_1^{(1)}$ и $\mathcal{X}_1^{(2)}$ при различных распределениях энергии $E_0 = 500$ Мэв между частицами пары. Расчет дает

$$\mathcal{X}_1^{(1)}(500; 250; 0,7) = \mathcal{X}_1^{(2)}(500; 250; 0,7) = 0,494, \quad \mathcal{X}_1^{(1)}(500; 450; 0,7) = 0,520, \quad \mathcal{X}_1^{(2)}(500; 50; 0,7) = 0,444, \quad \mathcal{X}_1^{(1)}(500; 500; 0,7) = 0,530,$$

откуда $\eta(500; 250; 0,7) = 0,744,$

$$\eta(500; 450; 0,7) = 0,733, \quad \eta(500; 500; 0,7) = 0,530.$$

Таким образом, различные распределения энергии между частицами пары незначительно меняют эффективность конвертера, которая резко падает, если пренебречь одной из частиц пары. Усредненная эффективность конвертера $\bar{\eta}(500; 0,7) = 0,72$. Учет поправок на многократное рассеяние несколько уменьшит эту величину.

Действительно, положив, что край детектора виден с края конвертера под углом 5° , мы нашли, что эффективность конвертера, поправленная на многократное рассеяние на углы $> 5^\circ$, равна $\bar{\eta}_{\text{исп}}(500; 0,7) = 0,52$.

Итак, задача определения эффективности конвертера сведена к вычислению $\bar{\eta}(E_0, d)$ по формуле (2I). Эта величина определена функциями $\mathcal{X}_1^{(1)}(E_1)$ и $\mathcal{X}_1^{(2)}(E_1)$ - формулы (I9), которые при определенной геометрии, должны быть исправлены - формулы (I5), (I7), (I8), на многократное рассеяние.

Автор благодарен Желепову В.П. и Флягину В.Б. за обсуждение работы, Мальцевой Н.С. за помощь при выполнении расчетов.

Л и т е р а т у р а

1. Гайтлер "Квантовая теория излучения"
2. Смирнов "Курс высшей математики" т.3, ч.2
3. Wilson Phys. Rev. 84, 100, 1954.